

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический
университет»

На правах рукописи



До Тиен Тхань

**МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

05.13.18 — «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
М.В. Булатов

Иркутск – 2015

Оглавление

	Стр.
Введение	4
1. Достаточные условия существования единственного и дифференцируемого решения	15
1.1 Матричные пучки и полиномы	15
1.2 Достаточные условия существования единственного решения системы интегро-дифференциальных уравнений	20
2. Численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной	27
2.1 Многошаговые методы решения систем интегро-дифференциальных уравнений	27
2.2 Области устойчивости	40
2.3 Численные эксперименты	50
3. Численное решение сингулярных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений при моделировании в пограничных средах «жидкость-газ»	55
3.1 Интегро-дифференциальные уравнения с сингулярными точками	55
3.2 Задача о р-лапласиане	56
3.3 Описание программы для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений	65
4. Математическое моделирование в электрических цепях	72
4.1 Вспомогательные сведения из теории электроцепей	72

4.2	Общие принципы построения математических моделей электроцепей	75
4.3	Многоконтурная электрическая цепь	79
	Заключение	92
	Список литературы	93
	Приложение А. Программа решения сингулярных краевых задач для моделей пузыря в неоднородной жидкости на основе теории вырожденных интегро-дифференциальных уравнений	106

Введение

Актуальность. Математические модели многих физических процессов, в частности, формирование контура микроскопического пузыря в неоднородной жидкости и описание многоконтурных электрических цепей включают в себя обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ), неразрешенные относительно главной части. Для интегро-дифференциальных уравнений под главной частью понимается старшая производная искомой вектор-функции. Начальная (краевая) задача для таких уравнений требует исследования на предмет существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения. Даже если решение таких задач существует, единственно и достаточно гладкое, то его, как правило, не удастся найти в аналитическом виде. Если для таких задач применить численные методы, разработанные для ИДУ, разрешенных относительно главной части, то в результате мы получим систему линейных (нелинейных) алгебраических уравнений, которая либо не имеет решения, либо имеет множество решений. Даже в линейном случае стандартные дискретные методы часто порождают неустойчивый процесс. Таким образом, возникает необходимость в разработке и программной реализации эффективных численных методов решения таких задач.

В диссертации рассматриваются следующие проблемы:

1. Формулировка достаточных условий существования единственного решения ИДУ, не разрешенных относительно главной части, с заданными начальными (краевыми) условиями.
2. Построение и обоснование численных методов решения таких задач и определение областей их устойчивости.
3. Применение полученных результатов к математическим моделям электроцепей и разделения пограничных сред «жидкость-газ».

Работа посвящена разработке численных алгоритмов решения уравнений вида

$$A(t)x'(t) + F(t,x(t)) + \int_0^t G(t,s,x(s))ds = f(t), \quad (1)$$

с заданными начальными (конечными) условиями.

Детально рассмотрены случаи:

1. $A(t) = t^p$, $p > 0$, $t \in (0, M]$, $F(t,x) \equiv 0$, $x(M) = \xi$, где $x(t)$ – искомая функция;
2. $A(t)$ – $(n \times n)$ -матрица, $F(t,x(t))$ и $G(t,s,x(s))$ – n -мерные вектор-функции, $t \in [0,1]$, причем $\det A(t) \equiv 0$, с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

которое согласовано с правой частью.

В первом случае такое уравнение называется сингулярным интегро-дифференциальным и имеет вид

$$t^p x'(t) = \int_0^t f(x(s))ds, \quad t \in [0, M] \quad (3)$$

с условием

$$x(M) = \xi. \quad (4)$$

Данное уравнение является интегральным аналогом сингулярного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего при определении профиля пузырьков (капелек) в жидкости (газе) (см., напр., [96]). Разработкой численных методов решения таких задач активно занимались как российские, так и зарубежные авторы. Значительный вклад внесли Auzinger W. [100], Cahn J.W. [68], Hastermann G. [84], Hoog F. de [74; 75], Kneisl G., Lima P., Weinmuller E.B., Rotoli G. [79; 96; 100; 101], Конюхова Н.Б., Соловьев М.Б. [92], Куликов

Г.Ю. [93]. При реализации алгоритмов, разработанных этими авторами, для данных задач требуется выбирать очень маленький шаг интегрирования, что ведет к большим вычислительным затратам.

Во втором случае предполагается, что входные данные достаточно гладкие в соответствующих областях определения. Как уже отмечалось выше, такие системы уравнений находят широкое применение при математическом моделировании электрических цепей (см., напр., [39;47] и приведенную там библиографию).

Если в (1) отсутствует интегральная составляющая, то такие уравнения с условием (2) принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Начиная с середины 70-х годов качественной теорией и разработкой численных методов решения ДАУ занимались исследователи из России (Бояринцев Ю.Е. [7–10], Абрамов А.А. [1], Кузнецов Е.Б. [33], Курина Г.А. [32], Горбунов В.К. и его ученики [29;30]), Германии (Marz R. [86;97], Kunkel P., Mehrmann V. [72; 90; 91], Lubich Ch. [83] и их ученики), Швейцарии (Hairer E., Wanner G. [52;53;82]), США (Campbell S. [69], Petzold L. [60], Gear C.W. [70], Rheinboldt W.C. [98] и их ученики) и в ряде других стран. С той поры вышли тысячи статей и десятки монографий, посвященных исследованию данных систем. Это связано с тем, что ДАУ описывают многие важные прикладные задачи. Данные математические модели приведены в работах Воск Н.Г. [59], Михайлова В.Б. [34] и других авторов. Исследованием уравнений с вырожденным оператором перед главной частью занимались Свиридюк Г.А. [37;38], Федоров В.Е. [38; 51], Келлер А.В. [31], Сидоров Н.А. [40–42], Фалалеев М.В. [48–50] и их ученики, а также Favini A. (Италия), Yagi A. (Япония) [76] и др.

Если в (1) матрица $A(t)$ – тождественно ненулевая и $F(x(t),t) = B(t)x(t)$, где $B(t)$ – $(n \times n)$ -матрица и $\det B(t) \equiv 0$, то такие уравнения принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). Исследование этих уравнений началось относительно недавно. Первая статья [54] вышла в 1987 г. С той поры вышло несколько публикаций по этой теме, авторами которых являются

Булатов М.В., Будникова О.С. (Иркутск) [11–16; 19], Hadizadeh M. (Иран) [81], Brunner H. (Канада, Гонконг) [63; 65].

Наконец, если $A(t)$ – тождественно нулевая матрица, $F(x(t), t) \equiv 0$, то мы имеем интегральные уравнения Вольтерра I рода (ИУВ). Численными методами решения таких уравнений и прикладными задачами, которые описываются ИУВ, занимались Апарцин А.С. [3], Бакушинский А.Б. [4], Шароглазов В.С. [58], Сизиков В.С., Верлань А.Ф. [27], Linz P. [95], Brunner H. [61; 62; 64] и др.

Численное решение таких систем наталкивается на большие трудности. В частности, многие методы приводят либо к неустойчивому процессу, либо к проблемам решения систем линейных алгебраических уравнений с тождественно вырожденной матрицей.

Таким образом, разработка альтернативных подходов для численного решения (1), (2) является актуальной темой.

Целью диссертационной работы является применение теории вырожденных ИДУ для разработки численных методов их решения, практической реализации данных методов в задачах анализа многоконтурных электрических цепей и при моделировании процессов, протекающих в среде «жидкость-газ».

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Сформулировать достаточные условия существования единственного решения начальной задачи для систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, для численного решения которых предложить и обосновать многошаговые методы.
2. Выписать математическую модель, которая описывает профиль пузыря в неоднородной жидкости, в виде сингулярного ИДУ и разработать новые эффективные методы его решения.
3. Построить математические модели многоконтурных электрических цепей, которые включают в себя систему ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью.

4. Реализовать программный комплекс в среде MATLAB для расчетов прикладных задач по разработанным алгоритмам.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются модели микроскопического пузыря в неоднородной жидкости и модели многоконтурных электрических цепей. Эти модели имеют вид сингулярных ИДУ и систем ИДУ с тождественно вырожденной матрицей при производной искомой вектор-функции. Предметом исследования являются численные методы для решения задач указанных выше видов.

Методы исследования. При проведении исследований применялись математический аппарат теории матриц, теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, теории разностных схем и сведения, относящиеся к моделированию электрических цепей.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов подтверждается достаточно точным совпадением результатов расчетов по предложенным алгоритмам с результатами расчетов, достоверность которых была доказана ранее, и расчетами тестовых примеров.

Тематика диссертационной работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18:

п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей».

п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий».

п. 5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Научная новизна диссертационной работы представлена следующими положениями, выносимыми на защиту:

1. Сформулированы достаточные условия существования единственного решения начальных задач для ИДУ с тождественно вырожденной главной частью.
2. Для такого класса задач впервые предложены и обоснованы эффективные многошаговые численные методы высокого порядка. Построены области устойчивости этих алгоритмов.
3. Выписано уравнение для нахождения радиуса пузыря в зависимости от плотности окружающей жидкости в виде сингулярного ИДУ. Разработаны численные методы его решения, для реализации которых требуется существенно меньше вычислительных затрат, чем для ранее разработанных.

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в следующем:

1. Получены условия, при выполнении которых вырожденные ИДУ разрешимы и имеют единственное решение.
2. Предложены и обоснованы численные методы для решения выделенных классов ИДУ. Получена оценка скорости сходимости методов и построены их области устойчивости.
3. Выписана математическая модель нахождения профиля пузыря в неоднородной жидкости в виде сингулярного ИДУ с краевыми условиями. Предложены эффективные численные методы решения таких задач.
4. Приведен детальный качественный анализ вырожденных систем ИДУ, которые моделируют многоконтурные электрические цепи.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработан программный комплекс, реализующий численные методы решения сингулярных ИДУ и позволяющий существенно ускорить процесс вычислений профиля пузыря в жидкости. Также программно реализованы многошаговые методы решения вырожденных систем ИДУ (начальная задача), которые описывают многоконтурные электроцепи.

Результаты диссертационного исследования были использованы в учебном процессе ИРНИТУ при проведении занятий по дисциплине «Численные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений», что подтверждено соответствующим актом о внедрении.

Апробация. Результаты, излагаемые в диссертации, докладывались на следующих конференциях:

1. IV Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования», Воронеж, 2011 г.
2. Отчетная конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 2011 г.
3. XII Прибайкальская Школа-семинар «Моделирование, оптимизация и информационные технологии», Иркутск – Ангасолка, 2012 г.
4. X Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань, 2012 г.
5. Отчетная конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 2012 г.
6. III Международная Школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи», Иркутск, 2012 г.
7. Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Малые Винеровские чтения», Иркутск, 2013 г.
8. XVIII Байкальская Всероссийская конференция «Информационные и математические технологии в науке и управлении», Иркутск, 2013 г.
9. Отчетная конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 2013 г.
10. Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Малые Винеровские чтения», Иркутск, 2014 г.
11. Отчетная конференция ИДСТУ СО РАН «Ляпуновские чтения», Иркутск, 2014 г.

12. Международный семинар «Численное решение интегральных и дифференциальных уравнений», Иркутск, 2014 г.
13. 6th International Conference on High Performance Scientific Computing, City Hanoi: Institute of Mathematics, 2015 г.

Результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры Вычислительной техники ИРНИТУ (зав. кафедрой, доцент Дорофеев А.С.).

Публикации по теме диссертации представлены 14 научными работами, из которых 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК: «Известия ИГУ. Серия Математика», «Вестник ЮУрГУ. Серия Математическое моделирование и программирование». Получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015619250. Основные результаты диссертации опубликованы в [18; 20–26; 36; 44–46; 66; 99].

Личный вклад автора. В совместных работах научному руководителю и П. Лима принадлежит постановка задачи. Доказательство существования единственного решения для начальной задачи вырожденных систем ИДУ, обоснование численных методов, все численные расчеты и выкладки проведены автором лично.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 114 страниц с 20 рисунками и 16 таблицами. Список литературы содержит 101 наименование.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи, раскрыта научная новизна и практическая значимость полученных результатов, представлен обзор текущей литературы по теме диссертации, приведена структура и краткий обзор содержания работы.

В главе 1 рассмотрены вспомогательные теоретические сведения, а именно, приведены некоторые определения, характерные свойства матричных пучков и матричных полиномов, сформулированы достаточные условия существования

единственного решения начальных задач для ИДУ с тождественно вырожденной главной частью.

В главе 2 выделен класс задач (1), (2), для которого предложены и обоснованы многошаговые методы второго порядка. Отметим, что ранее разработанные неявные методы для таких задач либо неустойчивы, либо требуют значительных вычислительных затрат.

В первом параграфе приведен обзор литературы по решению систем линейных ИДУ, показаны сложности исследования таких уравнений, предложены новые многошаговые методы для численного решения систем линейных ИДУ, доказана сходимость методов, получена оценка скорости сходимости. Во втором параграфе построены области устойчивости разработанных методов. В третьем параграфе приведены численные расчеты тестовых задач решения системы ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной.

Третья глава посвящена численному решению сингулярных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений при моделировании в пограничных средах «жидкость-газ». В первом и втором параграфах приведено описание особых точек и задач о p -лапласиане, приведен обзор литературы по этой теме. Предлагается записать данную задачу в виде сингулярного ИДУ, для которого разработаны новые многошаговые методы численного решения. Далее в третьем параграфе главы 3 приведено детальное описание программной реализации для модели пузыря в жидкости, разработанной на основе модели и алгоритма, рассмотренных в втором параграфе. Автором был реализован программный комплекс в среде MATLAB.

Четвертая глава посвящена численным расчетам систем ИДУ, возникающих при моделировании электрических цепей. В первом параграфе приведены вспомогательные сведения из теории электроцепей. Во втором параграфе описаны общие принципы моделирования электрических цепей. Третий параграф содержит качественные исследования многоконтурных цепей (трех- и четырехконтурной цепей). Показано, что рассматриваемые в диссертации математические

модели трех- и четырехконтурных электрических цепей удовлетворяют условиям теоремы существования единственного решения в главе 1. Для численного решения этих задач можно с успехом применить методы, предлагаемые в главе 2.

Сокращения и обозначения

В диссертации используются следующие сокращения:

ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения;

ДАУ – дифференциальные алгебраические уравнения;

ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение;

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений;

ПК – программный комплекс.

Математические обозначения:

буквы i, j, k, m, n, l – целые, положительные числа;

строчные греческие буквы α, β, γ используются для обозначения скалярных величин из множества вещественных чисел R^1 ;

символ \top используется для обозначения транспонирования матрицы.

Обозначения при описании математических моделей:

r – радиус пузыря;

μ – химический потенциал;

v – скорость жидкости;

L, R, C – индуктивность, сопротивление и емкость, соответственно, в электрических цепях;

Символ \square лежит в конце доказательства.

1 Достаточные условия существования единственного и дифференцируемого решения

В диссертации рассматриваются системы ИДУ, коэффициенты которых являются либо матрицами, либо функциями. Поэтому начнем данную главу с сведений из теории матриц, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений типа Вольтерра. Эти результаты позволяют формулировать теоремы существования и единственности решения, выяснять свойства решений уравнений.

1.1 Матричные пучки и полиномы

Определение 1.1.1. [55] Пусть заданы $(m \times n)$ -матрицы A , B с постоянными элементами. Выражение $\lambda A + B$, где λ — скалярный параметр (в общем случае комплексный), будем называть пучком матриц A , B .

Определение 1.1.2. [55] Пучок матриц $\lambda A + B$, называется регулярным, если существует λ_0 такое, что $\det(\lambda_0 A + B) \neq 0$. В противном случае (матрицы не являются квадратными или $\det(\lambda A + B) \equiv 0$) пучок называется сингулярным.

Определение 1.1.3. [55] Пусть заданы $(n \times n)$ -матрицы A , B с постоянными элементами. Выражение

$$\xi(\lambda) = \det(\lambda A + B)$$

будем называть характеристическим многочленом пучка $\lambda A + B$.

Определение 1.1.4. [28] $(k \times k)$ -матрица N называется нильпотентной, если $N^q = 0$ для некоторого целого положительного числа $q \leq k$.

Лемма 1.1.1. [28] Пусть пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен. Тогда существуют невырожденные $(n \times n)$ -матрицы P и Q с постоянными элементами такие, что

$$P(\lambda A + B)Q = \lambda \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & E_k \end{pmatrix},$$

где $m + l + k = n$, N, M – нильпотентные матрицы размерностей $(k \times k)$ и $(l \times l)$, соответственно.

Любую постоянную матрицу умножением справа и слева на постоянные невырожденные матрицы P и Q можно привести к диагональной форме. С пучками переменных матриц дело обстоит значительно сложнее.

Определение 1.1.5. [54] Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг - степень» на отрезке $[0,1]$, если выполнены условия:

1. $\text{rank } A(t) = r = \text{const } \forall t \in [0,1]$;
2. $\det[\lambda A(t) + B(t)] = a_0(t)\lambda^r + \dots, a_0(t) \neq 0 \forall t \in [0,1]$.

Приведем несколько примеров.

Пример 1.1.1. Рассмотрим пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ t^2 & t \end{pmatrix},$$

$$\text{rank } A(t) = \text{const} = 2 \quad \forall t \in [0,1].$$

Найдем $\det[\lambda A(t) + B(t)]$:

$$\begin{aligned} \det[\lambda A(t) + B(t)] &= \det \left(\lambda \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ t^2 & t \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \lambda t & \lambda - 1 \\ t^2 + \lambda & t \end{pmatrix} = \\ &= -\lambda^2 - \lambda + t^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\det[\lambda A(t) + B(t)] = 2 = \text{rank } A(t) = \text{const } \forall t \in [0,1],$$

поэтому рассматриваемый пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг - степень» на отрезке $[0,1]$.

Пример 1.1.2. Рассмотрим пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$\text{rank } A(t) = \begin{cases} 2, & \text{если } t \neq 0, \\ 1, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Найдем $\det[\lambda A(t) + B(t)]$:

$$\begin{aligned} \det[\lambda A(t) + B(t)] &= \det \left(\lambda \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda t + 1 & t \\ \lambda + 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 t + \lambda(1 - t) - t. \end{aligned}$$

$$\det[\lambda A(t) + B(t)] = \begin{cases} 2, & \text{если } t \neq 0, \\ 1, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

В этом случае, несмотря на то, что

$$\text{rank } A(t) = \det[\lambda A(t) + B(t)] \quad \forall t \in [0,1],$$

ранги $A(t)$ и $\det[\lambda A(t) + B(t)]$ являются переменными, поэтому пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ не удовлетворяет критерию «ранг - степень».

Пример 1.1.3. Рассмотрим пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{rank } A(t) = \text{const} = 1 \quad \forall t \in [0,1].$$

Найдем $\det[\lambda A(t) + B(t)]$:

$$\begin{aligned} \det[\lambda A(t) + B(t)] &= \det \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda + t^2 & \lambda + 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\det[\lambda A(t) + B(t)] = 0 \neq \text{rank } A(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1],$$

поэтому рассматриваемый пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ не удовлетворяет критерию «ранг - степень» на отрезке $[0,1]$. Данный пучок является сингулярным.

Лемма 1.1.2. [54] *Если пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг - степень» на всем отрезке $[0,1]$ и элементы $A(t), B(t)$ принадлежат классу функций C^p , то существуют невырожденные матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ такие, что*

$$P(t)A(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t)B(t)Q(t) = \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем изложении E_m – единичная матрица размерности m .

Определение 1.1.6. [16] Матричный полином $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$, где λ – скаляр, y – k -мерный вектор, $y \in U = \{y : \|y\| \leq \rho\}$, имеет простую структуру в области U , если выполнены условия:

- 1) $\text{rank } A(y) = \text{const} = l \forall y \in U$;
- 2) $\text{rank}[A(y)|B(y)] = l + m = \text{const} \forall y \in U$;
- 3) $\det(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)) =$

$$= a_0(y)\lambda^{2l+m} + \dots + a_{2l+m}(y); a_0(y) \neq 0 \forall y \in U.$$

Лемма 1.1.3. [55] Если задан матричный пучок блочного вида

$$\lambda \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ – $(m \times n)$ -матрицы, $B_2(t)$ – $((n - m) \times n)$ -матрица, 0 – нулевая матрица размером $((n - m) \times n)$, то он удовлетворяет критерию «ранг - степень» тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Лемма 1.1.4. [17] Если матричный полином $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$ имеет простую структуру при любом $y \in U$ и элементы матриц $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$ принадлежат классу $C^r(U)$, то существуют невырожденные для любого $y \in U$ матрицы $P(y)$ и $Q(y)$ с элементами из класса $C^r(U)$ такие, что

$$P(y)(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y))Q(y) = \\ = \lambda^2 \begin{pmatrix} E_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} J_1(y) & 0 & J_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(y) & C_2(y) & 0 \\ C_3(y) & C_4(y) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix},$$

где E_m, E_l, E_{n-m-l} – единичные матрицы размерности m, l и $n - m - l$, соответственно. $J_1(y), J_2(y), C_i(y), i = \overline{1,4}$ – матрицы подходящей размерности.

Следствие 1. Если матричный полином $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$ имеет простую структуру, то матрица $P(y)(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y))$ имеет блочный вид

$$P(y)(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)) = \lambda^2 \begin{pmatrix} A_1(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B_1(y) \\ B_2(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(y) \\ C_2(y) \\ C_3(y) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где $A_1(y), B_1(y), C_1(y) - (l \times n)$ -матрицы, $B_2(y), C_2(y) - (m \times n)$ -матрицы, $C_3(y) - ([n-l-m] \times n)$ -матрица, $0 -$ нулевые блоки соответствующих размеров.

Лемма 1.1.5. [17] Если матрица блочного вида (1.1) имеет простую структуру, то

$$\det \begin{pmatrix} A_1(y) \\ cB_2(y) \\ dC_3(y) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall y \in U, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Доказательства лемм 1.1.4 и 1.1.5 при $q = 1$ (q – размерность вектора y) приведены в [17]. При $q \geq 2$ доказательство проводится аналогично.

1.2 Достаточные условия существования единственного решения системы интегро-дифференциальных уравнений

При построении математических моделей сложных природных и технических процессов описывающие их системы уравнений могут включать в себя:

- обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ);
- алгебраические уравнения;
- интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода.

Как правило, эти уравнения взаимосвязаны по части переменных. Объединяя их, получим систему ИДУ вида (1) с тождественно вырожденной матрицей перед производной искомой вектор-функции. Напомним ее вид

$$A(t)x'(t) + F(t, x(t)) + \int_0^t G(t, s, x(s))ds = f(t), \quad t \in [0, 1].$$

Элементы матрицы $A(t)$ и вектор-функций $F(t, x)$, $G(t, s, x)$, $f(t)$ предполагаются достаточно гладкими.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать любую непрерывно-дифференцируемую вектор-функцию $x(t)$, которая обращает (1) в тождество и удовлетворяет начальному условию (2). Задача (1), (2) может иметь множество решений, а может не иметь решения.

В монографии [55] проведено исследование задачи (1), (2) на предмет существования единственного решения. Эти исследования были проведены с использованием свойств матричных пучков. В статье [17] сформулированы достаточные условия существования единственного решения задачи (1), (2) для линейного случая. Данный результат был получен на основе определенных свойств матричных полиномов.

Перед формулировкой достаточных условий о существовании единственного решения задачи (1), (2) приведем ряд вспомогательных сведений.

Определение 1.2.1. [7] Матрица, обозначаемая как $A^-(y)$, называется полубратной к матрице $A(y)$, если она удовлетворяет уравнению

$$A(y)A^-(y)A(y) = A(y).$$

Обозначая $V(y) = E - A(y)A^-(y)$, получим

$$V(y)A(y) \equiv 0. \tag{1.2}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.2.1. *Если матричный полином $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$ имеет простую структуру, то матричный пучок*

$$\lambda[A(y) + V(y)B(y)] + [B(y) + V(y)C(y)]$$

удовлетворяет критерию «ранг-степень».

Доказательство. Отметим, что умножение слева и справа матричного пучка на невырожденные матрицы не меняет свойств этого пучка.

Матричный пучок $\lambda[A(y) + V(y)B(y)] + [B(y) + V(y)C(y)]$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \lambda[A(y) + V(y)B(y)] + [B(y) + V(y)C(y)] = \\ & = P^{-1}(y)\{P(y)(\lambda[A(y) + V(y)B(y)] + [B(y) + V(y)C(y)]Q(y))\}Q^{-1}(y), \end{aligned}$$

где $P(y)$ и $Q(y)$ – матрицы из леммы 1.1.4.

Достаточно просто показать, что матрица $P(y)V(y)P^{-1}(y)$ имеет блочный вид

$$P(y)V(y)P^{-1}(y) = \begin{pmatrix} 0 & s_1(y) & s_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix}.$$

С учетом этой формулы и блочного представления матриц

$$P(y)A(y)Q(y), P(y)B(y)Q(y), P(y)C(y)Q(y)$$

(см. лемму 1.1.4) пучок матриц

$$\begin{aligned} & P(y)(\lambda[A(y) + V(y)B(y)] + [B(y) + V(y)C(y)]Q(y)) = \\ & = \lambda\{P(y)A(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)B(y)Q(y))\} + \end{aligned}$$

$$+\{P(y)B(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)C(y)Q(y))\}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} & \lambda\{P(y)A(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)B(y)Q(y))\}+ \\ & +\{P(y)B(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)C(y)Q(y))\} = \\ & = \lambda \left\{ \begin{pmatrix} E_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_1(y) & s_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(y) & 0 & J_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} + \\ & + \left\{ \begin{pmatrix} J_1(y) & 0 & J_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_1(y) & s_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(y) & C_2(y) & 0 \\ C_3(y) & C_4(y) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix} \right\} = \\ & = \lambda \begin{pmatrix} E_l & s_1(y) & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(y) + s_1(y)c_3(y) & s_1(y)c_4(y) & J_2(y) \\ c_3(y) & E_m + c_4(y) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что данный пучок удовлетворяет критерию «ранг-степень».

Далее введем обозначения

$$B(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}, \quad F' = \frac{\partial}{\partial t} F(t,x), \quad C(t,x) = \frac{\partial G(t,t,x)}{\partial x}, \quad G' = \frac{\partial}{\partial t} G(t,s,x).$$

В терминах матричных пучков в монографии [55] сформулированы достаточные условия существования единственного решения задачи (1), (2). Приведем этот результат.

Теорема 1.2.1. [55] Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:

- 1) $A(t), B(t,x) \in C^m(T)$, $G(t,s,x) \in C^m(T \times T \times U)$, $m \geq 1$, $T = [0,1]$;
- 2) $\text{rank } A(t) = \text{const} = r \quad \forall t \in [0,\gamma]$, $\gamma > 0$;

$$3) \operatorname{rank} A(0) = \operatorname{rank}(A(0)|f(0) - F(0, x_0));$$

$$4) \det[\lambda A(0) + B(0, x_0)] = a_0(0, x_0)\lambda^r + \dots, \quad a_0 \neq 0.$$

Тогда существует отрезок $[0, \gamma]$, на котором определено единственное решение задачи (1), (2), где $[0, \gamma] \subset T$

Ниже мы приведем достаточные условия существования единственного решения задачи (1), (2) в терминах матричных многочленов. Данный результат является более общим, его можно применять и для систем (1) с матричным пучком $\lambda A(t) + B(t, x)$, сингулярным для всех (x, t) из области определения.

Теорема 1.2.2. Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:

1) элементы матрицы $A(t)$ и вектор-функций $F(t, x)$, $G(t, s, x)$, $f(t)$ дважды непрерывно-дифференцируемы в окрестности точки $(0, x_0)$;

$$2) \operatorname{rank}(A(0) + VA'(0) + VB(0, x_0)) = \operatorname{rank}(A(0) + VA'(0) + VB(0, x_0)|f(0) + VF'(0) - F(0, x_0) - VF'(0, x_0) - VG(0, 0, x_0));$$

3) в окрестности точки $(0, x_0)$

$$\operatorname{rank} A(t) = l = \operatorname{const}, \quad \operatorname{rank}(A(t)|B(t, x)) = l + m = \operatorname{const}$$

и матричный полином $\lambda^2 A(t) + \lambda B(t, x) + C(t, x)$ имеет простую структуру;

4) матрица $P(t, x)$ в лемме 1.1.4 не зависит от x , т.е. $P(t, x) = P(t)$.

Тогда существует отрезок $[0, \gamma]$, на котором определено единственное решение задачи (1), (2).

Доказательство этого результата основано на том, что действуя на исходную систему дифференциальным оператором $E + d/dtV(t)$, где $V(t)$ – матрица из формулы (1.2), и, учитывая леммы 1.1.4, 1.1.5, мы попадаем в условия теоремы 1.2.1.

Прокомментируем условия теоремы.

Первое условие – стандартное условие, накладываемое на определенную гладкость входных данных.

Второе условие – это условие согласованности начальных данных и правой части системы (1). Они вытекают из теоремы Кронекера – Капелли. Данные условия являются необходимыми.

Третье условие означает, что в окрестности $(0, x_0)$ отсутствуют сингулярные точки. Если это условие нарушено в отдельных точках, то через них может проходить несколько решений. Если это условие нарушено во всей окрестности, то о существовании решения мы ничего сказать не можем. Данное условие не является необходимым.

Для иллюстрации приведем несколько примеров.

Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}(t, u(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} k_{11}(t, s) & k_{12}(t, s) \\ k_{21}(t, s) & k_{22}(t, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Положим

$$k_{11}(t, s) = k_{22}(t, s) \equiv 1, \quad k_{21}(t, s) = k_{12}(t, s) \equiv 0,$$

$$b_1(t, u(t)) \equiv 0, \quad a_{11}(t) = -t^2/2.$$

Тогда однородная задача с нулевыми начальными данными имеет множество решений вида $u(t) = ct$, $v(t) = 0$, где c – произвольное число. В этом случае в точке $t = 0$ нарушено третье условие теоремы.

Если положить

$$k_{11}(t, s) = k_{22}(t, s) \equiv 0, \quad k_{21}(t, s) = k_{12}(t, s) \equiv 1,$$

$$b_1(t, u(t)) \equiv 0, \quad a_{11}(t) \equiv 0, \quad f_1(t) \equiv 0,$$

то такая задача имеет единственное, не зависящее от начальных данных, решение

$$u(t) = f_2'(t), v(t) = -(a_{11}(t)f_2'(t) + b_1(t, f_2'(t)))'.$$

В этом случае матричный полином $\lambda^2 A(t) + \lambda B(t, x) + C(t, x)$ не удовлетворяет третьему условию теоремы. В самом деле, степень многочлена

$$\det(\lambda^2 A(t) + \lambda B(t, x) + C(t, x)) = -1$$

равна нулю при любых функциях $b_1(t, u(t))$ и $a_{11}(t)$.

2 Численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной

В этой главе предложены и обоснованы численные многошаговые методы для решения ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной, построены области устойчивости предлагаемых методов.

2.1 Многошаговые методы решения систем интегро-дифференциальных уравнений

Вначале приведем численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра I рода, которые основаны на явных квадратурных формулах Адамса (см., напр., [43;95])

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1], \quad 0 \leq s \leq t \quad (2.1)$$

с достаточно гладкими ядром $K(t,s)$ и $f(t)$ с условиями

$$K(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1], \quad f(0) = 0.$$

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih$, $i = \overline{1,N}$, $h = 1/N$ и пусть известны значения $y_i = y(t_i)$. Тогда

$$\int_0^{t_{i+1}} y(s)ds = \int_0^{t_{k+1}} y(s)ds + \sum_{j=k+1}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} y(s)ds \approx$$

$$\begin{aligned}
&\approx \int_0^{t_{k+1}} L_{k+1}^0(y_0, y_1, \dots, y_k, s) ds + \sum_{j=k+1}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{k+1}^j(y_{j-k}, y_{j-k+1}, \dots, y_j, s) ds = \\
&= h \sum_{l=0}^k \beta_l y_l + \sum_{j=k+1}^i h \sum_{l=0}^k \gamma_l y_{j-l} = h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1, l} y_l, \tag{2.2}
\end{aligned}$$

где $L_{k+1}^i(y_{i-k}, y_{i-k+1}, \dots, y_i, t)$ – интерполяционный полином степени k , проходящий через точки $(y_{i-k}, t_{i-k}), (y_{i-k+1}, t_{i-k+1}), \dots, (y_i, t_i)$. Выпишем коэффициенты γ_l (см., напр., [43]) в табл. 2.1:

Таблица 2.1

Коэффициенты γ_l

k	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	Общий множитель
1	1	-	-	-	-	-	1
2	3	-1	-	-	-	-	1/2
3	23	-16	5	-	-	-	1/12
4	55	-59	37	-9	-	-	1/24
5	1901	-2774	2616	-1274	251	-	1/720
6	4277	-7923	9982	-7298	-2877	-475	1/1440

Приведем коэффициенты $\omega_{i+1, l}$ для $k = \overline{0, 3}$ (см., напр., [43; 95])

$$\omega_{i+1, l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \omega_{i+1, l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 \\ 9 & 5 & 11 & 23 \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 12 & 7 & 23 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 64 & -32 & 64 \\ 55 & 5 & 5 & 55 \\ 55 & -4 & 42 & -4 & 55 \\ 55 & -4 & 33 & 33 & -4 & 55 \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 24 & -4 & 55 \\ 55 & -4 & 33 & 24 & 24 & 33 & -4 & 55 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при приближенном вычислении интегралов для нечетных k коэффициент $\omega_{i+1,0} = 0$, поэтому нам не потребуется начальное значение x_0 (см., напр., [43; 95]) и в этих таблицах при нечетных k первый нулевой столбец опущен.

Отметим, что из самих формул приближенного вычисления интеграла (2.2) следует рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} \omega_{i+1,j} = \omega_{i,j}, j = \overline{0, i-k-1}, \\ \omega_{i+1,i-k} = \omega_{i,i-k} + \gamma_k, \omega_{i+1,i-k-1} = \omega_{i,i-k-1} + \gamma_{k-1}, \dots, \omega_{i+1,i} = \omega_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Приближенные методы решения интегрального уравнения (2.1), основанные на явных квадратурных формулах Адамса, имеют вид

$$h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \quad i = \overline{k, N-1}, \quad (2.4)$$

где $K_{i+1,l} = K(t_{i+1}, t_l)$, $f_{i+1} = f(t_{i+1})$, $x_l \approx x(t_l)$, $x(t_l)$, $h = 1/N$, $\omega_{i+1,l}$ называются весами квадратурной формулы.

Предлагается, что начальные значения x_0, x_1, \dots, x_{k-1} заранее вычислены с достаточной точностью.

В [61; 95] показано, что k -шаговые методы (2.4) сходятся к точному решению задачи (2.1) с порядком $O(h^{k+1})$ только при $k \leq 5$, а при $k > 5$ данные методы являются неустойчивыми.

На протяжении многих десятилетий для определения устойчивости методов (2.4) служит тестовое уравнение с $K(t,s) \equiv 1$

$$\int_0^t x(s)ds = f(t), t \in [0,1], f(0) = 0. \quad (2.5)$$

Если применить метод (2.4) к тестовому уравнению (2.5), получим

$$h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} x_l = f_{i+1}. \quad (2.6)$$

Вычтем из i -ой строки (2.6) $(i-1)$ -ю строку, получим

$$h \sum_{j=0}^{k+1} \gamma_j x_{i-j} = f_{i+1} - f_i. \quad (2.7)$$

Характеристическое уравнение для (2.7) является полиномом степени $k+1$

$$\sum_{j=0}^{k+1} \gamma_j p^{k-j} = 0, \quad (2.8)$$

При $k \leq 5$ корни полинома (2.8) лежат в единичном круге, а при $k > 5$ по крайней мере один из корней по модулю больше единицы, и $\|x_l\| \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. В работах [61], [95] также показано, что численные методы решения

задачи (2.1), основанные на ряде квадратурных формул высокого порядка, также порождают неустойчивые процессы.

Рассмотрим начальную задачу для ИДУ с нелинейным ядром вида

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))ds = f(t), t \in [0,1], \det A(t) \equiv 0, \quad (2.9)$$

с условием

$$x(0) = x_0,$$

где $A(t), B(t), K(t,s)$ – вектор-функции, $f(t), x(t)$ – n -мерные известная и искомая вектор-функции. В [56] приведена библиография по этой тематике, сформулированы достаточные условия существования единственного решения данных задач и предложены k -шаговые методы решения. Эти методы являются полужявными (полуявными) и основаны на формуле дифференцирования назад для первых двух слагаемых и на явном методе Адамса для интегральной части (см. формулу (2.4)). Предложенные алгоритмы имеют вид

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i+1-j} + hB_{i+1}x_{i+1} + h^2 \sum_{j=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = hf_{i+1}, i = \overline{k, N}, \quad (2.10)$$

где α_i – коэффициенты формулы дифференцирования назад, а $\omega_{i+1,l}$ – веса квадратурной формулы явного метода Адамса. Необходимыми условиями применения данного алгоритма является регулярность матричного пучка $\lambda A(t) + B(t)$. Данные алгоритмы будут неустойчивыми для ИУВ первого рода при $k \geq 2$.

Рассмотрим линейный случай системы (2.9)

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), t \in [0,1], \det A(t) \equiv 0, \quad (2.11)$$

с условием

$$x(0) = x_0, \quad (2.12)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $K(t,s)$ – $(n \times n)$ -матрицы, $f(t)$, $x(t)$ – n -мерные известная и искомая вектор-функции.

Ниже мы приведем достаточные условия существования единственного достаточно гладкого решения задачи (2.11), (2.12) и обоснуем многошаговые методы ее численного решения.

Из определения полуобратной матрицы (см., напр., [7]) следует, что если мы обозначим $V(y) = E - A(y)A^{-1}(y)$, то получим

$$V(y)A(y) \equiv 0.$$

Частный случай теоремы 1.2.2 для линейного случая.

Теорема 2.1.1. [17] Пусть для задачи (2.11), (2.12) выполнены условия:

- 1) $A(t), B(t), f(t) \in C_{[0,1]}^{p+1}$, $K(t,s) \in C_{\Delta}^{p+1}$, $\Delta = \{t,s : 0 \leq s \leq t \leq 1\}$, $p \geq 2$;
- 2) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C$ имеет простую структуру;
- 3) $\text{rank } \Omega = \text{rank}(\Omega|b)$,

$$\text{где } \Omega = \begin{pmatrix} 0 & A(0) \\ A(0) & A'(0) + B(0) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} f(0) - B(0)x_0 \\ f(0) - (B'(0) + K(0,0)x_0) \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (2.11), (2.12) имеет на отрезке $[0,1]$ единственное решение $x(t)$ из класса $C_{[0,1]}^p$.

В статье [17] в теореме (2.1.1) условие 3 имело вид $\text{rank } A(0) = \text{rank}(A(0)|f(0) - B(0))$, но его недостаточно для выделения единственного решения и мы его модифицировали. Условие $\text{rank } A(0) = \text{rank}(A(0)|f(0) - B(0))$ достаточно, если матричный пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет условию «ранг-степень».

Третье условие теоремы гарантирует разрешимость системы относительно $x'(t)|_{t=0}$. Второе условие теоремы необходимо для отсутствия сингулярных точек, т.е. точек, в которых система не имеет решения или имеет множество решений на отрезке $[0,1]$. Третье условие является необходимым для того, чтобы

система имела решение, а второе и третье условия гарантируют его единственность.

Лемма 2.1.1. [43] Пусть r -мерные векторы θ_i вычисляются по правилу

$$\theta_i = \hat{C}\theta_{i-1} + h \sum_{l=1}^{i-1} D_{i,l}\theta_l + F_i, \quad i = \overline{2, N}, \quad h = 1/N, \quad (2.13)$$

где векторы $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}$ заданы, $\|D_{i,l}\| \leq L_1 < \infty$, $\|F_i\| \leq L_2 < \infty$, собственные значения матрицы \hat{C} удовлетворяют условию $|\lambda_j| \leq 1$, и на границе единичного круга нет кратных собственных чисел.

Тогда справедлива оценка

$$\|\theta_i\| \leq L_3 \|\Psi_i\|, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad L_3 < \infty,$$

где $\|\Psi_i\| = \max\{\|F_i\|, \|\theta_1\|\}$.

В данном разделе приведены и обоснованы многошаговые методы численного решения задачи (2.11), (2.12), которые удовлетворяют условиям теоремы 2.1.1.

Опишем многошаговые методы для решения задачи (2.11), (2.12). Зададим на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку $t_i = ih$, $i = \overline{1, N}$, $h = 1/N$. Обозначим $A_i = A(t_i)$, $K_{ij} = K(t_i, t_j)$, $f_i = f(t_i)$, $x_i = x(t_i)$. Тогда общие многошаговые методы имеют вид

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j+1} + h B_{i+1} \sum_{j=0}^k \beta_j x_{i+1-j} + h^2 \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = h f_{i+1}. \quad (2.14)$$

Предполагается, что при реализации данных алгоритмов стартовые значения x_1, x_2, \dots, x_{k-1} вычислены заранее достаточно точно и $x_0 = x(0)$.

Формулы (2.14) могут быть:

1. явными при $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$, $\omega_{i+1,i+1} = 0$;

2. полуявными при $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\omega_{i+1,i+1} = 0$ или $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\omega_{i+1,i+1} \neq 0$;
3. неявными при $\alpha_0 \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\omega_{i+1,i+1} \neq 0$.

В силу вырожденности матрицы $A(t)$ явные методы для рассматриваемых задач применять нельзя. Полуявные методы также неприменимы для задач (2.11), (2.12), удовлетворяющих условиям теоремы 1.1.4, в силу того, что матрицы $(\alpha_0 A_{i+1} + h\beta_0 B_{i+1})$ или $(\alpha_0 A_{i+1} + h^2 \omega_{i+1,i+1} K_{i+1,i+1})$ могут быть вырожденными. Напомним (см. теорему 1.2.2 и лемму 1.2.1), что рассматриваемый класс задач включает в себя и интегральные уравнения Вольтера первого рода с ядром на диагонали не равным нулю. Для таких уравнений многие неявные многошаговые методы порождают неустойчивый процесс [43; 95].

Для численного решения рассматриваемых задач мы предлагаем модифицированные методы, основанные на явных формулах Адамса, а именно, для вычисления интегрального слагаемого в уравнении (2.11) будем использовать $k - 1$ -шаговый явный метод Адамса. Выражение $A(t)x'(t) + B(t)x(t)$ в точке $t = t_{i+1}$ будем находить по экстраполяционным формулам. Будем вычислять x_{i+1} как значение интерполяционного полинома степени $k - 1$, проходящего через точки $(x_i, t_i), (x_{i-1}, t_{i-1}), \dots, (x_{i-k+1}, t_{i-k+1})$ в точке $t = t_{i+1}$, т.е.

$$x_{i+1} = L_{k-1}(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k+1}, t_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j x_{i-j}.$$

Аналогично, $x'_{i+1} \approx x'(t)|_{t=t_{i+1}}$ – значение производной интерполяционного полинома степени k , проходящего через точки $(x_i, t_i), (x_{i-1}, t_{i-1}), \dots, (x_{i-k}, t_{i-k})$ в точке $t = t_{i+1}$, т.е.

$$x'_{i+1} = L'_k(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}, t_{i+1}) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j}.$$

Таким образом, предложенные многошаговые методы имеют вид

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j} + hB_{i+1} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j x_{i-j} + h^2 \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = hf_{i+1}. \quad (2.15)$$

Коэффициенты β_j при $k = \overline{0,5}$ приведены в табл. 2.2:

Таблица 2.2

Коэффициенты β_j

k	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	1	-	-	-	-	-
1	2	-1	-	-	-	-
2	3	-3	1	-	-	-
3	4	-6	4	-1	-	-
4	5	-10	10	-5	1	-
5	6	-15	20	-15	6	-1

Коэффициенты α_j при $k = \overline{1,6}$ приведены в табл. 2.3:

Таблица 2.3

Коэффициенты α_j

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	Общий множитель
1	1	-1	-	-	-	-	-	1
2	5	-8	3	-	-	-	-	1/2
3	26	-57	42	-11	-	-	-	1/6
4	127	-414	534	-322	75	-	-	1/12
5	522	-1755	2540	-1980	810	-137	-	1/60
6	669	-2637	4745	-4920	3015	-1019	147	1/60

Непосредственные вычисления показывают, что корни характеристических уравнений

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j p^j = 0 \quad (2.16)$$

при $k \leq 6$ лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней, а при $k \geq 7$ есть хотя бы один корень, по модулю больший единицы.

Аналогично для характеристических уравнений [19]

$$\sum_{j=0}^k \beta_j p^j = 0 \quad (2.17)$$

и для уравнений [43; 95]

$$\sum_{j=0}^k \gamma_j p^j = 0 \quad (2.18)$$

при $k \leq 5$ корни лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней.

Теорема 2.1.2. Пусть для задачи (2.11), (2.12) выполнены условия теоремы 2.1.1. Тогда справедлива оценка $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^k) \forall j = \overline{k, N}$, где x_j определены из системы (2.15), $\|x_l - x(t_l)\| \leq Kh^k$, $K < \infty$, $l = \overline{0, k-1}$, при $k \leq 5$.

Доказательство. В силу леммы 1.1.2 и второго условия теоремы 2.1.1 существует невырожденная матрица $P(t)$ с элементами из $C_{[0,1]}^{k+1}$ такая, что

$$P_{i+1}A_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i+1}^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{i+1}B_{i+1} = \begin{pmatrix} B_{i+1}^1 \\ B_{i+1}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

где $\text{rank}(A_{i+1}^1) = r = \text{const}$, $\text{rank} \begin{pmatrix} A_{i+1}^1 \\ B_{i+1}^2 \end{pmatrix} = r + l = \text{const}$ и $P_{i+1} = P(t_{i+1})$

Рассмотрим численный метод (2.15). Умножая (2.15) на матрицу P_{i+1} , получим

$$\begin{pmatrix} A_{i+1}^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x_{i-j} + h \begin{pmatrix} B_{i+1}^1 \\ B_{i+1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^k \beta_j x_{i-j} +$$

$$+ h^2 \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} \begin{pmatrix} K_{i+1,l}^1 \\ K_{i+1,l}^2 \\ K_{i+1,l}^3 \end{pmatrix} x_l = \begin{pmatrix} g_{i+1}^1 \\ g_{i+1}^2 \\ g_{i+1}^3 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\text{где } P_{i+1}A_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i+1}^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{i+1}B_{i+1} = \begin{pmatrix} B_{i+1}^1 \\ B_{i+1}^2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B^1 & B^2 & B^3 \\ B^4 & B^5 & B^6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{i+1}K_{i+1,l} = \begin{pmatrix} K_{i+1,l}^1 \\ K_{i+1,l}^2 \\ K_{i+1,l}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^1 & K^2 & K^3 \\ K^4 & K^5 & K^6 \\ K^7 & K^8 & K^9 \end{pmatrix},$$

$$P_{i+1}f_{i+1} = \begin{pmatrix} g_{i+1}^1 \\ g_{i+1}^2 \\ g_{i+1}^3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\epsilon_i = x_i - x(t_i)$. Получим уравнения ошибки метода

$$A_{i+1}^1 \sum_{j=0}^k \alpha_j \epsilon_{i-j} + h B_{i+1}^1 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \epsilon_{i-j} + h^2 \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l}^1 \epsilon_l = h \delta_{i+1}, \quad (2.20)$$

$$B_{i+1}^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \epsilon_{i-j} + h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l}^2 \epsilon_l = \varphi_{i+1}, \quad (2.21)$$

$$h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l}^3 \epsilon_l = \rho_{i+1}. \quad (2.22)$$

Из [6] вытекает, что

$$\|\delta_{i+1}\| \leq L_1 h^k, \quad \|\varphi_{i+1}\| \leq L_2 h^k, \quad \|\rho_{i+1}\| \leq L_3 h^k, \quad L_1, L_2, L_3 = \text{const} < \infty. \quad (2.23)$$

Вычтем из $(i+1)$ -го уравнения (2.22) (i) -ое уравнение. Умножим эту разность на h^{-1} и введем обозначение

$$\Delta K_{i+1,l}^3 = K_{i+1,l}^3 - K_{i,l}^3, \quad \Delta \rho_{i+1} = \rho_{i+1} - \rho_i.$$

Эти равенства перепишем в виде

$$\sum_{j=0}^k \gamma_j K_{i+1,i-j}^3 \epsilon_{i-j} + \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} \Delta K_{i+1,l}^3 \epsilon_l = h^{-1} \Delta \rho_{i+1}, \quad i = \overline{k, N-1}.$$

По первому условию теоремы (достаточная гладкость входных данных), справедливо представление

$$\Delta K_{i+1,l}^2 = h M_{i+1,l}^2, \quad \|M_{i+1,l}^2\| \leq M^2 < \infty, \quad i = \overline{k, N-1}, \quad (2.24)$$

$$\Delta K_{i+1,l}^3 = h M_{i+1,l}^3, \quad \|M_{i+1,l}^3\| \leq M^3 < \infty, \quad i = \overline{k, N-1}, \quad (2.25)$$

где M^3, M^2 – положительные константы.

Используя стандартные оценки для приближенного вычисления определенного интеграла [6] и учитывая первое условие теоремы, получим

$$\|h^{-1} \Delta \rho_{i+1}\| \leq L_4 h^k, \quad L_4 = \text{const} < \infty, \quad i = \overline{k, N}. \quad (2.26)$$

Объединим (2.20)-(2.22) в одну систему. Стандартным образом [53] перепишем полученные соотношения в виде одношаговых методов. С учетом того, что корни характеристических полиномов (2.16)-(2.18) лежат в единичном круге и на границе круга нет кратных корней при $k \leq 5$ и с учетом оценок (2.23)-(2.26) по лемме 2.1.1 вытекает

$$\|x_j - x(t_j)\| = \|\epsilon_j\| = O(h^k), \quad j = \overline{k, N}$$

□

Замечание 2.1.1. Как было отмечено выше, при нарушении второго условия теоремы 2.1.1 в отдельных точках решение задачи (2.11), (2.12) может не существовать.

Если второе условие данной теоремы нарушено на всем отрезке, то в общем случае методы (2.15) неприменимы.

Приведем пример [55]. Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \quad x(t) = (u(t), v(t))^{\top}, \quad f(t) = (g(t), q(t))^{\top},$$

$K(t, \tau)$ – тождественно нулевая матрица.

В этом случае мы имеем дифференциально-алгебраическое уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(t) \\ q(t) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

При достаточно гладких $g(t)$ и $q(t)$ этот пример имеет также достаточно гладкое единственное решение

$$\begin{cases} u = q(t) - tv(t), \\ v = q(t)' - g(t). \end{cases}$$

Если для численного решения данного примера применить предложенные алгоритмы, то на каждом шаге интегрирования получим СЛАУ.

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_0 t_{i+1} \\ h\beta_0 & h\beta_0 t_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} g_{i+1} - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j u_{i-j} \\ q_{i+1} - \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j v_{i-j} \end{pmatrix},$$

которая либо не имеет решения, либо имеет множество решений.

У данного примера матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + K(t, t)$ не имеет простой структуры. В самом деле

$\text{rank } A(t) = 1 \forall t,$

$$\text{rank}(A(t)|B(t)) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} = 2, \text{ однако } \begin{pmatrix} \lambda & \lambda t \\ \mu & \mu t \end{pmatrix} \equiv 0.$$

2.2 Области устойчивости

Рассмотрим тестовую задачу

$$x(t)' + \lambda x(t) + \mu \int_0^t x(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x_0. \quad (2.28)$$

Подставляя в (2.28) значение $t = 0$ и учитывая начальное условие, получим

$$x'(0) = f(0) - \lambda x_0. \quad (2.29)$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $x(t) = C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t}$, где q_1 и q_2 являются корнями уравнения $q^2 + \lambda q + \mu = 0$. В дальнейшем изложении будем предполагать, что параметры λ и μ неотрицательны и хотя бы один из этих параметров много больше нуля.

Если $\lambda \gg 0$ и $\mathcal{D} = \lambda^2 - 4\mu > 0$, то $q_{1,2} < 0$;

если $\lambda = 0$ и $\mu \gg 0$, то $q_{1,2} = \mp i\sqrt{-\mu}$;

если $\mathcal{D} = \lambda^2 - 4\mu < 0$, то q_1 и q_2 – комплексно-сопряженные корни.

Общее решение либо монотонное и быстро убывающее, либо быстро осциллирующее, либо быстро убывающее и быстро осциллирующее.

Численное решение задачи (2.28) является достаточно важной проблемой с точки зрения вычислительной математики: ряд дискретных методов будет устойчивым только при очень малых шагах дискретизации. Приведем конкретные примеры.

При $\lambda \gg 0$ и $\mu = 0$ будем иметь классическое дифференциальное уравнение Далквиста [53; 67]:

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x_0. \quad (2.30)$$

Несмотря на простоту, данное уравнение на протяжении многих десятилетий служит тестовым для предсказания свойств методов решения более общих систем дифференциальных уравнений, которые содержат как быстро, так и медленно меняющиеся компоненты (жесткие ОДУ).

Для численного решения жестких ОДУ явными методами требуется весьма существенное ограничение на шаг интегрирования. Например, явная схема Эйлера для задачи (2.30) дает

$$x_{i+1} = (1 - \lambda h)x_i, \quad t \in [0,1], \quad x_0 = x(0). \quad (2.31)$$

Отсюда легко заметить, что для устойчивости этого метода требуется ограничение на h :

$$0 < h < \frac{1}{\lambda}.$$

Неявный метод Эйлера, как правило, достаточно хорошо справляется с жесткими задачами. Для задачи (2.30) будем иметь

$$x_{i+1} = x_i / (1 + \lambda h), \quad (2.32)$$

т.е. этот алгоритм будет устойчивым при любом h .

Ряд неявных методов, например, неявные методы Адамса, для задачи (2.30) будет устойчивым также при весьма существенном ограничении на шаг интегрирования (см., напр. [53]).

Если записать (2.30) в интегральном виде

$$x(t) + \int_0^t \lambda x(\tau) d\tau = x_0, \quad t \in [0,1], \quad (2.33)$$

и применить для этой задачи метод, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников – аналог неявного метода Эйлера для исходной задачи (2.30), то получим рекуррентное соотношение (2.32).

Как уже отмечалось в первой главе, рассматриваемый класс задач включает в себя и интегральные уравнения Вольтерра первого рода. Запишем задачу (2.30) в виде интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^t (1 + (t - \tau))x(\tau) d\tau = x_0 t, \quad t \in [0,1].$$

Применим для численного решения этого уравнения метод, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников. Опуская несложные выкладки, получим

$$x_{i+1} = (1 - \lambda h)x_i, \quad t \in [0,1], \quad x_0 = x(0),$$

т.е. ту же рекуррентную формулу, что и соотношение (2.31) (явный метод Эйлера для задачи (2.30)).

Если $\lambda = 0$ и $\mu \gg 0$, то решением данной задачи является быстроосциллирующая функция $x(t) = C_1 \sin qt + C_2 \cos qt$, где $q = \sqrt{\mu}$, $C_1 = x_0/\sqrt{\mu}$, $C_2 = x_0$. Такие задачи также на протяжении длительного времени служат тестовыми для предсказания свойств методов решения более общих интегро-дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) + \int_0^t K(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0,1],$$

где $K(t, \tau, x(\tau))$ – n -мерная вектор функция (ядро), $x(t)$, $f(t)$ – n -мерные искомая и заданная вектор-функции, и систем дифференциальных уравнений второго

порядка (начальная задача)

$$x'' = f(x(t), t), t \in [0, 1],$$

которые содержат быстроосциллирующие компоненты. Для таких задач строят специальные алгоритмы. Библиографию можно найти в монографиях [61; 64].

Статей, посвященных построению эффективных алгоритмов высокого порядка для численного решения начальной задачи для более общей системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$x'' = g(x'(t), x(t), t), t \in [0, 1]$$

и систем вида

$$x'(t) + F(t, x(t)) + \int_0^t G(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), x(0) = x_0, t \in [0, 1],$$

(задача (1) с матрицей $A(t) \equiv E$), которые содержат как быстро, так и медленно меняющиеся осциллирующие компоненты, не так много. Некоторая библиография приведена в монографиях [61; 64]. Таким образом, разработка новых, эффективных алгоритмов и построение их областей устойчивости для таких задач является достаточно актуальной темой.

Классические k -шаговые методы, примененные к уравнениям (2.28), имеют вид

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j} + h\lambda \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j x_{i-j} + h^2 \mu \sum_{l=0}^i \omega_{i+1, l} x_l = hf_{i+1}. \quad (2.34)$$

Обозначим $z_1 = \lambda h$ и $z_2 = \mu h^2$. Полагая $f(t) = 0$ и вычитая из i -й строки (2.34) $(i - 1)$ -ю строку, получим характеристическое уравнение вида

$$\sum_{j=0}^{k+1} (\bar{\alpha}_j + \bar{\beta}_j z_1 + \bar{\gamma}_j z_2) p^{k-j} = 0. \quad (2.35)$$

Говорят (см., напр., [52]), что разностные схемы (2.34) устойчивы, если корни полинома $\sum_{j=0}^{k+1} (\bar{\alpha}_j + \bar{\beta}_j z_1 + \bar{\gamma}_j z_2) p^{k-j}$ лежат на (или внутри) единичной окружности и кратность корней на единичной окружности не превосходит двух. Те значения z_1, z_2 , при которых корни характеристического уравнения (2.35) лежат в единичном круге, и на границе нет кратных корней (кратность корней не превосходит двух), принято называть областью устойчивости разностной схемы (2.34).

Таким образом, для метода (2.34) получаем характеристические полиномы:

при $k = 1$

$$C[p] : (1 + z_1 + z_2)p^2 - (2 + z_1)p + 1 = 0;$$

при $k = 2$

$$C[p] : \left(\frac{5}{2} + 2z_1 + \frac{3}{2}z_2\right)p^3 - \left(\frac{13}{2} + 3z_1 + \frac{1}{2}z_2\right)p^2 + \left(\frac{11}{2} + z_1\right)p - \frac{3}{2} = 0;$$

при $k = 3$

$$C[p] : \left(\frac{26}{6} + 3z_1 + \frac{23}{12}z_2\right)p^4 - \left(\frac{83}{6} + 6z_1 + \frac{4}{3}z_2\right)p^3 + \left(\frac{99}{2} + 4z_1 + \frac{5}{12}z_2\right)p^2 - \left(\frac{53}{6} + z_1\right)p + \frac{11}{6} = 0;$$

при $k = 4$

$$C[p] : \left(\frac{127}{12} + 4z_1 + \frac{55}{24}z_2\right)p^5 - \left(\frac{541}{12} + 10z_1 + \frac{59}{24}z_2\right)p^4 + \left(\frac{948}{12} + 10z_1 + \frac{37}{24}z_2\right)p^3 - \left(\frac{856}{12} + 5z_1 + \frac{9}{24}\right)p^2 + \left(\frac{397}{12} + z_1\right)p - \frac{75}{12} = 0.$$

Мы будем строить области устойчивости многошаговых методов (2.15) для тестовых уравнений (2.28). Как отмечалось выше, необходимо найти те значения z_1 и z_2 , при которых корни характеристического уравнения $C[p]$ лежат в единичном круге, и на границе нет кратных корней (кратность не превосходит двух). Для этого отобразим единичный круг в левую полуплоскость с помощью дробно-линейной подстановки $p = \frac{1+t}{1-t}$. Получим полином $\tilde{C}[t]$. Если вещественная часть всех корней данного полинома строго больше нуля, то это условие будет означать наличие корня $|p_i| < 1$ у полинома $C[p]$.

После подстановки получим уравнения $\tilde{C}[t]$.

при $k = 1$

$$\tilde{C}[t] : (4 + 2z_1 + z_2)t^2 + (2z_1 + 2z_2)t + z_2 = 0;$$

при $k = 2$

$$\tilde{C}[t] : (16 + 6z_1 + 2z_2)t^3 - (4 + 8z_1 + 5z_2)t^2 + (2z_1 + 4z_2)t - z_2 = 0;$$

при $k = 3$

$$\tilde{C}[t] : \left(\frac{136}{3} + 14z_1 + \frac{11}{3}z_2\right)t^4 + (20 + 22z_1 + \frac{31}{3}z_2)t^3 + (4 + 10z_1 + \frac{32}{3}z_2)t^2 + (2z_1 + 5z_2)t + z_2 = 0;$$

при $k = 4$

$$\tilde{C}[t] : \left(\frac{736}{3} + 30z_1 + \frac{20}{3}z_2\right)t^5 + \left(\frac{196}{3} + 52z_1 + 20z_2\right)t^4 + (24 + 32z_1 + 24z_2)t^3 + (4 + 12z_1 + \frac{47}{3})t^2 + (2z_1 + 6z_2)t + z_2 = 0.$$

Далее, применяя критерий Рауса-Гурвица [52], получаем неравенства, являющиеся границами области устойчивости для уравнений (2.28).

При $k = 1$

$$\begin{cases} 4 + 2z_1 + z_2 > 0, \\ 2z_1 + 2z_2 > 0, \\ 1 > 0. \end{cases}$$

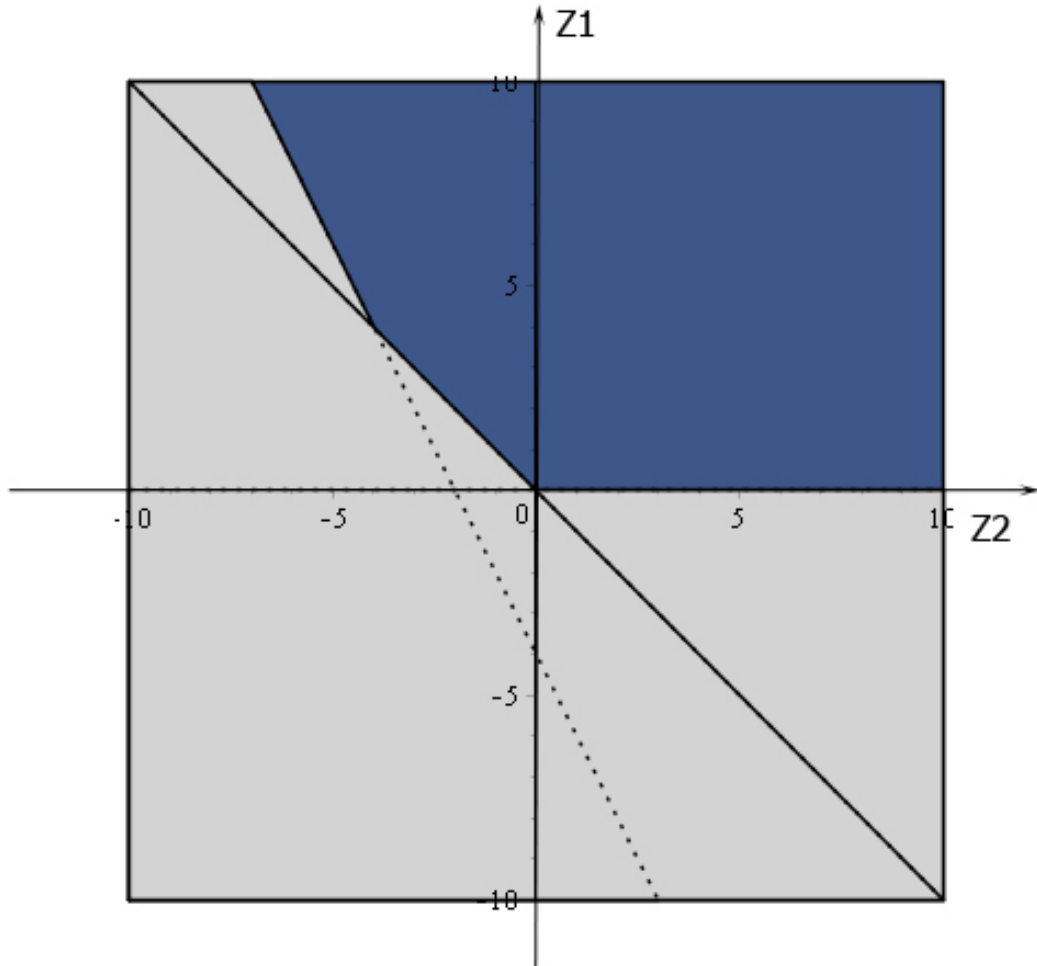


Рис. 2.1. Область устойчивости метода (2.15) при $k = 1$ закрашена черным цветом

При $k = 2$

$$\begin{cases} 16 + 6z_1 + 2z_2 > 0, \\ 4 + 8z_1 + 5z_2 > 0, \\ 2z_1 + 4z_2 > 0, \\ z_2 > 0, \\ 8z_1 + 16z_1^2 + 36z_1z_2 + 18z_1^2 > 0. \end{cases}$$

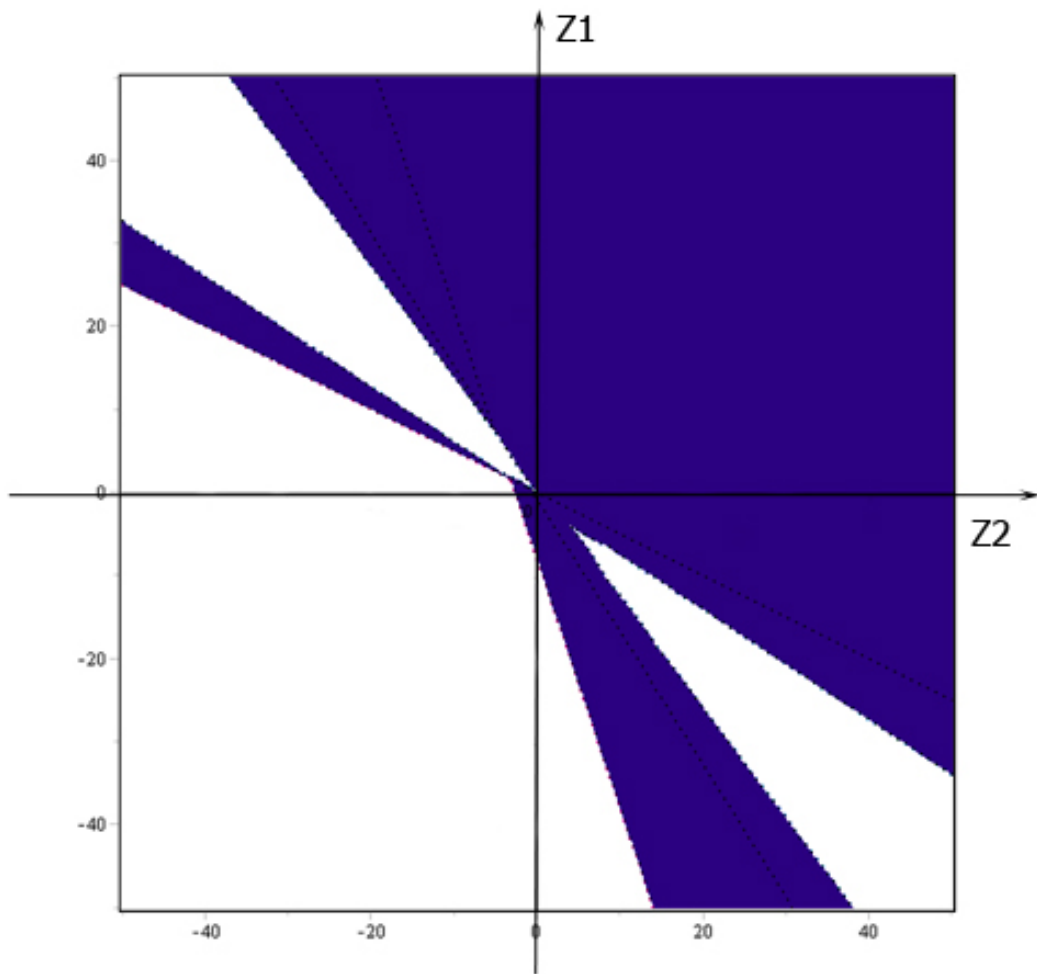


Рис. 2.2. Область устойчивости метода (2.15) при $k = 2$ закрашена черным цветом

При $k = 3$

$$\begin{cases} \frac{16}{3} + 14z_1 + \frac{11}{3}z_2 > 0, \\ 20 + 22z_1 + \frac{31}{3}z_2 > 0, \\ 80 + \frac{592}{3}z_1 + 28z_2 + 192z_1^2 + \frac{782}{3}z_1z_2 + \frac{827}{9}z_2^2 > 0, \\ 160z_1 + \frac{1184}{3}z_1^2 + \frac{488}{3}z_1z_2 - \frac{820}{3}z_2^2 + 384z_1^3 + \frac{2992}{3}z_1^2z_2 + \frac{9292}{9}z_1z_2^2 + \frac{1058}{3}z_2^3 > 0. \end{cases}$$

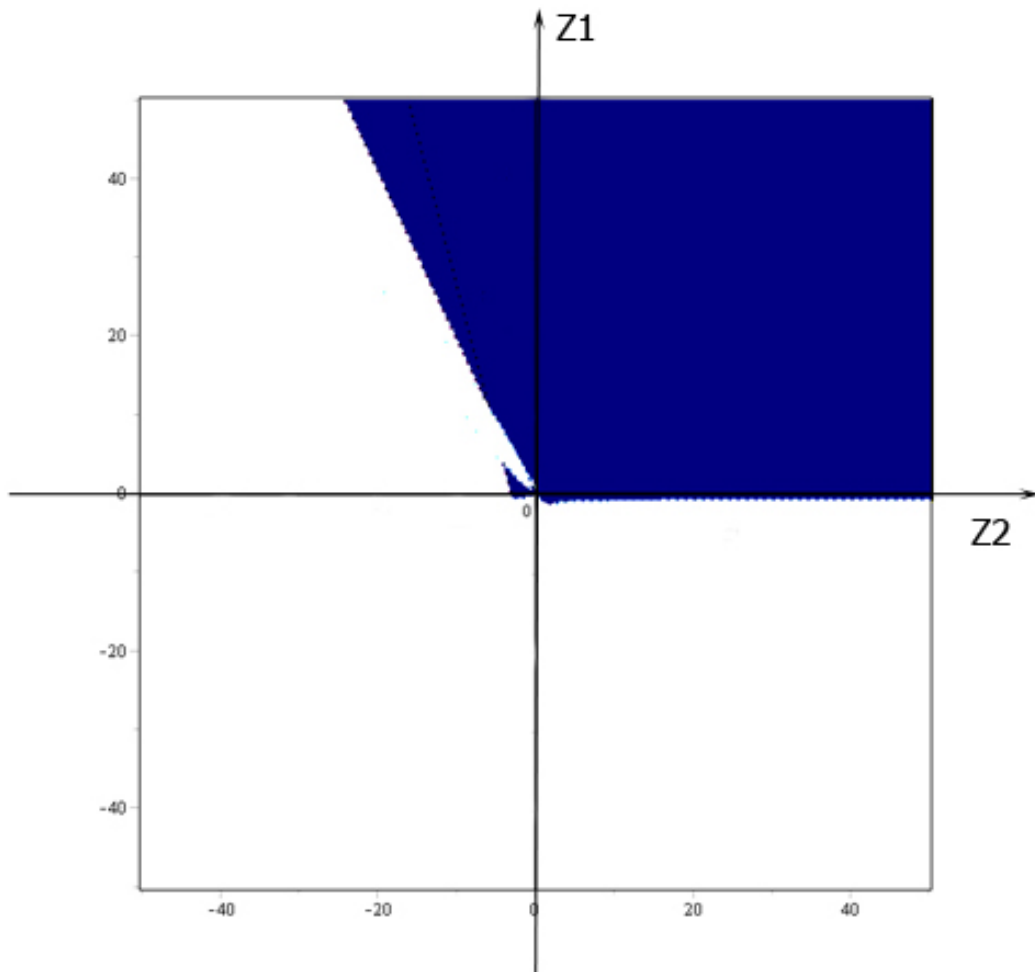


Рис. 2.3. Область устойчивости метода (2.15) при $k = 3$ закрашена черным цветом

При $k = 4$

$$\begin{cases} \frac{736}{3} + 30z_1 + \frac{20}{3}z_2 > 0, \\ \frac{196}{3} + 52z_1 + 20z_2 > 0, \\ \frac{1760}{3} + \frac{824}{3}z_1 - \frac{16400}{9}z_2 + 1304z_1^2 + 1338z_1z_2 + \frac{3380}{9}z_2^2 > 0, \\ -M_1 > 0, \end{cases}$$

где $M_1 = -\frac{3584}{9}z_1 - \frac{391400}{9}z_1z_2 + \frac{52984}{3}z_1^2z_2 + \frac{39406}{3}z_1z_2^2 + \frac{97660}{27}z_2^3 - \frac{1009360}{27}z_2^2 - \frac{15232}{3}z_1^2 - 7680z_2 + 10240z_1^3 + \frac{7040}{3}$.

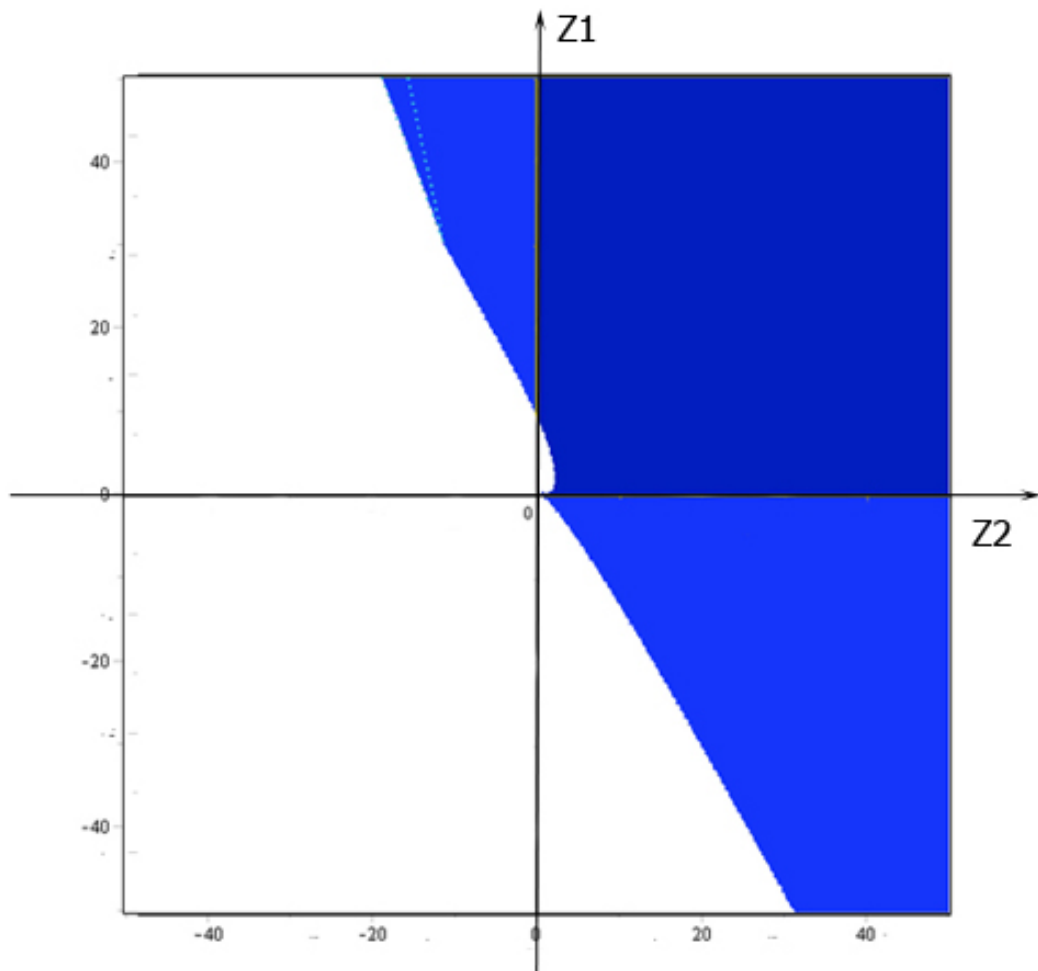


Рис. 2.4. Область устойчивости метода (2.15) при $k = 4$ закрашена черным цветом

2.3 Численные эксперименты

Пример 2.3.1. Рассмотрим задачу

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1],$$

с входными данными $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t & t^2 \\ e^t & 2te^t & e^t t^2 \\ e^{2t} & 2e^{2t} & e^{2t} t^2 \end{pmatrix},$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t + 2 & t^2 + 1 + 2t \\ e^t & 2te^t + 1 + 2e^t & e^t t^2 + 3t + e^t + 2te^t \\ e^{2t} & 2e^{2t} t + e^t + 2e^{2t} & e^{2t} t^2 + 3te^t + e^{2t} + 2e^{2t} t \end{pmatrix},$$

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} e^{t+2s} & 2e^{t+2st} & e^{t+2st^2} \\ e^{2t+2s} & 2e^{2t+2st} + e^{t-s} & e^{2t+2st^2} + 3e^{t-s} t \\ e^{3t+2s} & 2e^{3t+2st} + e^t e^{t-s} & e^{3t+2st^2} + 3e^{2t-s} t + e^{t+s} \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} + e^{-t} + te^t \\ e^t(-e^{-2t} + e^{-t} + te^t) + (1+t)e^t \\ e^{2t}(-e^{-2t} + e^{-t} + te^t) + (1+t)(e^t)^2 + te^t \end{pmatrix}.$$

Начальное условие: $x(0) = (1,1,1)$.

Данная задача удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1.2, следовательно, ее решение существует и единственно. Точное решение $x(t) = (u,v,w)^\top = (e^{-2t}, e^t, e^{-t})^\top$.

Приведем таблицы погрешности численных расчетов данной задачи при различных значениях k (см. таблицы 2.4 - 2.6).

Таблица 2.4

Погрешность решения примера 2.3.1 методом (2.15) при $k = 1$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/40	$6.40 * 10^{-2}$	$4.40 * 10^{-2}$	—
1/80	$3.36 * 10^{-2}$	$2.22 * 10^{-2}$	—
1/160	$1.71 * 10^{-2}$	$1.11 * 10^{-2}$	—
1/320	$8.69 * 10^{-3}$	$5.59 * 10^{-3}$	—
1/640	$4.37 * 10^{-3}$	$2.80 * 10^{-3}$	—

Здесь и в следующих таблицах приняты обозначения $Err_u = \max_{1 \leq i \leq N} |u(t_i) - u_i|$, $Err_v = \max_{1 \leq i \leq N} |v(t_i) - v_i|$, $Err_w = \max_{1 \leq i \leq N} |w(t_i) - w_i|$, знак «—» означает, что погрешность меньше 10^{-10} .

Таблица 2.5

Погрешность решения примера 2.3.1 методом (2.15) при $k = 2$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/40	$2.90 * 10^{-3}$	$1.58 * 10^{-4}$	—
1/80	$6.53 * 10^{-4}$	$6.58 * 10^{-5}$	—
1/160	$1.54 * 10^{-4}$	$1.97 * 10^{-5}$	—
1/320	$3.74 * 10^{-5}$	$5.32 * 10^{-6}$	—
1/640	$9.22 * 10^{-6}$	$1.38 * 10^{-6}$	—

Таблица 2.6

Погрешность решения примера 2.3.1 методом (2.15) при $k = 3$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/5	0.0033025193	0.002007195	—
1/10	0.0005937026	0.000110886	—
1/20	0.0000526427	0.000006693	—
1/40	0.0000051857	$4.07 * 10^{-7}$	—
1/80	$5.638 * 10^{-7}$	$3.3 * 10^{-8}$	—

Пример 2.3.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t+2s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t+s} \end{pmatrix} x(s) ds = \begin{pmatrix} e^{-2t} + te^t \\ (1+t)e^t \\ te^t \end{pmatrix},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, t \in [0,1], x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для решения использовался метод (2.15) при $k = 1, 2$. Результаты приведены в таблицах 2.7 - 2.8.

Таблица 2.7

Погрешность решения примера 2.3.2 методом (2.15) при $k = 1$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/5	0.0185035762	0.009599380	—
1/10	0.0036902376	0.001099836	—
1/20	0.001134523	0.000130718	—
1/40	0.0002288721	0.000015973	—
1/80	0.0000812719	0.000001972	—

Таблица 2.8

Погрешность решения примера 2.3.2 методом (2.15) при $k = 2$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/5	0.293459171	0.063660260	0.139082789
1/10	0.048718782	0.005067963	0.013222443
1/20	0.005841865	0.000366552	0.001035629
1/40	0.000670248	0.000024658	0.000072558
1/80	0.000078321	0.000001618	0.000004795

Пример 2.3.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t+2s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} & 0 \\ 0 & 0 & et + s \end{pmatrix} x(s) ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{3.5t} + e^{2t} - \frac{2}{5}e^t + 1.5e^{0.5t} \\ 3e^{1.5t} - 2e^t \\ \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t \end{pmatrix},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{0.5t} \\ e^{1.5t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \in [0,1], x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для решения использовался метод (2.15) при $k = 1, 2, 3$. Результаты приведены в таблицах 2.9 - 2.11.

Таблица 2.9

Погрешность решения примера 2.3.3 методом (2.15) при $k = 1$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/5	0.350979786	0.17066	0.87126
1/10	0.117417	0.04681	0.23947
1/20	0.043659	0.01221	0.06388
1/40	0.0181189	0.00308	0.01642
1/80	0.00815310	0.00075	0.00548

Таблица 2.10

Погрешность решения примера 2.3.3 методом (2.15) при $k = 2$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/5	0.110064372	0.050089460	0.338058321
1/10	0.021833339	0.006728896	0.054989418
1/20	0.004022857	0.000877036	0.007985072
1/40	0.000754320	0.000112471	0.001079326
1/80	0.000151738	0.000014250	0.000140387

Погрешность решения примера 2.3.3 методом (2.15) при $k = 3$

h	Err_u	Err_v	Err_w
1/5	0.026961871	0.014196103	0.139082789
1/10	0.003708028	0.000961971	0.013222443
1/20	0.000350761	0.000064418	0.001035629
1/40	0.000030562	0.000004146	0.000072558
1/80	0.000002746	$2.64 * 10^{-7}$	0.000004795

Таким образом, предложенные методы хорошо справляются с решением ИДУ и видно, что результаты вычислений согласуются с теоретическими выкладками.

3 Численное решение сингулярных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений при моделировании в пограничных средах «жидкость-газ»

В этой главе мы рассматриваем частный случай ИДУ (1), когда коэффициент перед производной $A(t)$ является функцией, а также строим численный метод решения, который дает возможность избавиться от сингулярности.

3.1 Интегро-дифференциальные уравнения с сингулярными точками

Рассмотрим уравнение вида

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0,1], \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0,$$

где $a(t), b(t), K(t,s)$ – функции коэффициентов, $f(t), x(t)$ – известная и искомая функции.

Предлагается, что $a(t_j) = 0$, $j = \overline{1, N}$, $t_j \in [0,1]$.

Для функции $a(t)$ точка t_j называется особой, если в этой точке решение уравнения (3.1) стремится к бесконечности или имеет какие-либо иные нерегулярности поведения.

Рассмотрим простые уравнения

$$tx' + x = 0, \quad t \in [0, a], \quad (3.2)$$

и

$$tx' - x = 0, \quad t \in [0, a], \quad (3.3)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.2) можно записать в виде

$$(tx)' = 0.$$

Интегрируя этот выражение, получаем

$$tx = c,$$

$$x = \frac{c}{t}.$$

Если $c \neq 0$, то уравнение (3.2) с условием (3.4) не имеет классического решения. Для уравнения (3.3) решение $x = ct$, где c – любое число. Таким образом, задача (3.3), (3.4) имеет множество решений.

3.2 Задача о р-лапласиане

В этом параграфе будем рассматривать краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, заданного на полубесконечном интервале, с особенностью в нуле. Она возникает в различных областях, например, при моделировании сложных сред, уравнения состояний кото-

рых зависят от производных типа жидкости Ван-Дер-Ваальса и также в других задачах, например, в классических моделях элементарных частиц и космологии. Задача описывает статические центрально-симметричные решения (типа пузырьков и капелек) для исходных уравнений с частными производными [92]. Математические модели перехода фаз были темой аналитических и вычислительных исследований в течение длительного времени (см., напр., [68; 73; 75; 78; 84; 85; 92; 93; 96; 100; 101] и приведенную там библиографию). Особое внимание было уделено изучению поверхности между разными видами сред, например, пузыри газа в жидкости или капли жидкости в газе.

При изучении процессов в гидродинамике и в нелинейной теории полей ученые столкнулись с задачей поиска решения краевой задачи для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка, в частности, исследования формирования микроскопических пузырьков в неоднородной жидкости. В ряде работ Р.М. Lima [84; 92; 93; 96], Е. Weinmuller [84], G. Hastermann [84], Н.В. Конюховой [92; 96], Г.Ю. Куликова [93], М.В. Соловьева [92] и других были предложены методы для решения нелинейного дифференциального уравнения вида

$$r^{1-p}(r^{p-1}\rho'(r))' = f(\rho(r)), r > 0, \quad (3.5)$$

где p – размерность пространства, в котором задача рассматривается, f – известная функция, которая зависит от характеристики исследуемых жидкостей, ρ – искомая функция. В работах [92–94] предложены метод коллокации и метод стрельбы для решения (3.5). Данные методы имеют недостатки. Они являются трудоемкими и не позволяют уйти от сингулярности.

В статьях [92; 93; 96] получены необходимые и достаточные условия существования решения типа пузырей (или типа капли). Там же обсуждались результаты расчетов и их физические смыслы.

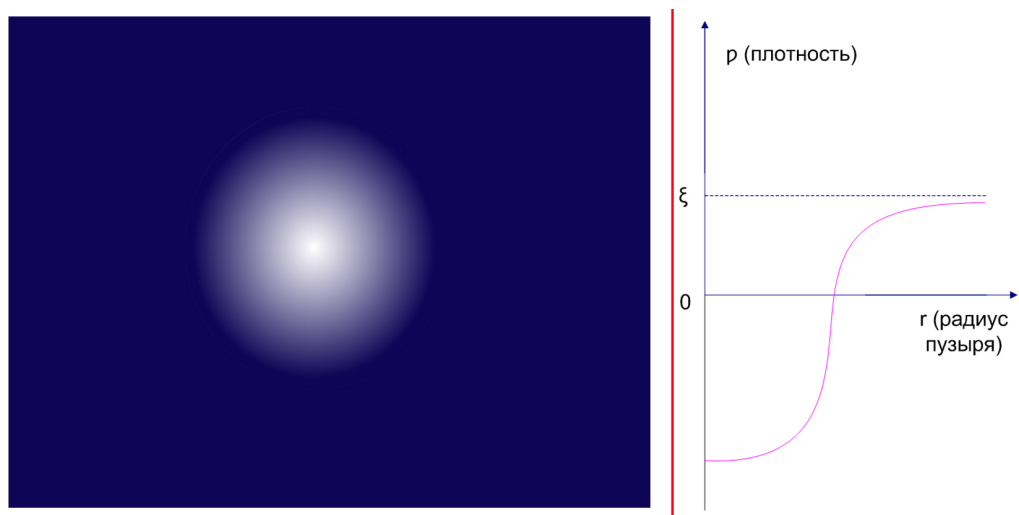


Рис. 3.1. Пузырь в жидкости с нечеткой границей и график решений уравнения плотности

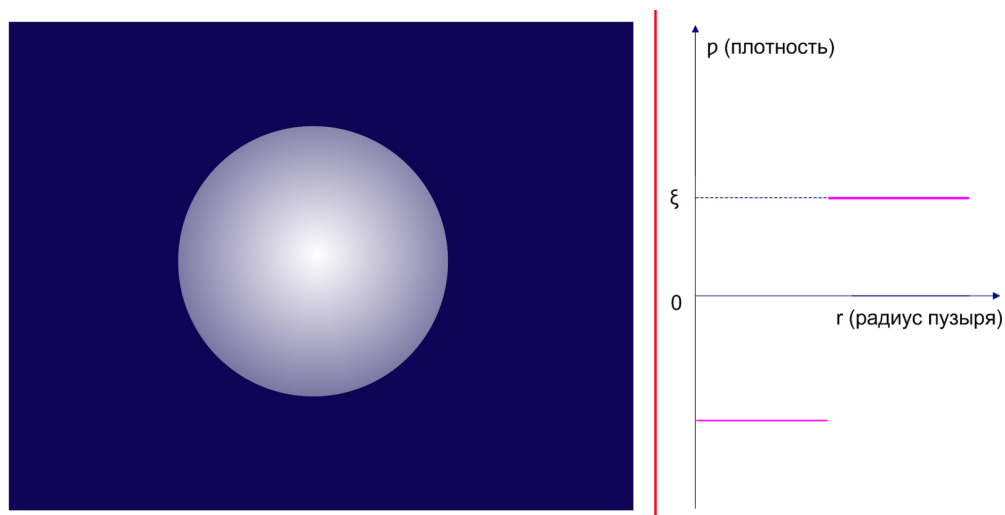


Рис. 3.2. Пузырь в жидкости с четкой границей и график решений уравнения плотности

В диссертации рассматриваются пузыри в жидкости типа Ван-Дер-Ваальса. Жидкость Ван-Дер-Ваальса – это модель, единообразно описывающая газообразную и жидкую фазы вещества. На основе данной модели Ван-Дер-Ваальс вывел уравнение состояния, которое показывает, что при критической температуре исчезают различия в физических свойствах жидкости и ее пара, исчезает видимая граница между ними. Данный эффект проиллюстрирован на рис. 3.1, а на рис. 3.2 для сравнения приведен рисунок пузыря с четкой границей.

Согласно [84] в теории Cahn-Hillard для смеси жидкостей [68] в формулу свободной энергии добавлено дополнительное слагаемое с участием градиента плотности $\nabla(\rho)$. Указанная теория предполагает, что объем свободной энергии жидкости E является суммой $E(\rho)$ и элемента, который учитывает неоднородность жидкости, т.е.

$$E(\rho, \nabla(\rho)) = E_0(\rho) + \frac{\gamma}{2}(\nabla(\rho))^2, \quad (3.6)$$

где ρ – массовая плотность неоднородной жидкости, $E_0(\rho)$ – потенциал с двумя локальными минимумами, источники которого определяют фазы. Потенциал $E_0(\rho)$ вызывает межповерхностный слой, внутри которого плотность ρ имеет различные значения [80]. Вследствие формы $E(\rho)$ жидкости имеют тенденцию разделяться на две фазы с плотностями $\rho = \rho_l$ (жидкость) и $\rho = \rho_v$ (газ). Кроме того, член $\frac{\gamma}{2}(\nabla(\rho))^2$ ведет к снижению изменения поля ρ , переключив поверхность в тонкий слой, и придает ей энергию – поверхностное натяжение [79]. В теории смешанных жидкостей в отличие от процессов, которые изучают другие разделы физики, это значение может быть положительным или отрицательным (обычно это значение положительно в одной фазе и отрицательной в другой).

В работе [73] было описано уравнение плотности контура микроскопических пузырьков, формирующихся в неоднородной жидкости (в частности, пара внутри одной жидкости). Напомним, как это уравнение получается. Состояние неоднородной жидкости (см., напр., [73] и [77] и приведенную там библиографию) описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{dv}{dt} + \nabla(\mu(\rho) - \gamma \Delta \rho) = 0, \quad (3.8)$$

где ρ, v – плотность и скорость жидкости, μ представляет ее химический потенциал и γ – известная постоянная константа. Рассмотрим случай, когда скорость

движения жидкости равна нулю, и система (3.7), (3.8) сводится к одному уравнению вида

$$\gamma \Delta \rho = \mu(\rho) - \mu_0, \quad (3.9)$$

где μ_0 – константа, которая зависит от состояния жидкости.

При поиске решения (3.9) со сферической симметрией, которая зависит только от переменной r – радиуса пузыря, введем полярную систему координат в R^2 и уравнение (3.9) затем сводим к обыкновенному дифференциальному уравнению [96]

$$\gamma \left(\rho'' + \frac{p-1}{r} \rho' \right) = \mu(\rho) - \mu_0, \quad r \in (0, \infty). \quad (3.10)$$

В диссертации мы рассматриваем задачу в полярной системе координат, поэтому $p = 2$.

Так как мы рассматриваем случай сферического пузыря [2; 96], то

$$\rho'(0) = 0. \quad (3.11)$$

Пузырь окружен жидкостью, поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho_l > 0, \quad (3.12)$$

где ρ_l – плотность окружающей жидкости.

В простейших моделях для неоднородных жидкостей химический потенциал μ является полиномом третьей степени от ρ с тремя разными вещественными корнями, значит, уравнение $\mu - \mu_0 = 0$ имеет три решения. Принимая во внимание, что $\mu(\rho_l) = \mu_0$, правую часть (3.10) можно записать в виде

$$\mu(\rho) - \mu_0 = 4\alpha(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_l), \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_l, \quad \alpha > 0. \quad (3.13)$$

Произведем замену переменной $x = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$ и введем обозначения $\lambda = \sqrt{\alpha/\gamma}(\rho_2 - \rho_1)$, $\xi = \frac{\rho_l - \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} > 0$. Тогда, без потери общности, задачу (3.10)-(3.12) запишем в виде

$$x''(r) + \frac{1}{r}x'(r) = 4\lambda^2(x(r) + 1)x(r)(x(r) - \xi) \quad (3.14)$$

с краевыми условиями

$$x'(0) = 0, \quad (3.15)$$

$$x(\infty) = \xi. \quad (3.16)$$

Краевая задача (3.14)-(3.16) зависит только от двух параметров: λ , который выбирается равным 1 без ограничения общности, и ξ , который изменяется в диапазоне $[0, 1]$ и отражает различные физические ситуации.

Обратим внимание, что задача (3.14) – (3.16) всегда имеет постоянное решение $x(r) \equiv \xi$, которое физически соответствует случаю однородной жидкости (без пузырьков).

Уравнение (3.14) можно переписать в виде

$$r^{-1}(rx'(r))' = f(x(r)), \quad (3.17)$$

где $f(x) = 4\lambda^2(x - \xi)(x + 1)x$, $0 < \xi < 1$. Численное решение уравнения (3.17) с условиями (3.15), (3.16) изучалось многими авторами (см., напр., [84; 92; 93; 96] и приведенную там библиографию), но эти схемы имеют ряд недостатков: трудоемки и очень чувствительны к выбору шага интегрирования.

Краевое условие (3.16) мы заменяем условием

$$x(M) = \xi - \epsilon, \quad (3.18)$$

где M – достаточно большое число.

С учетом краевого условия (3.15) перепишем задачу (3.14) в интегральном виде

$$x'(r) = \int_0^r \frac{\tau f(x(\tau)) d\tau}{r}, \quad r \in (0, M]. \quad (3.19)$$

Для решения уравнения (3.19) с условием (3.18) использованы специальные квадратурные формулы первого и второго порядка. Отметим, что условие $x'(0) = 0$ выполняется для любого решения (3.19). Решаем уравнение (3.19) методом стрельбы, где решения зависят от выбранных начальных значений $x(0)$.

Замечание 3.2.1. Пусть x^* – точное значение решения уравнения (3.19). Существуют 3 вида решений (см. рис. 3.3):

1. если $x(0) < x^* - \varepsilon$, то решение $x(r)$ неограниченно растет при конечном r ;
2. если $x(0) \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$, то решение $x(r)$ монотонно растет и ограничено $\lim_{r \rightarrow \infty} x(r) = \xi$;
3. если $x(0) > x^* + \varepsilon$, то решение $x(r)$ имеет колебательный характер и затухает $\lim_{r \rightarrow \infty} x(r) = 0$,

где ε – достаточное малое число.

Наша задача – найти решение типа 2. Кроме того, мы знаем, что значение x^* является единственным для каждого ξ и удовлетворяет условию $x^* \in [-1, 0]$; отметим, что $x^* \rightarrow -1$ при $\xi \rightarrow 1$ и $x^* \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$ (см., напр., [96]).

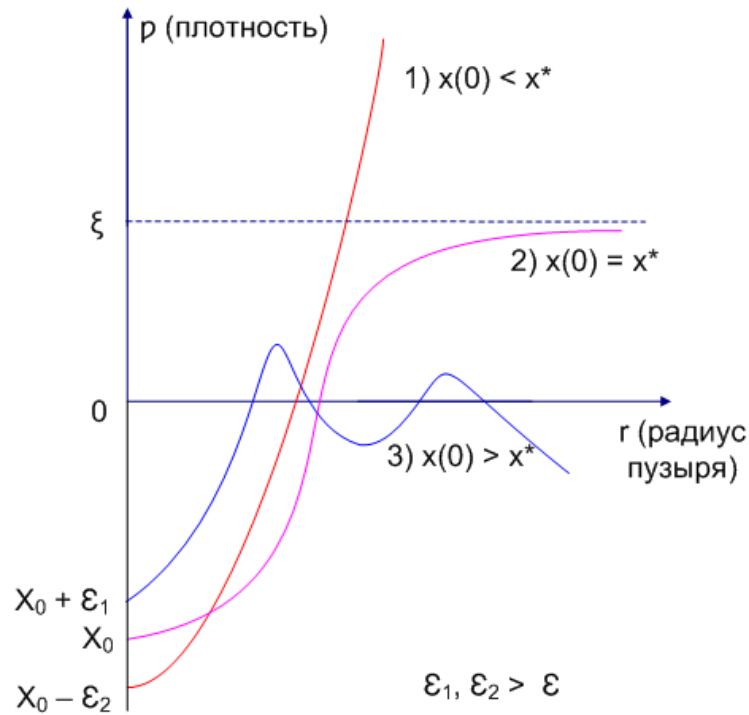


Рис. 3.3. График зависимости решения уравнения (3.19) от выбора начальных значений $x(0)$

Из рис. 3.3 видно, что решение очень чувствительно к выбору начальных данных (см. замечание). Основным недостатком разностной схемы является тот факт, что мы можем соскочить с траектории, т.е. вместо графика 2 мы будем иметь график 1 или 3.

Для решения уравнения (3.19) используем квадратурные формулы первого и второго порядка и аппроксимируем производную конечными разностями соответствующего порядка.

Метод первого порядка

Введем равномерную сетку на отрезке $[0, M]$: $r_i = ih$, $i = \overline{1, N}$, $Nh = M$ и обозначим $x_i \approx x(r_i)$.

Полагаем $x'(r_{i+1}) \approx (x_{i+1} - x_i)/h$, а интеграл в (3.19) считаем методом правых прямоугольников. Зададим начальное приближение $x_{i+1}^0 = x_i$. На каждом

шаге для данного i решаем нелинейное уравнение относительно x_{i+1} .

$$x_{i+1} - x_i = \frac{h^2}{r_{i+1}} \sum_{j=1}^{i+1} r_j f(x_j), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3.20)$$

Это делается с помощью метода простой итерации, который имеет вид

$$x_{i+1}^{\nu+1} = x_i + h^2 f(x_{i+1}^{\nu}) + \frac{h^2}{r_{i+1}} \sum_{j=1}^i r_j f(x_j), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

Процесс продолжается, пока $|x_{j+1}^{\nu+1} - x_{j+1}^{\nu}| < \kappa$, где κ – заданное число.

Из рис. 3.3 мы видим, что решение нашей задачи монотонно возрастает и не превосходит ξ . Если в результате численных расчетов мы получим приближенное решение больше ξ , или решение ведет себя не монотонно, то мы меняем начальные данные.

Метод второго порядка

Аналогично строим метод второго порядка для решения уравнения (3.19):

$$\frac{3x_{i+2} - 4x_{i+1} + x_i}{2h} = \frac{1}{r_{i+2}} \frac{h}{2} \left(2 \sum_{j=1}^{i+1} r_j f(x_j) + r_{i+2} f(x_{i+2}) \right), \quad i = \overline{0, N-2}. \quad (3.22)$$

В формуле (3.22) производная и интегральное слагаемое аппроксимируем со вторым порядком. Для вычисления x_1 используем формулу

$$x_1 = x_0 + \frac{h^2}{2p} f(x_0), \quad (3.23)$$

которая следует из асимптотического поведения $x(r)$ вблизи начала координат (см., напр., [96]).

Для каждого значения i (начиная с $i = 0$) мы определим x_{i+2} , решив нелинейное уравнение (3.22) методом простой итерации:

$$x_{i+2}^{\nu+1} = \frac{4}{3}x_{i+1} - \frac{1}{3}x_i + \frac{h^2}{3r_{i+2}} \left(2 \sum_{j=1}^{i+1} r_j f(x_j) + r_{i+2} f(x_{i+2}^{\nu}) \right), \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Начальное приближение $x_{i+2}^0 = x_{i+1}$.

Процесс продолжается, пока $|x_{j+1}^{\nu+1} - x_{j+1}^{\nu}| < \kappa$, где κ – требуемая точность.

В данном случае можно положить $\kappa = h^2$.

3.3 Описание программы для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

По разработанным методам создан программный комплекс (ПК), который реализует расчеты определения профиля пузыря в неоднородной жидкости. Для реализации программной системы использована среда разработки MATLAB и его пакеты. ПК позволяет производить расчет радиуса пузыря в различных внешних жидкостях и отображать полученные результаты в виде графических представлений. ПК также дает возможность автоматизированного ввода подходящих входных данных. При этом используются следующие функции:

- функция «ImplicitEuler» – функция реализации неявного метода первого порядка точности;
- функция «ImplicitSecond» – функция реализации неявного метода второго порядка точности;
- функция «bissecequ» – функция реализации метода стрельбы для метода первого порядка;
- функция «bissecsecond» – функция реализации метода стрельбы для метода второго порядка;

- функция «f» – функция для вычисления функции по заданной формуле;
- функция «figure1CreateFcn» – функция для присвоения начальных глобальных параметров.

В рамках программного комплекса разработаны следующие модули:

- модуль «BtnFindCallback» – модуль для автоматического поиска подходящих начальных параметров;
- модуль «ClearBtnCallback» – модуль для сброса всех данных и графиков;
- модуль «CalBtnCallback» – модуль для расчетов и построения соответствующих графиков;
- модуль «ExitBtnCallback» – для выключения программы.

Входные параметры размещаются в 3 группы на интерфейсе ПК:

- группа «Параметры» для ввода начальных параметров: ξ – плотность окружающей жидкости ($0 < \xi < 1$); Lam – постоянный коэффициент (λ), который выбирается равным 1 без ограничения общности; h – шаг интегрирования; imax – максимальное количество шагов итерации; tol – контрольное значение погрешности (κ); $[a, b]$ – интервал начальных значений радиуса пузыря x_0 , $-1 < a < b < 0$;
- группа «Методы» для выбора метода вычисления (первого или второго порядка);
- группа «Поиск начального значения» имеет параметры: начало – начальное значение x_0 , $-1 < x_0 < 0$; точность – шаг поиска начального значения x_0 . Задача решается методом стрельбы, поэтому выбор интервала, в котором лежит начальное значение x_0 , очень важен. При разных значениях плотности окружающей жидкости ξ начальные значения x_0 разные. Чем ξ ближе к 1, тем меньше интервал начального значения x_0 , поэтому модуль «Найти» помогает выбрать подходящие начальные значения интервала $[a, b]$, в котором лежит x_0 .

Выходные параметры отображают на таблице и графике начальное значение x_0 и радиус пузыря.

На рис. 3.4 приведена блок-схема работы неявного метода первого и второго порядка (функции «ImplicitEuler» и «ImplicitSecond»)

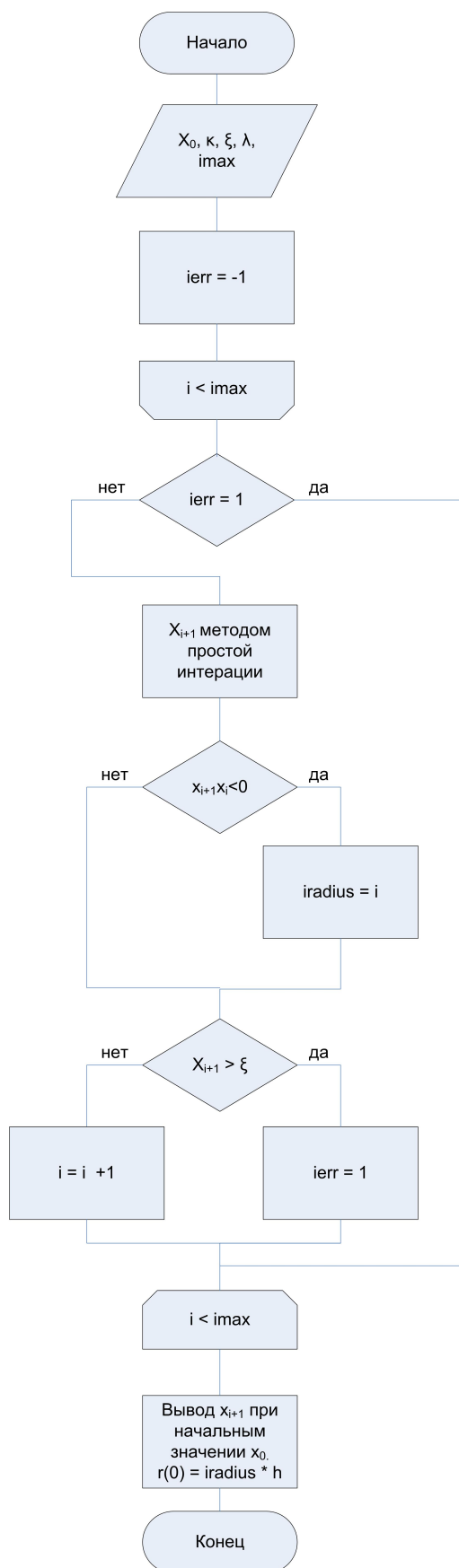


Рис. 3.4. Блок-схема неявного метода

На рис. 3.5 приведена блок-схема работы программы (метод стрельбы – функции «bissecequ» и «bisseccsecond»)

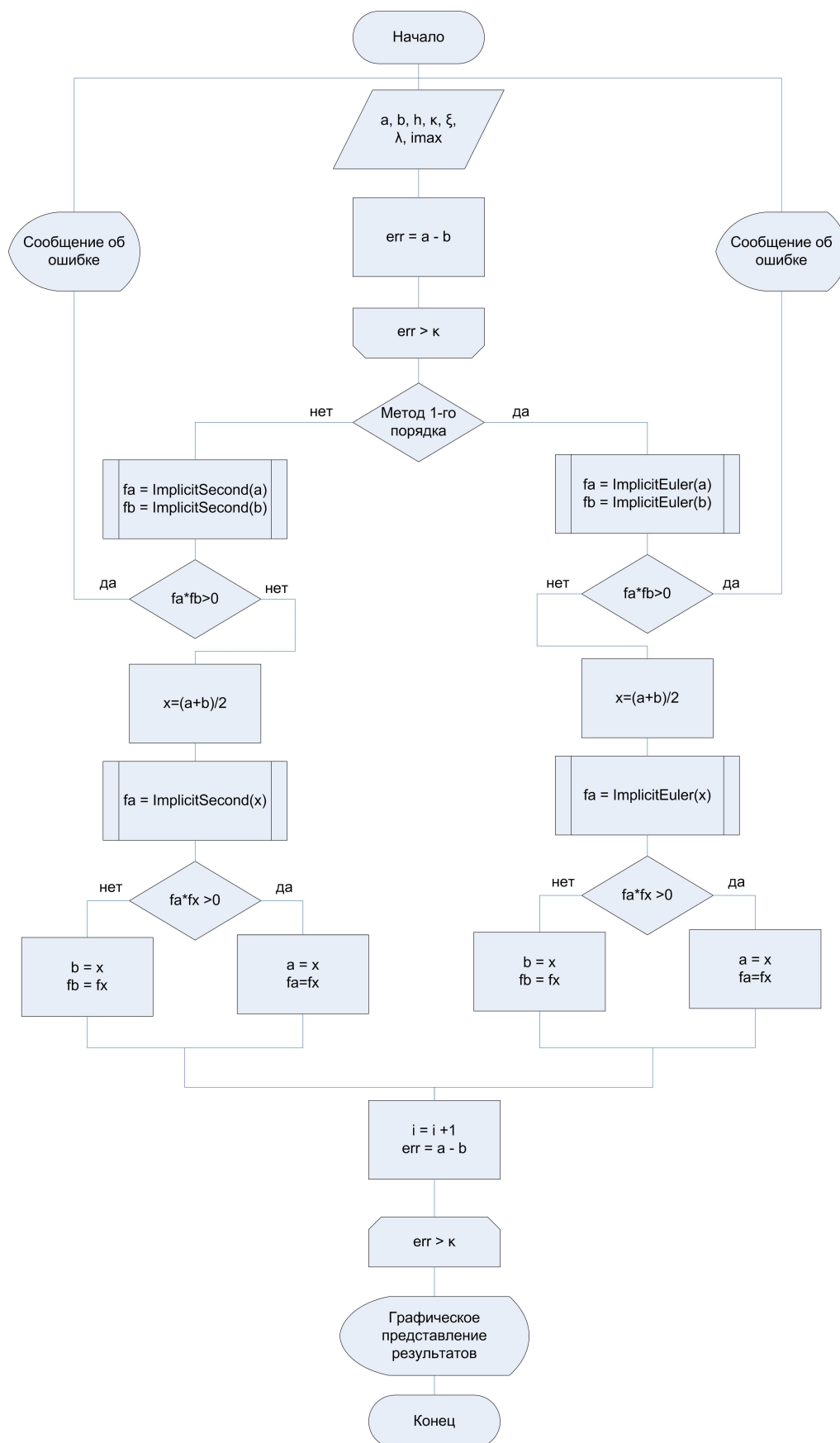


Рис. 3.5. Блок-схема работы программы

На рис. 3.6 представлен главный интерфейс созданного ПК.

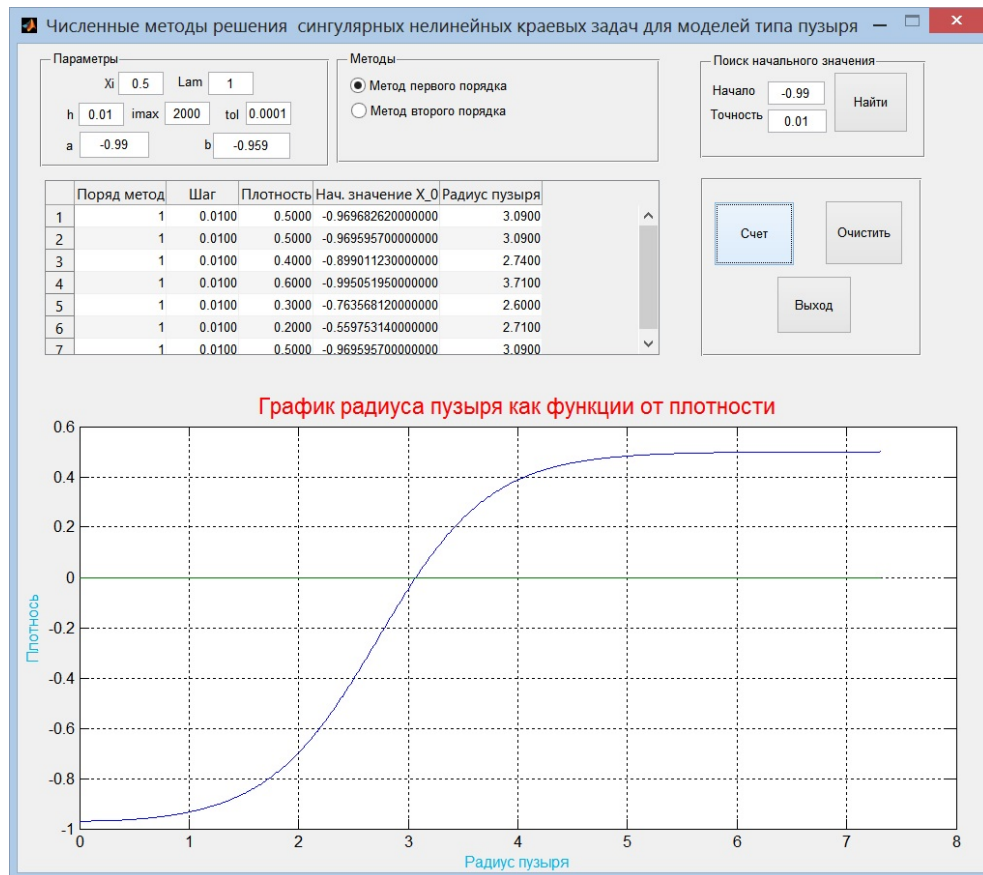


Рис. 3.6. Интерфейс программы

Кнопки, используемые для работы программы:

- кнопка «Найти» для автоматического поиска подходящего интервала, в котором лежит начальное значение плотности пузыря;
- кнопка «Счет» для проверки входных данных, расчета начального значения плотности пузыря, а также для представления графика плотности пузыря в зависимости от радиуса;
- кнопка «Очистить» для удаления всех заданных параметров и графиков;

Таким образом, основными достоинствами этой программы являются:

- возможность автоматизированного ввода подходящих входных данных;
- возможность решения сингулярной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка.

Численные расчеты

Так как рассматриваемая задача разрешима тогда и только тогда, когда $0 < \psi < 1$, то мы применили наши методы для значений ψ в этом интервале. В табл. 3.1 приведены значения $x(0)$, полученные методом первого порядка и методом второго порядка с шагом $h = 0.01$.

Таблица 3.1

Таблица значений $x(0)$ (плотность на контуре) как функции от ξ , полученных методом первого и второго порядка уравнения (3.19)

ξ	$x(0)$ (Метод 1-ого порядка)	$x(0)$ (Метод 2-ого порядка)
0.1	-0.2999	-0.3046
0.2	-0.5597	-0.5679
0.3	-0.7636	-0.7708
0.4	-0.8990	-0.9031
0.5	-0.9696	-0.9712
0.6	-0.9950	-0.9953
0.7	-0.9998	-0.9998
0.8	-0.99992178	-0.99992178

В статье [93] приведены следующие результаты.

Таблица 3.2

Таблица значений $x(0)$ (плотность в контуре) как функции от ξ

ξ	$x(0)$
0.1	-0.3047
0.2	-0.5678
0.3	-0.7707
0.4	-0.9031
0.5	-0.9711
0.6	-0.9953
0.7	-0.9998
0.8	-0.9999995

Из сравнения таблиц 3.1 и 3.2 очевидно, что метод второго порядка лучше согласуется с экспериментальными данными, чем метод первого порядка. Вычисления в статье [93] проводились с шагом интегрирования $h \leq 10^{-6}$. Переход к интегральному уравнению дает существенный выигрыш в объеме вычисле-

ний: алгоритмы (3.20) и (3.22) дают практически те же самые результаты, но при шаге интегрирования $h = 10^{-2}$.

4 Математическое моделирование в электрических цепях

В этой главе рассмотрим приложение разработанных методов, изложенных во второй главе, для моделирования многоконтурных электрических цепей.

4.1 Вспомогательные сведения из теории электроцепей

Перед формулировкой постановки задачи приведем стандартные сведения и обозначения.

Электротехнические цепи могут включать в себя пассивные и активные элементы. Активными элементами электротехнической цепи следует считать источники напряжения и источники тока. Пассивными элементами линейной цепи являются сопротивление, индуктивность и емкость.

1. **Электрическое сопротивление** (обозначается R) – физическая величина, характеризующая свойства проводника препятствовать прохождению электрического тока, и в соответствии с законом Ома эта величина равна отношению приложенного к ней напряжения U к силе протекающего тока I (при отсутствии в цепи других источников тока или ЭДС):

$$R = \frac{U}{I}. \quad (4.1)$$

На схеме цепей обозначается как

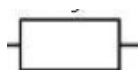


Рис. 4.1. Обозначение электрического сопротивления

2. **Индуктивность (или коэффициент самоиндукции)** (обозначается L) – коэффициент пропорциональности между электрическим током, теку-

щим в каком-либо замкнутом контуре, и магнитным потоком, создаваемым этим током через поверхность, краем которой является этот контур. В формуле $\Psi = Li$, где Ψ – магнитный поток, i – ток в контуре, L – индуктивность. Через индуктивность выражается ЭДС самоиндукции в контуре, возникающая при изменении в нём тока

$$E_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{di}{dt}. \quad (4.2)$$

На схеме цепей обозначается как



Рис. 4.2. Обозначение индуктивности

3. **Электрическая емкость. Конденсаторы** — характеристика проводника, мера его способности накапливать электрический заряд. В теории электрических цепей емкостью называют взаимную емкость между двумя проводниками (обкладками); параметр емкостного элемента электрической схемы, представленного в виде двухполюсника. Такая емкость определяется как отношение величины электрического заряда к разности потенциалов между этими проводниками. Для одиночного проводника емкость равна отношению заряда проводника к его потенциалу в предположении, что все другие проводники бесконечно удалены и что потенциал бесконечно удаленной точки принят равным нулю. Емкость обозначается C . В математической форме данное определение имеет вид

$$C = \frac{Q}{u}, \quad (4.3)$$

где Q — электрический заряд, u — напряжение между обкладками. С другой стороны, $dQ = idt$ или $Q = \int_{t_0}^t idt$. Следовательно, из формулы

(4.3) имеем

$$u = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt. \quad (4.4)$$



Рис. 4.3. Обозначение конденсатора

4. **Электродвижущая сила (ЭДС)** — скалярная физическая величина, характеризующая работу сторонних сил, то есть любых сил неэлектрического происхождения, действующих в квазистационарных цепях постоянного или переменного тока. В замкнутом проводящем контуре ЭДС равна работе этих сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль всего контура.

По аналогии с напряженностью электрического поля вводят понятие напряженности сторонних сил \vec{E}_{ex} , под которой понимают векторную физическую величину, равную отношению сторонней силы, действующей на пробный электрический заряд, к величине этого заряда. Тогда в замкнутом контуре L ЭДС будет равна:

$$\epsilon = \oint E_{ex} dl,$$

где dl — элемент контура.

ЭДС так же, как и напряжение, в международной системе единиц (СИ) измеряется в вольтах. Можно говорить об электродвижущей силе на любом участке цепи. Это удельная работа сторонних сил не во всем контуре, а только на данном участке. ЭДС гальванического элемента есть работа сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда внутри элемента от одного полюса к другому. Работа сторонних сил не может быть выражена через разность потенциалов, так как сторонние силы непотенциальны и их работа зависит от формы тра-

ектории. Так, например, работа сторонних сил при перемещении заряда между клеммами тока вне источника равна нулю.

4.2 Общие принципы построения математических моделей электроцепей

В диссертации рассматриваются модели, возникающие при исследовании сложных электрических и гидравлических цепей. Общие принципы их формирования описаны в [5; 47].

При моделировании электрических цепей для отображения процессов, происходящих в сети, используем матричные методы и методы теории графов. Число соединенных элементов, образующих сеть, в общем случае велико. Исходные уравнения цепи можно представить в матричной форме с использованием контурной и узловой матриц. Цепь изображается в виде направленного графа, состоящего из ветвей и узлов с фиксированным направлением каждой ветви. Введем векторы u_B , i_B , e_B соответственно для напряжений и токов ветвей и напряжений действующих в них источников. Положительные направления для каждой из указанных переменных примем совпадающими с направлением соответствующей ветви. Пусть A , B – узловая и контурная матрицы цепи, соответственно. Строки матрицы B соответствуют узлам, а столбцы – ветвям цепи. Значения элементов матрицы A могут быть

- $a_{ij} = 0$, если j -ая ветвь не примыкает к узлу i ;
- в противном случае $a_{ij} = \pm 1$, причем, знак $+$ берется, если ветвь направлена от узла.

Строки матрицы B соответствуют контурам цепи, столбцы – ветвям. Значения элементов матрицы B могут быть

- $b_{ij} = 0$, если j -ая ветвь не входит в контур i ;

- в противном случае $b_{ij} = \pm 1$, причем, знак + берется, если направление ветви совпадает с направлением обхода контура.

В общем случае уравнения цепи состоят из трех частей:

- уравнения баланса токов (расходов) в узлах (первый закон Кирхгофа)

$$\mathcal{A}i_{\mathbf{B}} = 0; \quad (4.5)$$

- уравнений баланса напряжений (перепадов давлений) в контурах (второй закон Кирхгофа)

$$\mathcal{B}u_{\mathbf{B}} = 0; \quad (4.6)$$

- а также уравнений ветвей (обобщенный закон Ома)

$$u_{\mathbf{B}} = \frac{d(L_{\mathbf{B}}i_{\mathbf{B}})}{dt} + R_{\mathbf{B}}i_{\mathbf{B}} + \tilde{C}_{\mathbf{B}} \int_{t_0}^t i_{\mathbf{B}} ds + u_C(t_0) + e_{\mathbf{B}}. \quad (4.7)$$

В формуле (4.7) $R_{\mathbf{B}}, \tilde{C}_{\mathbf{B}}$ – диагональные матрицы активных сопротивлений и величин, обратных емкости ветви, соответственно; $L_{\mathbf{B}}$ – матрица индуктивностей, которая может не быть диагональной из-за наличия взаимной индукции между ветвями, но обязательно симметричная.

Подставим (4.7) в (4.6) и обозначим: $i_{\mathbf{B}} = x$, получим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}L \\ 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} \mathcal{B}R \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathcal{B}\tilde{C}_{\mathbf{B}} \\ 0 \end{pmatrix} \int_{t_0}^t x d\tau + \begin{pmatrix} u_C(t_0) + e_{\mathbf{B}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) имеет вид (2.11), где

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{B}L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathcal{B}R \\ \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \mathcal{B}\tilde{C}_{\mathbf{B}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = - \begin{pmatrix} u_C(t_0) + e_{\mathbf{B}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть цепь содержит N_B ветвей, объединенных в N_Y узлов и N_j ветвей с источниками тока. Тогда получим следующий порядок анализа цепей на основании законов Кирхгофа [35]:

- определить число неизвестных токов, равное $N_B - N_j$;
- указать положительное направление тока в каждой ветви;
- составить $N_1 = N_Y - 1$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа;
- составить $N_2 = N_B - N_j - (N_Y - 1)$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать лишь те контуры, которые не содержат ветвей с источниками тока и указать направление обхода контуров. Число уравнений равно числу неизвестных токов $N_1 + N_2 = N_B - N_j$.

Приведем простой пример электрической цепи без индуктивной связи [39], который изображен на рис. 4.4.

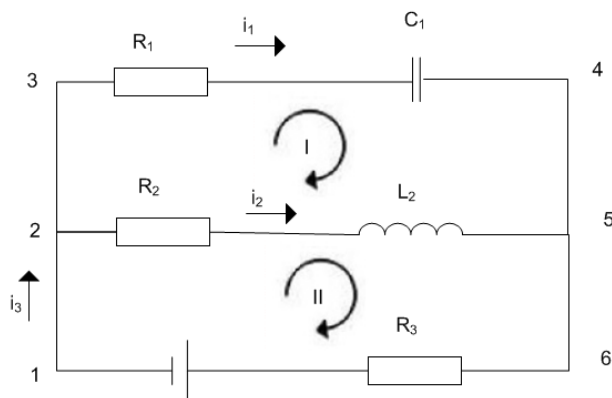


Рис. 4.4. Электрическая цепь без индуктивной связи

Емкость отображается с помощью отдельного элемента (конденсатора). Уравнения, характеризующие цепь, можно выразить с помощью двух законов Кирхгофа и формулами (4.1), (4.2), (4.3), которые приведены выше. Для примера напомним уравнения цепи, которая приведена на рис. 4.4. Здесь ставится задача исследовать цепь при включении источника напряжения u_3 . Выпишем первый закон Кирхгофа для узла 2, согласно которому сумма токов в узловой

точке равна нулю. Условимся токи, исходящие из узловой точки, считать положительными. Тогда можно написать

$$-i_3 + i_1 + i_2 = 0,$$

отсюда

$$i_3 = i_1 + i_2. \quad (4.9)$$

Напряжение между точками 2 и 5 на контурах I и II можно определить на основании второго закона Кирхгофа, согласно которому алгебраическая сумма напряжений в контуре (т.е. напряжение контура) равна нулю. Направления токов в контурах соответствуют направлению движения по часовой стрелке. Следовательно, напряжения контуров можно выразить следующим образом:

$$-u_3 + R_1 i_1 + R_3 i_3 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + u_C(0) = 0; \quad (4.10)$$

$$-u_3 + R_2 i_2 + R_3 i_3 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0. \quad (4.11)$$

Объединяя уравнения (4.9)–(4.11) в систему, получим ИДУ вида (2.11)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ i_3(s) \end{pmatrix} ds = \\ = \begin{pmatrix} u_3 + u_C(0) \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3 Многоконтурная электрическая цепь

Этот раздел посвящен построению математических моделей многоконтурных электрических цепей. Эти модели имеют вид ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. В работе [57] была исследована двухконтурная цепь, изображенная на рис. 4.5.

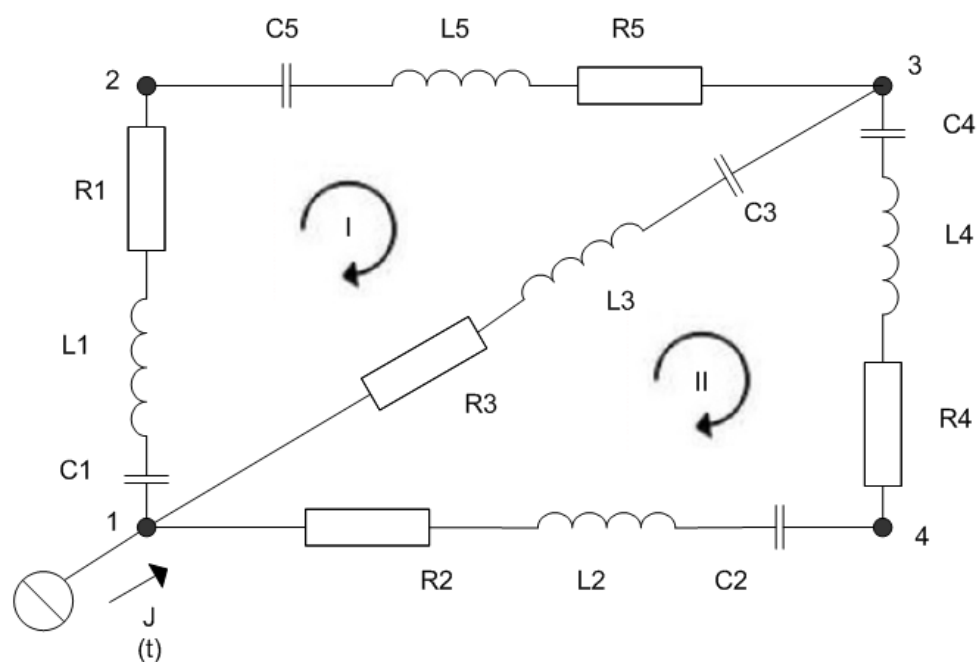


Рис. 4.5. Двухконтурная цепь

В работе [57] автор также получил уравнения цепи в матричной форме, которые являются ИДУ вида (2.11). Для решения этой системы уравнений предложены и обоснованы многошаговые методы, но данные методы применимы для узкого класса задач. В данной диссертации рассмотрены более сложные случаи электрических цепей, предложены и обоснованы новые многошаговые методы, которые можно более широко применять при решении ИДУ. Используя общие принципы и правила построения моделей электрических цепей, приведенные в

предыдущем разделе, выпишем математические модели трех- и четырехконтурных цепей. Для этого проанализируем трехконтурную цепь.

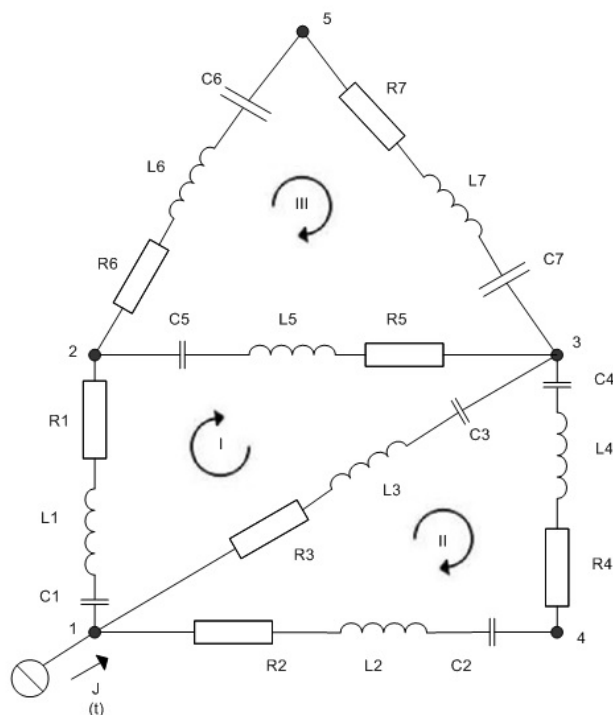


Рис. 4.6. Трехконтурная цепь

Трехконтурная цепь на рис. 4.6 имеет

- количество ветвей – 7 ($N_B = 7$), в том числе количество ветвей с источниками тока – 0 ($N_j = 0$);
- количество линейно независимых узлов – 5 ($N_y = 5$);
- количество линейно независимых контуров – 3.

Следовательно, для анализа этой цепи необходимо:

- определить число неизвестных токов, равное $N_B - N_j = 7$;
- предположить положительное направление тока ветвей как на рисунке;
- составить $N_1 = N_y - 1 = 4$ независимых уравнения по первому закону Кирхгофа;
- составить $N_2 = N_B - N_j - (N_y - 1) = 3$ независимых уравнения по второму закону Кирхгофа.

Выпишем 4 уравнения для четырех узлов по первому закону Кирхгофа (пропустим сложное уравнение для узла 3):

$$\text{узел 1: } i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

$$\text{узел 2: } -i_1 + i_5 + i_6 = 0,$$

$$\text{узел 4: } i_2 - i_4 = 0.$$

$$\text{узел 5: } -i_6 + i_7 = 0.$$

Матрица \mathcal{A} из (4.5) имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем уравнения для контуров по второму закону Кирхгофа:

$$\text{контур I: } u_1 + u_3 + u_5 = 0,$$

$$\text{контур II: } u_2 + u_3 + u_4 = 0,$$

$$\text{контур III: } u_5 + u_6 + u_7 = 0.$$

Контурная матрица \mathcal{B} из уравнения (4.6) имеет вид

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставим (4.7) в (4.6) для контурных уравнений мы получим

$$\begin{aligned} & L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_5 \frac{di_5}{dt} + R_1 i_1 + R_3 i_3 + R_5 i_5 + \\ & + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(s) ds + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3(s) ds + \frac{1}{C_5} \int_0^t i_5(s) ds = 0; \\ & L_2 \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(s) ds + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3(s) ds + \frac{1}{C_4} \int_0^t i_4(s) ds = 0; \\
& L_5 \frac{di_5}{dt} + L_6 \frac{di_6}{dt} + L_7 \frac{di_7}{dt} + R_5 i_2 + R_6 i_3 + R_7 i_7 + \\
& + \frac{1}{C_5} \int_0^t i_5(s) ds + \frac{1}{C_6} \int_0^t i_6(s) ds + \frac{1}{C_7} \int_0^t i_7(s) ds = 0.
\end{aligned}$$

Полученное вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в матричной форме (4.8) имеет вид (2.11)

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} L_1 & 0 & L_3 & 0 & L_5 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & L_3 & L_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & L_6 & L_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 & R_7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} +
\end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} & \frac{1}{C_6} & \frac{1}{C_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ i_3(s) \\ i_4(s) \\ i_5(s) \\ i_6(s) \\ i_7(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Проверим выполнение условий теоремы 2.1.1 для модели трехконтурной цепи (4.13):

$$\text{rank } A = 3 = \text{const}, \quad l = 3;$$

$$\text{rank}(A|B) = 7 = \text{const}, \quad m = 4;$$

$$\text{deg } \det(\lambda^2 A + \lambda B + K) = \text{deg}(a_0 \lambda^{10} + \dots) = 10;$$

$$2l + m = 10.$$

Здесь условия теоремы 2.1.1 выполнены, следовательно уравнение (4.13) имеет единственное решение на любом заданном конечном отрезке. Применим численный метод (2.15) для анализа (4.13). Автором был реализован программный комплекс, входные данные для работы которого приведены в таблице 4.1. Результатами работы являются графики 4.7 и 4.8.

Зададим начальные значения (см. табл. 4.1)

Параметры трехконтурной цепи (4.13)

	R (Ом)	L (Генри)	C (Фара)
1	10	100	10^{-4}
2	10	1	10^{-4}
3	10	1	10^{-4}
4	10	1	10^{-4}
5	10	1	10^{-4}
6	10	1	10^{-4}
7	10	1	10^{-4}

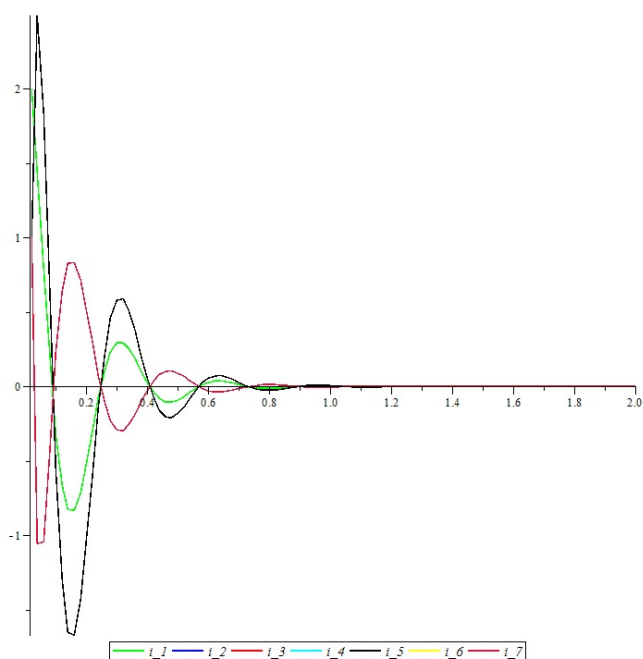


Рис. 4.7. Токи в трехконтурной цепи без действующего источника тока

Как показано на рис. 4.7, при отсутствии действующего источника тока ($j(t) = 0$) токи в цепи быстро затухают.

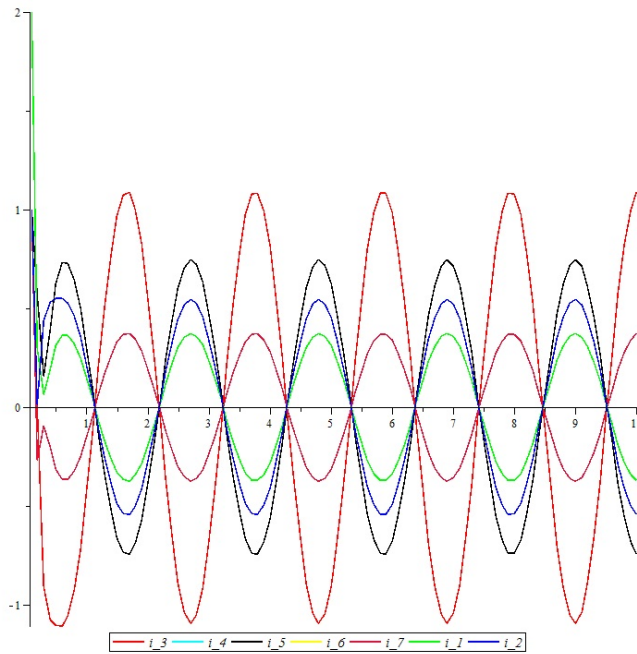


Рис. 4.8. Токи в трехконтурной цепи при наличии действующего источника $j(t) = \sin(3t)$

При наличии действующего источника $j(t) = \sin(3t)$ процесс имеет синусоидальные колебания, как показано на рис. 4.8.

Проанализируем четырехконтурную цепь.

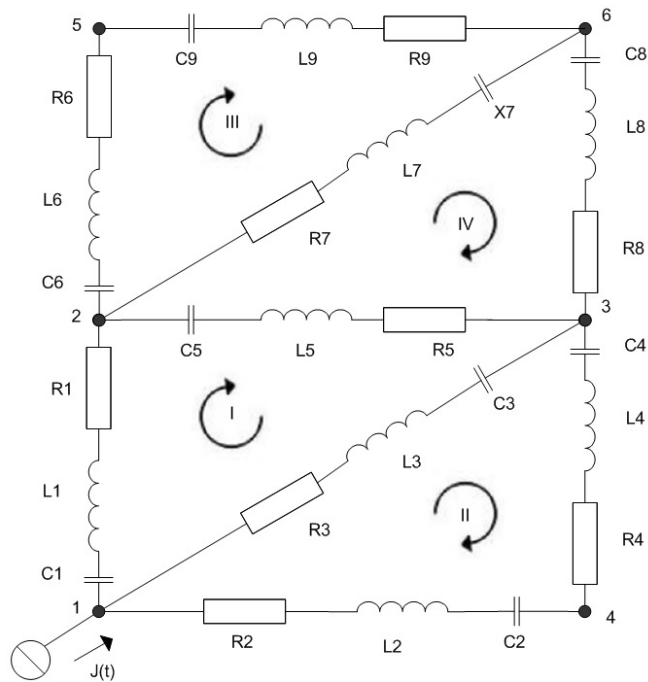


Рис. 4.9. Четырехконтурная цепь

Четырехконтурная цепь на рис. 4.9 имеет

- количество ветвей – 9 ($N_B = 9$), в том числе количество ветвей с источниками тока – 0 ($N_j = 0$);
- количество линейно независимых узлов – 6 ($N_y = 6$);
- количество линейно независимых контуров – 4.

Следовательно, для анализа этой цепи необходимо

- определить число неизвестных токов, равное $N_B - N_j = 9$;
- предположить положительное направление тока ветвей как на рисунке;
- составить $N_1 = N_y - 1 = 5$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа;
- составить $N_2 = N_B - N_j - (N_y - 1) = 4$ независимых уравнения по второму закону Кирхгофа.

Выпишем 5 уравнений для пяти узлов по первому закону Киргофа (пропустим сложное уравнение для узла 3):

узел 1: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$,

узел 2: $-i_1 + i_5 + i_6 - i_7 = 0$,

узел 4: $i_2 - i_4 = 0$,

узел 5: $-i_6 + i_9 = 0$,

узел 6: $i_7 + i_8 - i_9 = 0$.

Матрица \mathcal{A} из уравнения (4.5) имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем уравнения для контуров по второму закону Кирхгофа:

контур I: $u_1 + u_3 + u_5 = 0$, контур II: $u_2 + u_3 + u_4 = 0$, контур III:
 $u_6 + u_7 + u_9 = 0$, контур IV: $u_5 + u_7 + u_8 = 0$.

Контурная матрица \mathcal{B} из уравнения (4.6) имеет вид

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим (4.7) в (4.6) для контурных уравнений и получим

$$\begin{aligned} & L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_5 \frac{di_5}{dt} + R_1 i_1 + R_3 i_3 + R_5 i_5 + \\ & + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(s) ds + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3(s) ds + \frac{1}{C_5} \int_0^t i_5(s) ds = 0; \\ & L_2 \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 + \\ & + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(s) ds + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3(s) ds + \frac{1}{C_4} \int_0^t i_4(s) ds = 0; \\ & L_6 \frac{di_6}{dt} + L_7 \frac{di_7}{dt} + L_9 \frac{di_9}{dt} + R_6 i_6 + R_7 i_7 + R_9 i_9 + \\ & + \frac{1}{C_6} \int_0^t i_6(s) ds + \frac{1}{C_7} \int_0^t i_7(s) ds + \frac{1}{C_9} \int_0^t i_9(s) ds = 0; \\ & L_5 \frac{di_5}{dt} + L_7 \frac{di_7}{dt} + L_8 \frac{di_8}{dt} + R_5 i_5 + R_7 i_7 + R_8 i_8 + \\ & + \frac{1}{C_5} \int_0^t i_5(s) ds + \frac{1}{C_7} \int_0^t i_7(s) ds + \frac{1}{C_8} \int_0^t i_8(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Полученное вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в матричной форме (4.8) имеет вид (2.11)

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & L_3 & 0 & L_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & L_3 & L_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_6 & L_7 & 0 & L_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & 0 & L_7 & L_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{pmatrix} + \\
 + \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & R_7 & 0 & R_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & R_7 & R_8 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_6} & \frac{1}{C_7} & 0 & \frac{1}{C_9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 & \frac{1}{C_7} & \frac{1}{C_8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Проверим выполнение условий теоремы 2.1.1 для модели (4.14):

$$\text{rank } A = 4 = \text{const}, \quad l = 4;$$

$$\text{rank}(A|B) = 9 = \text{const}, \quad m = 5;$$

$$\text{deg det}(\lambda^2 A + \lambda B + K) = \text{deg}(a_0 \lambda^{13} + \dots) = 13.$$

$2l + m = 13$, т.е. условия теоремы 2.1.1 выполнены, следовательно уравнение (4.13) имеет единственное решение на любом заданном конечном отрезке. Применим численный метод (2.15) для анализа (4.13). Автором был реализован программный комплекс, входные данные для работы которого приведены в таблице 4.2. Результатами работы являются графики 4.10 и 4.11.

Зададим начальные значения (см. табл. 4.2).

Начальные параметры четырехконтурной цепи (4.14)

	R (Ом)	L (Генри)	C (Фара)
1	10	100	10^{-4}
2	10	1	10^{-4}
3	10	1	10^{-4}
4	10	1	10^{-4}
5	10	1	10^{-4}
6	10	1	10^{-4}
7	10	1	10^{-4}
8	10	1	10^{-4}
9	10	1	10^{-4}

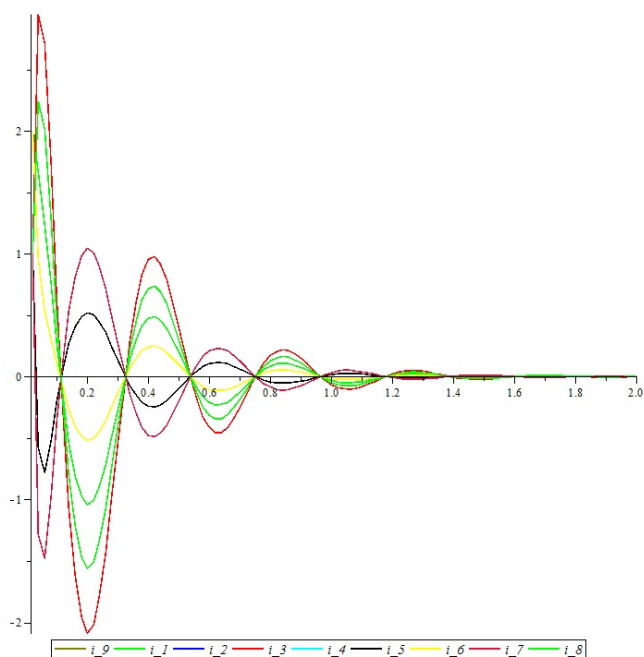


Рис. 4.10. Токи в четырехконтурной цепи (4.14) без действующего источника

Как показано на рис. 4.10, при отсутствии действующего источника тока ($j(t) = 0$), токи в цепи быстро затухают.

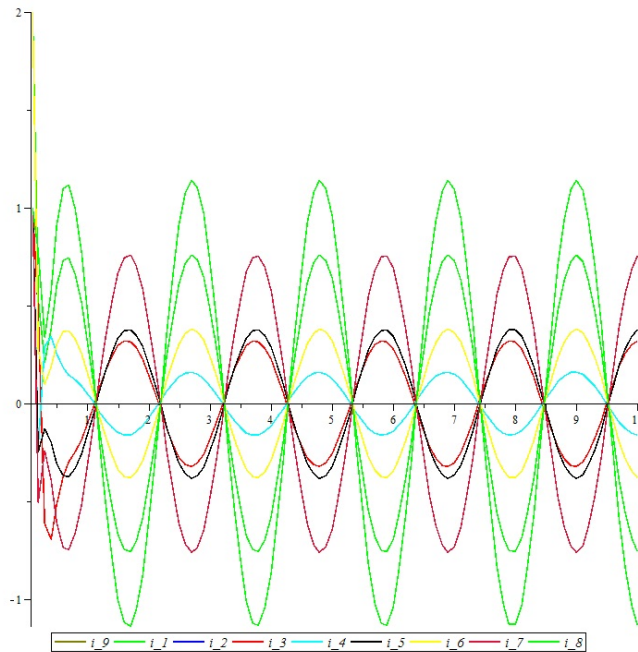


Рис. 4.11. Токи в четырехконтурной цепи (4.14) при наличии действующего источника $j(t) = \sin(3t)$

При наличии действующего источника $j(t) = \sin(3t)$ процесс имеет синусоидальные колебания, как показано на рис. 4.11.

Легко заметить, что результаты программного комплекса хорошо согласуются с теоретическими выкладками.

Таким образом, теоретические результаты, изложенные во второй главе, вместе с разработанными численными методами являются эффективным инструментом для исследования процессов, протекающих в многоконтурных электрических цепях.

Заключение

В диссертационной работе впервые предложены и обоснованы многошаговые численные методы для решения краевой задачи нелинейного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка и системы ИДУ с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Сформулированы достаточные условия существования единственного решения начальных задач для ИДУ с тождественно вырожденной главной частью.
2. Для такого класса задач предложены, обоснованы и программно реализованы эффективные численные методы, которые были применены для расчетов процессов, протекающих в многоконтурных электроцепях.
3. Выписано уравнение для нахождения радиуса пузыря в зависимости от плотности окружающей жидкости в виде сингулярного ИДУ. Разработаны и программно реализованы численные методы для его решения. Данный подход позволяет значительно сократить вычислительные затраты по сравнению над ранее разработанных.

Список литературы

- [1] **Абрамов, А.А.** О нелинейной самосопряженной спектральной задаче для одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А.А. Абрамов, К. Балла, В.И. Ульянова, Л.Ф. Юхно // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2003. — Т. 43, № 3. — С. 410-420.
- [2] **Араманович, И.Г.** Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. — М.: Наука, 1969. — 288 с.
- [3] **Апарцин, А.С.** Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А.С. Апарцин. — Новосибирск.: Наука, 1999. — 193 с.
- [4] **Апарцин, А.С.** Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода методом квадратурных сумм / А.С. Апарцин, А.Б. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения, 1972. — № 1 — С. 120-128.
- [5] **Балышев, О.А.** Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (теоретические и экспериментальные аспекты) / О.А. Балышев, Э.А. Таиров. — Новосибирск: Наука, 1998. — 164 с.
- [6] **Бахвалов, Н.С.** Численные методы / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1975. — 632 с.
- [7] **Бояринцев, Ю.Е.** Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 1980. — 222 с.
- [8] **Бояринцев, Ю.Е.** Замечание о неявной разностной схеме, аппроксимирующей систему уравнений Стокса / Ю.Е. Бояринцев, Т.П. Бояринцева

// Численные методы анализа и их приложения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1983. – С. 127-131.

- [9] **Бояринцев, Ю.Е.** Применение обобщенных обратных матриц к решению и исследованию систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка / Ю.Е. Бояринцев // Методы оптимизации и исследование операций. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1984. – С. 123-141.
- [10] **Бояринцев, Ю.Е.** Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
- [11] **Булатов, М.В.** Редукция вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра к невырожденным / М.В. Булатов // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 11. – С. 14-21.
- [12] **Булатов, М.В.** Численное решение систем интегральных уравнений Вольтера 1-го рода / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1998. – Т. 38, № 4. – С. 607-610.
- [13] **Булатов, М.В.** О нелинейных системах интегральных уравнений четвертого рода / М.В. Булатов // Тр. XI Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, 1998. – Т. 4. – С. 68-71.
- [14] **Булатов, М.В.** Об интегродифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной / М.В. Булатов // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 692-695.
- [15] **Булатов, М.В.** Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами / М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1248-1255.

- [16] Булатов, М.В. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально алгебраических уравнений высокого порядка / М.В. Булатов, М.Г. Ли // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1299-1305.
- [17] Булатов, М.В. Об одном семействе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, Е.В. Чистякова // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1665-1673.
- [18] Булатов, М.В. О применении многошаговых разностных схем для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИД-СТУ СО РАН, 2011. – С. 19.
- [19] Булатов, М.В. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / М.В. Булатов, О.С. Будникова // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 829–839.
- [20] Булатов, М.В. Об одном классе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2012. – С. 8.
- [21] Булатов, М.В. Многошаговые методы для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Тр. X междунар. Четаевской конф. – Казань, 2012. – Т. 1. – С. 81-85.
- [22] Булатов, М.В. Многошаговые методы для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Тез. докл. III междунар. школы-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2012. – С. 15.

- [23] **Булатов, М.В.** Исследование интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной главной частью / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Известия ИГУ. Серия Математика. – 2013. – № 1. – С. 14-20.
- [24] **Булатов, М.В.** Многошаговые методы для численного решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Малые Винеровские чтения: Материалы Всерос. молодежной науч. практ. конф. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2013. – С. 14.
- [25] **Булатов, М.В.** Методы типа Адамса для решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, До Тиен Тхань // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 93–106.
- [26] **Булатов М.В.** Интегральный метод для численного решения нелинейных сингулярных краевых задач / М.В. Булатов, До Тиен Тхань, П.М. Лима // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 5-13.
- [27] **Верлань, А.Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
- [28] **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
- [29] **Горбунов, В.К.** Метод нормальных сплайнов в вырожденных системах дифференциальных уравнений / В.К. Горбунов, В.В. Петрищев // Ученые записки Ул-ГУ. Сер. «Фундаментальные пробл. матем. и механ.». – 1997. – № 3. – С. 125-132.
- [30] **Горбунов, В.К.** Развитие метода нормальной сплайн-коллокации для линейных дифференциальных уравнений / В.К. Горбунов, В.В. Петрищев

- // Журн. вычисл. математики и матем. физики, 2003. – Т. 43, № 8. – С. 1150–1159.
- [31] **Келлер, А.В.** Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоуолтера-Сидорова / А.В. Келлер // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. – 2008. – № 27. – С. 50-56.
- [32] **Курина, Г.А.** Управление с обратной связью для линейных систем, не разрешенных относительно производной / Г.А. Курина // Автомат. и телемеханика – 1984. – № 6. – С. 37–41.
- [33] **Кузнецов, Е.Б.** Многомерная параметризация и численное решение систем нелинейных уравнений / Е. Б.Кузнецов // Журн. вычисл. математики и матем. физики – 2010. – Т. 50, № 2. – С. 255–267.
- [34] **Михайлов, В.Б.** Численно-аналитические методы моделирования аналоговых радиоэлектронных схем на ЭВМ: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / В.Б. Михайлов. – Москва, 1992. – 384 с.
- [35] **Осипов, Ю.М.** Анализ разветвленных цепей постоянного и переменного тока: Учеб. пособие / Ю.М. Осипов, Е.А. Петров. – СПб.: СПбГУИТМО, 2002. -- 54 с.
- [36] Программа автоматизированного решения сингулярных краевых задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка многошаговым методом : Свидетельство №2015619250 / До Тиен Тхань, М.В. Булатов. (RU); правообладатель ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (ИРНИТУ). – 2015619250; заявл. 01.07.2015 ; зарегистр. 27.08.2015, реестр программ для ЭВМ.
- [37] **Свиридюк, Г.А.** К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47-74.

- [38] **Свиридюк Г.А.** Линейные уравнения соболевского типа: Учеб. пособие / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. — Челябинск: Челяб. ун-т, 2002. — 179 с.
- [39] **Сенди, К.** Современные методы анализа электрических цепей / К. Сенди — М.: Энергия, 1971. — 360 с.
- [40] **Сидоров, Н.А.** А-присоединенные множества линейных операторов и их приложения к дифференциальным уравнениям / Н.А. Сидоров // Методы оптимизации и исследование операций: Краевые задачи. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1984. — С. 169-184.
- [41] **Сидоров, Н.А.** Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Матема. заметки. — 1984. — Т. 35, № 4. — С. 569-579.
- [42] **Сидоров, Н.А.** Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726-728.
- [43] **Тен Мен Ян.** Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Тен Мен Ян. — Иркутск, 1985. — 215 с.
- [44] **Тхань, Д.Т.** О численном решении вырожденных интегродифференциальных уравнений с применением параметризованных разностных схем / До Тиен Тхань, В.Ф. Чистяков // Материалы IV междунар. научной конф. ПМТУММ. — Воронеж, 2011. — С. 97-99.
- [45] **Тхань, Д.Т.** Численное решение сингулярных нелинейных интегродифференциальных уравнений второго порядка / До Тиен Тхань // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. — С. 21.

- [46] **Тхань, Д.Т.** Об многошаговых методах для интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью / До Тиен Тхань // Малые Винеровские чтения: Материалы всерос. молодежной науч.-практ. конф. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2014. – С. 48.
- [47] **Ушаков, Е.И.** Статическая устойчивость электрических систем / Е.И. Ушаков. – Новосибирск: Наука, 1988. – 273 с.
- [48] **Фалалеев, М.В.** Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Методы оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1992. – С. 184-185.
- [49] **Фалалеев, М.В.** Обобщенные функции и действия над ними. Учебное пособие / М.В. Фалалеев. – Иркутск: изд-во Иркутский гос. университет, 1996. – 81 с.
- [50] **Фалалеев, М.В.** Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Сибирский матем. журн. – 2000. – Т. 41, № 5 – С. 1167-1182.
- [51] **Федоров, В.Е.** Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Матема. сборник – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131-160.
- [52] **Хайрер, Э.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
- [53] **Хайрер, Э.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999. – 685 с.

- [54] **Чистяков, В.Ф.** О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В.Ф. Чистяков // *Функции Ляпунова и их применение*. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231-240.
- [55] **Чистяков, В.Ф.** Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.
- [56] **Чистякова, Е.В.** О свойствах разностных схем для вырожденных интегродифференциальных уравнений индекса 1 / Е.В. Чистякова // *Журн. вычисл. математики и матем. физики*. – 2009. – Т. 49, № 9. – С. 1-10.
- [57] **Чистякова, Е.В.** Методы исследования и решения вырожденных интегродифференциальных уравнений и их приложения : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Чистякова Елена Викторовна – Иркутск, 2007. – 113 с.
- [58] **Шароглазов, В.С.** К решению задачи Коши для линейных систем интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра с вырожденной матрицей при производной / В.С. Шароглазов // *Дифференциальные и интегральные уравнения*. – Иркутск: изд-во Иркутский гос. университет, 1980. – С. 98-106.
- [59] **Bock, H.G.** Differential-Algebraic Equations and their Connections to Optimization / H.G. Bock., J.P. Schloder, V.H. Schulz. – Interdisciplinary Center for Scientific Computing (IWR), 1996. – 188 p.
- [60] **Brenan, K.E.** Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equation / K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold – SIAM Classics in Applied Mathematics, 1996. – 256 p.
- [61] **Brunner, H.** The numerical solution of Volterra equations / H. Brunner, P.J. van der Houwen. – Amsterdam: North-Holland, CWI Monographs 3., 1986. – 588 p.

- [62] **Brunner, H.** 1896-1996: One hundred years of Volterra integral equations of the first kind / H. Brunner // *Applied Numerical Mathematics*. – 1997. – Vol. 24. – P. 83-93.
- [63] **Brunner, H.** Numerical solutions for second-kind Volterra integral equations by Galerkin methods / H. Brunner, Shu Hua Zhang, Yan Ping Lin, Ming Rao. – *Applications of Mathematics*. – 2000. – Vol. 45., №. 1. – P. 19-39.
- [64] **Brunner, H.** Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations / H. Brunner. – Cambridge University Press, 2004. – 612 p.
- [65] **Brunner, H.** Discrete superconvergence of collocation solutions for first-kind Volterra integral equations / H. Brunner, Hui Liang // *J. Integral Equations Applications*. – 2012. – Vol. 24. – P. 359-391.
- [66] **Bulatov, M.V.** Numerical Solution of the Density Profile Equation Using an Integral Method / M.V. Bulatov, P.M. Lima, D.T. Thanh // 6th International Conference on High Performance Scientific Computing. – Hanoi: Institute of Mathematics, 2015. – P. 46.
- [67] **Butcher, J.C.** Numerical Methods for Ordinary Differential Equations / J.C. Butcher. – John Wiley & Sons, Ltd, England, 2003. – 440 p.
- [68] **Cahn, J.W.** Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy / J.W. Cahn, J.E. Hilliard // *The Journal of Chemical Physics* – 1958. – Vol. 28. – P. 258-267.
- [69] **Campbell, S.** The numerical solution of higher index linear time varying singular systems of differential equations / S. Campbell // *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* – 1985. – Vol. 6. – P. 334-348.
- [70] **Campbell, S.** The index of general nonlinear DAEs / S. Campbell, C.W. Gear // *Numer. Math.* – 1995. – Vol. 72. – P. 173-196.

- [71] **Derrick, G.** Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles / G. Derrick // *J. Math. Phys.* – 1965. – Vol. 5. – P. 1252-1254.
- [72] **Kunkel, P.** Completions of nonlinear DAE flows based on index reduction techniques and their stabilization / S. L. Campbell, P. Kunkel // *J. Comput. Appl. Math.* – 2009. – Vol. 233. – P. 1021-1034.
- [73] **Dell’Isola, F.** Nucleation of spherical shell-like interfaces by second gradient theory: numerical simulations / F. Dell’Isola, H. Gouin, G. Rotoli // *European Journal of Mechanics - B/Fluids.* – 1996. – Vol. 15., № 4. – P. 545-568.
- [74] **de Hoog, F.R.** On the boundary value problem for systems of ordinary differential equations with a singularity of the second kind / F.R. de Hoog, R. Weiss // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* – 1980. – Vol. 11. – P. 41-60.
- [75] **de Hoog, F.R.** Collocation methods for singular boundary value problems / F.R. de Hoog, R. Weiss // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1978. – Vol. 15. – P. 198-217.
- [76] **Favini, A.** Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi – New York, Pure and Applied Mathematics, 1998. – 339 p.
- [77] **Gavrilyuk, S.L.** Media with equations of state that depend on derivatives / S.L. Gavrilyuk, S.M. Shugrin // *J. Appl. Mechanics and Technical Physics* – 1996. – Vol. 37. – P. 177-189.
- [78] **Gazzola, F.** Existence of ground states and free boundary problems for quasilinear elliptic operators / F. Gazzola, J. Serrin, M. Tang // *Adv. Differential Equations* – 2000. – Vol. 5. – P. 1-30.
- [79] **Gouin, H.** An analytical approximation of density profile and surface tension of microscopic bubbles for van der Waals fluids / H. Gouin, G. Rotoli // *Mechanics Research Communication.* – 1997. – Vol. 24. – P. 255-260.

- [80] **Gurtin, M.E.** Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter / M.E. Gurtin, D. Polignone, J. Vinals // *Math. Models Methods Appl. Sci.* – 1996. – Vol. 24. – P. 815-831.
- [81] **Hadizadeh, M.** Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index -2 / M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, S. Pishbin // *Appl. Numer. Math.*, 2011. – Vol. 61., № 1. – P. 131-148.
- [82] **Hairer, E.** Solving Ordinary Differential Equations. II. Stiff and Differential-Algebraic Problems / E. Hairer, G. Wanner – Berlin: Springer-Verlag, 1996 – 614 p.
- [83] **Hairer, E.** Long-Time Energy Conservation of Numerical Methods for Oscillatory Differential Equations / Hairer E., Ch. Lubich // *Journal SIAM Journal on Numerical Analysis.* – 2000. – Vol. 38. – P. 414-441.
- [84] **Hastermann, G.** Density profile equation with p-Laplacian: Analysis and numerical simulation / G. Hastermann, P.M. Lima, M.L. Morgado, E.B. Weinmuller // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2006. – Vol. 189. – P. 260-273.
- [85] **Huh, C.** Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line / C. Huh, LE Scriven // *Journal of Colloid and Interface Science.* – 1971. – Vol. 35 – P. 85-101.
- [86] **Higuera, I.** Stability preserving integration of index-1 DAEs / , R. Marz, C. Tischendorf // *Appl. Num. Math* – 2003. – Vol. 45. – P. 175-200.
- [87] **Ixaru, L.Gr.** Exponential Fitting / L.Gr. Ixaru, Vanden Berghe G. – Kluwer Academic publishers, Netherlands, 2004. – 308 p.

- [88] **Kitzhofer, G.** Efficient numerical solution of the density profile equation in hydrodynamics / G. Kitzhofer, O. Koch, P.M. Lima, E. Weinmuller // Journal of Scientific Computing. – 2007. – Vol. 32. – P. 411-424.
- [89] **Kitzhofer, G.** Pathfollowing for Essentially Singular Boundary Value Problems with Application to the Complex Ginzburg-Landau Equation / G. Kitzhofer, O. Koch, E. B. Weinmuller // BIT Numer Math. – 2009. – Vol. 49. – P. 217-245.
- [90] **Kunkel, P.** Regular solutions of nonlinear differential-algebraic equations and their numerical determination / P. Kunkel, V. Mehrmann // Numer. Math. – 1998. – Vol. 79. – P. 581-600.
- [91] **Kunkel, P.** Index reduction for differential-algebraic equations by minimal extension / P. Kunkel, V. Mehrmann // Z. Angew. Math. Mech. – 2004. – Vol. 84. – P. 579-597.
- [92] **Konyukhova, N.B.** Bubbles and droplets in nonlinear physics models: analysis and numerical simulation of singular nonlinear boundary value problems / N.B. Konyukhova, P.M. Lima, M.L. Morgado, M.B. Soloviev // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 48. – P. 2018-2058.
- [93] **Kulikov, G.Yu.** Analysis and accurate numerical approximation of singular boundary value problems with p-Laplacians in fluid mechanics / G.Yu. Kulikov, P.M. Lima, M.L. Morgado // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 262. – P. 87-104.
- [94] **Kumar, F.J.** Curvature dependence of surface free energy and nucleation kinetics of CCl₄ and C₂H₂Cl₄ vapours / F.J. Kumar, D. Jayaraman, C. Subramanian, P. Ramasamy // Journal of Materials Science Letters. – 1991. – Vol. 10. – P. 608-610.
- [95] **Linz, P.** Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations / P. Linz. – SIAM, Philadelphia, 1985. – 227 p.

- [96] **Lima, P.M.** Analytical numerical investigation of bubble-type solutions of nonlinear singular problems / P.M. Lima, N.B. Konyukhova, A.I. Sukov, N.V. Chemetov // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 189. – P. 260-273.
- [97] **Marz, R.** Linear differential algebraic equations and their adjoint equations / R. Marz, K. Balla // Results Math. – 2000. – Vol. 37. – P. 13-35.
- [98] **Rabier, P.J.** A general existence and uniqueness theory for implicit differential–algebraic equations / P.J. Rabier, W.C. Rheinboldt// Differential Integral Equations. – 1991. – Vol. 4. – P. 563-582.
- [99] **Thanh, D.T.** Numerical solution of integral differential equation with singularities/ Thanh Do Tien // International seminar «Numerical solution of integral and differential equations» – Irkutsk: Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 2014. – P. 5.
- [100] **Weinmuller, E.** A collocation code for boundary value problems in ordinary differential equations / E. Weinmuller, W. Auzinger, G. Kneisl, O. Koch // Numer. Algorithms. – 2003. – Vol.33. – P. 27-39.
- [101] **Weinmuller, E.** Analysis of a new error estimate for collocation methods applied to singular boundary value problems / E. Weinmuller, W. Auzinger, O. Koch // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – Vol. 42. – P. 2366-2386.

Приложение А

Программа решения сингулярных краевых задач для моделей пузыря в неоднородной жидкости на основе теории вырожденных интегро-дифференциальных уравнений

Листинг А.1: Метод первого порядка

```
function [ierr,xf,r] = ImplicitEuler(x0,xi,lam,n, h, imax)
% given a certain x0 and t(imax) , this function computes
% the vector x with components x(i), i=0, imax+1;
% by the Euler Implicit Methor (right rectangles rule )
%  $x(i+1) - h^2 * f(x(i+1)) = x(i) + h^2 / t(i+1)^{(n-1)}$ 
%  $\sum_{j=0}^i (\tau(j))$ 
% for each i , x(i+1) is the solution of a nonlinear equation
% if for a certain  $i \leq imax$  we obtain a non-admissible of x(i)
% ( $x(i) > xi$ ) then the parameter err takes the value 1
% x(i) contains the approximate value of x((i-1)h)

x(1)=x0;
ierr=-1;
i=2;
sumold=0;
sum=0;
while(ierr==-1 && i<=imax+1)
%if i=2 the sum is 0
    if (i>2)
        sum=sumold+(h*(i-2))^(n-1)*f(x(i-2),lam,xi);
    end
```

```

% iterative method
xold=x(i-1)+h^2*sum;
xnew=x(i-1)+h^2/((i+1)*h)^(n-1)*sum+h^2*f(xold,lam,xi);
it=1;
while (abs(xnew-xold)>1e-10 && it<100)
    xold=xnew;
    xnew=x(i-1)+h^2/((i+1)*h)^(n-1)*sum+h^2*f(xold,lam,xi);
    it=it+1;
end
% end iterative method
x(i)=xnew;
if (x(i)>0 && x(i-1)<0)
    iRadius=i;
end;
sumold=sum;
if(x(i)>xi)
    ierr=1;
end;
i=i+1;
end
xf=x;
r=iRadius;

```

Листинг А.2: Метод второго порядка

```

function [ierr,xf2,r2] = ImplicitSecond(x0,xi,lam,n,h,imax)
% given a certain x0 and t(imax) , this function computes
% the vector x with components x(i), i=0, imax+1;
% by an Implicit Method of Second Order;
% (3 x(i+2)-4 x(i+1)+x(i))= 1/ t(i+1)^(n-1) sum_j=0^i *

```

```

%  $t(j)^{(n-1)h} * x(j)$ 
%for each  $i$  ,  $x(i+1)$  is the solution of a nonlinear equation
% if for a certain  $i \leq imax$  we obtain a non-admissible of
%  $x(i)$  ( $x(i) > xi$ ) then the parameter  $err$  takes the value 1
% $x(i)$  contains the approximate value of  $x((i-1)h)$ 
%global x;
x(1)=x0;
ierr=-1;
i=3;
x(2)=x0+h^2 / (2*n)* f(x0 , lam , xi) ;
% $x(2) = x0$ ;
if (n==1)
    sumold=h/2* f(x0 , lam , xi );
else
    sumold=0;
end
sum=0;
while (ierr==-1 && i<=imax+1)
%iterative method
xold=x(i-1)+h^2*sum;
t2=((i-1)*h)^(n-1);
t1=((i-2)*h)^(n-1);
f1=f(x(i-1),lam , xi)*t1 ;
sum=sumold + h*f1 ;
xnew=2*h/3*(h/2* f(xold , lam , xi)+2*x(i-1)/h-x(i-2)/(2*h)+
    sum/t2 );
it=1;
while (abs(xnew-xold)>1e-10 && it <100)

```

```

xold=xnew;
xnew=2*h/3*(h/2*f(xold,lam,xi)+2*x(i-1)/h-x(i-2)/(2*h)+
    sum/t2);
it=it+1;
end
x(i)=xnew;
if (x(i)>0 && x(i-1)<0)
    iRadius=i;
end;
sumold=sum;
if (x(i)>xi)
    ierr=1;
end;
i=i+1;
end
xf2=x;
r2=iRadius;

```

Листинг А.3: Метод стрельбы (первый порядок)

```

function [xfind,err,it] = bissecequ(a,b,tol,xi,lam,n,h,imax)
% shooting method with implicit euler
% parameters to enter: [a,b] (interval) , tol
% parametr to find out: x (approximate solution),
%err (estimate error)
b1=b;
a1=a;
it=1;
fa=ImplicitEuler(a,xi,lam,n,h,imax);
fb=ImplicitEuler(b,xi,lam,n,h,imax);

```

```

x=(b1-a1)/2+a1; %%% the same as (a1+b1)/2
err=(b1-a1)/2;
if ( fa*fb >0)
    disp ( ' f(a)* f(b) должно быть отрицательным! ');
    msgbox ( ' a, b должны лежить в (-1,0). Выберите
    промежуток [ a, b ] побольше ', 'Ошибка входных данных ', 'Warn' )
    return
end
while ( err > tol && it < 40)
    f=ImplicitEuler ( x, xi, lam, n, h, imax );
    if ( fa*f < 0)
        b1=x;
        fb=f;
    else
        a1=x;
        fa=f;
    end;
    x=(b1-a1)/2+a1;
    err=(b1-a1)/2;
    it=it+1;
end
f=ImplicitEuler ( x, xi, lam, n, h, imax );
it=1;
while ( f < 0 && it < 10 )
    f=ImplicitEuler ( x, xi, lam, n, h, imax );
    if f < 0
        x=(x+a1)/2;
    end;

```

```

    it=it+1;
end;
xfind=x;

```

Листинг А.4: Метод стрельбы (второй порядок)

```

function [xfind , err , it ]=bisseccsecond ( a , b , tol , xi , lam , n , h , imax )
% shooting method with implicit euler
% parameters to enter: [a,b] (interval) , tol
% parametr to find out: x (approximate solution),
% err (estimate error)
a1=a;
b1=b;
it=1;
fa=ImplicitSecond ( a , xi , lam , n , h , imax );
fb=ImplicitSecond ( b , xi , lam , n , h , imax );
x=(b1-a1)/2+a1;
err=(b1-a1)/2;
if ( fa*fb > 0)
    disp ( ' f ( a ) * f ( b ) _ должно _ быть _ отрицательным ! ' );
    msgbox ( ' a , b _ должны _ лежить _ в _ ( - 1 , 0 ) . _ Выберите
    _ _ промежуток _ [ a , b ] _ побольше ' , ' Ошибка _ входных _ данных ' , ' Warn ' )
    return
end
while ( err > tol && it < 40)
    f=ImplicitSecond ( x , xi , lam , n , h , imax );
    if ( fa*f < 0)
        b1=x;
        fb=f;
    else

```

```

        a1=x;
        fa=f;
    end;
    x=(b1-a1)/2+a1;
    err=(b1-a1)/2;
    it=it+1;
end
f=ImplicitSecond(x,xi,lam,n,h,imax);
it=1;
while (f<0 && it<10 )
    f=ImplicitSecond(x,xi,lam,n,h,imax);
    if f<0
        x=(x+a1)/2;
    end;
    it=it+1;
end;
xfind=x;

```

Листинг А.5: Функция для вывода графиков и расчетов

```

function CalBtn_Callback(hObject, eventdata, handles)
global count;
global h1plot;
global MatBis;
clc;
xi=str2double(get(findobj('Tag','edtXi'),'String'));
lam=1;
n=3;
h=str2double(get(findobj('Tag','edtH'),'String'));
imax=str2double(get(findobj('Tag','edtImax'),'String'));

```



```

numStep=n/h;
a=str2double( get( findobj( 'Tag', 'edita' ), 'String' ));
b=str2double( get( findobj( 'Tag', 'editb' ), 'String' ));
tol=str2double( get( findobj( 'Tag', 'editTol' ), 'String' ));
switch get( get( handles.PanelMethod, 'SelectedObject' ), 'Tag')
    case 'rButImplicit1',
        [rho_0, err, it ] = bissecequ(a,b,tol, xi, lam, n, h, imax );
        disp(rho_0);
        [ ierr, xmax, r ] = ImplicitEuler(rho_0, xi, lam, n, h, imax );
        t= 0:h:( length(xmax)-1)*h;
        h1plot=plot(t, xmax);
        grid on;
        xlabel( 'Радиус_пузыря', 'Color', [0,0.7,0.9]);
        ylabel( 'Плотность', 'Color', [0,0.7,0.9]);
        title( 'График_радиуса_пузыря_как_функции_от_плотности',
            'Color', 'red', 'FontSize', 14);
        MatBis(count,1)=1;
    case 'rButImplicit2',
        [rho_0, err, it ]=bisseccsecond(a,b,tol, xi, lam, n, h, imax );
        disp(rho_0);
        [ ierr, xmax, r]=ImplicitSecond(rho_0, xi, lam, n, h, imax );
        t= 0:h:( length(xmax)-1)*h;
        %h1plot=plot(t, xmax, t, sin(t));
        plot(t, xmax, t, sin(t));
        grid on;
        xlabel( 'Радиус_пузыря', 'Color', [0,0.7,0.9]);
        ylabel( 'Плотность', 'Color', [0,0.7,0.9]);
        title( 'График_радиуса_пузыря_как_функции_от_плотности',

```

```

        'Color', 'red', 'FontSize', 14);
    MatBis(count, 1) = 2;
otherwise, res = '';
end;
MatBis(count, 2) = h;
MatBis(count, 3) = xi;
MatBis(count, 4) = str2double(sprintf('%0.8f', rho_0));
MatBis(count, 5) = r * h;
count = count + 1;
set(handles.tblBis, 'Visible', 'on');
set(handles.tblBis, 'Data', MatBis);
set(handles.tblBis, 'ColumnName', { 'Поряд_метод' , ...
    'Шаг' , ...
    'Плотность' , ...
    'Нач._значение_X_0' , ...
    'Радиус_пузыря' });

```