На правах рукописи

Дабаева Мария Жалсановна

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ, НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Улан-Удэ - 2015

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления» (ФГБОУ ВПО ВСГУТУ)

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Мижидон Арсалан Дугарович**
Официальные оппоненты:	**Булатов Михаил Валерьянович,** доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, главный научный сотрудник **Цыдыпов Балдандоржо Дашиевич,** доктор технических наук, доцент ФГБУН Институт физического материаловедения СО РАН, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический университет», г. Иркутск

Защита диссертации состоится «23» декабря 2015 г. в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 212.022.10 при ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет» по адресу: 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет», по адресу г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4а, а также на сайте http://www.bsu.ru/?mod=disser.

Автореферат разослан « ___» _________ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Дармаев Тумэн Гомбоцыренович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. При исследовании механических колебаний элементов различных объектов современной техники во многих случаях расчетными схемами исследования может рассматриваться твердое тело (или система твердых тел) соединенное упругими связями со стержнем. В частности, такие расчетные схемы могут быть использованы при исследовании систем виброзащиты объектов, установленных на упругом основании (например, на балке Эйлера-Бернулли). Отметим, в настоящее время в рамках существующих теорий трудно строго исследовать вопросы динамики механических систем, содержащих как объекты с сосредоточенными параметрами, так и объекты с распределенными параметрами. С одной стороны, соответствующие теории для этих объектов изначально изложены на различных, порой трудно совместимых языках. С другой стороны, применение вариационного принципа Гамильтона для построения уравнений динамики общего для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами приводит к рассмотрению гибридных систем дифференциальных уравнений, исследованию которых в настоящее время не уделено должное внимание. Под гибридными системами дифференциальных уравнений понимается система дифференциальных уравнений, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Таким образом, разработка строгих научно-обоснованных методов исследования гибридных систем дифференциальных уравнений, описывающих колебания механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, является актуальной научной проблемой. В частности, актуальной представляется разработка обобщенных математических моделей, представляющих собой класс математических моделей систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к стержню, и методов исследования собственных колебаний на их основе. Под обобщенной математической моделью понимается система гибридных дифференциальных уравнений заданной структуры, описывающая динамику различных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к стержню.

Предметом исследований является построение обобщенной математической модели, описывающей класс математических моделей систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к стержню, и на ее основе разработка теоретических основ исследования их собственных колебаний.

Методы исследований. При выполнении исследований использованы вариационные принципы механики, методы теоретической механики, теории стержней, теории колебаний, теории дифференциальных уравнений и обобщенных функций.

Цель работы и задачи исследования. Целью работы является построение теоретических основ исследования собственных колебаний системы взаимосвязанных твердых тел, соединенных с помощью упругих связей со стержнем (балка Эйлера-Бернулли) на основе обобщенных математических моделей.

В соответствии с поставленной целью решаются **следующие задачи**:

1. построение обобщенной математической модели взаимосвязанной системы твердых тел, соединенных с балкой Эйлера-Бернулли;
2. разработка единого аналитико-численного метода построения частотного уравнения исследуемых систем;
3. обобщение аналитико-численного метода построения частотного уравнения на случай учета демпфирования в упругих связях в обобщенной математической модели;
4. развитие общего подхода исследований собственных колебаний на случай вынужденных колебаний при гармоническом возмущении.

Научная новизна. Впервые рассмотрена обобщенная математическая модель, описывающая систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли, на основе которой разработан единый аналитико-численный метод построения частотного уравнения для данного класса механических систем. В рамках развиваемого подхода проведен учет демпфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертация соответствует паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и ее областям: п. 1.2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»; п. 1.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; п. 1.5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Теоретическая и практическая значимость работы. Впервые предложена обобщенная математическая модель, представляющая собой класс математических моделей различных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли. Разработаны аналитико-численные методы исследования собственных колебаний систем, описываемых обобщенной математической моделью. Разработанный метод исследования собственных колебаний систем реализован в виде комплекса программ. В целом полученные результаты позволяют провести исследование собственных колебаний элементов различных машин и механизмов, расчетные модели, которых представимы в виде некоторой взаимосвязанной системы твердых тел, соединенной упругими связями с балкой Эйлера-Бернулли.

Степень достоверности. Все исследования диссертационной работы были проведены в рамках общепринятых допущений и предположений. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием и подтверждается проведенным сравнительным анализом собственных частот, найденных методами, разработанными в диссертационной работе, с решениями конкретных задач из литературных источников, для некоторых частных расчетных схем.

Апробация результатов работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на Всероссийских научно-практических конференциях «Авиамашиностроение и транспорт Сибири» (Иркутск, 2013), «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии» (Кемерово, 2014); Международных конференциях «Математика, ее приложения и математическое образование» (Улан-Удэ, 2011, 2014), «Проблемы механики современных машин» (Улан-Удэ, 2012, 2015), а также на ежегодных научно-практических конференциях Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, научных семинарах кафедры «Прикладная математика» ВСГУТУ, г. Улан-Удэ (2010-2015).

Публикации. По тематике исследований опубликовано 13 научных работ. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 10 научных работах, включая статьи в журналах и трудах конференций, из которых 4 в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ для опубликования результатов диссертационных работ. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад. Результаты диссертационной работы опубликованы в статьях [1-10]. В работе [1] диссертантом построена математическая модель. В публикациях [2-4], выполненных в соавторстве с научным руководителем, диссертант участвовал от постановки задачи до получения результатов и является полноценным соавтором. В работах [6-8] вклад диссертанта – основной. В свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ [5] личный вклад заключается в разработке алгоритмического обеспечения.

Работа выполнялась согласно плану НИР ФГБОУ ВПО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления» в рамках научного направления университета «Методы математического моделирования, оптимизация и управление» (2010-2015); планам работ по грантам РФФИ «Алгоритмическое и программное обеспечение решения задач автоматизации проектирования виброзащитных систем», № 12-08-00309а; «Теоретические основы математического моделирования системы твердых тел и стержней», № 15-08-00973а.

Общая характеристика работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет

139 страниц, 5 таблиц, 19 рисунков. Список литературы содержит 104 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность и цель диссертационной работы. Отмечается новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Описывается краткое содержание диссертации.

В первой главе дан обзор современного состояния исследуемой проблемы. Также приведены основные математические понятия и факты моделирования механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, положенные в методическую основу проведенных исследований. В частности, даются понятия обобщенной функции и обобщенного решения дифференциального уравнения, рассмотрены вариационные принципы механики.

С целью иллюстрации методики проводимых в диссертационной работе исследований рассмотрен пример исследования простейшей механической системы с сосредоточенными и распределенными параметрами, представляющей собой механическую систему (рис. 1), состоящую из массы m, установленной с помощью пружины жесткости c на упругом стержне, концы которого жестко закреплены. Перемещение точек стержня описывается функцией $u(x,t)$.

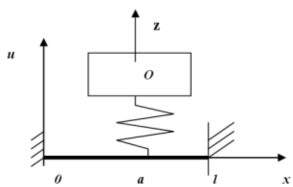

Рис. 1 – Механическая система «упругий стержень с упруго-присоединенной массой»

Использование вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, который справедлив, как для систем с сосредоточенными, так и для систем с распределенными параметрами приводит к системе гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + c\left(z - u\left(a,t\right)\right) = 0, \\ \rho F \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c\left(z - u\left(x,t\right)\right)\delta\left(x-a\right). \end{cases}$$

Для исследования собственных колебаний используется единый подход, развиваемый во второй главе диссертационной работы.

Во второй главе на основе построения и анализа конкретных систем гибридных дифференциальных уравнений, описывающих динамику типовых механических систем, предложена обобщенная математическая модель балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными на нем с помощью упругих связей системой твердых тел. Приведены необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой аналитико-численного метода исследования колебательных процессов в системах, описываемых обобщенной математической моделью.

Обобщенная математическая модель представляет собой гибридную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + b\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i (d^{iT} z(t) - u(x,t))\delta(x - a_i), \end{cases} \tag{1}$$

где $z(t) - n$-мерная вектор-функция; $u(x,t)$ – скалярная функция; $\bar{u}(t)$ – m-мерная вектор-функция с компонентами $u(a_1,t),\cdots,u(a_m,t)$; A, B – заданные, постоянные $n \times n$ – матрицы; C – заданная, постоянная $n \times m$ – матрица; D – заданная, постоянная $m \times n$ – матрица; d^i – n- мерный вектор, составленный из строк матрицы D; $k,\ b,\ a_i,\ q_i,\ \ (i = \overline{1,m})$ – заданные постоянные, причем $0 \le a_i \le l$; $()^T$ – здесь и ниже операция транспонирования.

Отметим, что данная система описывает любую произвольную систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных к упругому стержню – балке Эйлера-Бернулли.

Например, рассмотрим механическую систему (рис. 2), состоящую из трех масс m_1, m_2, m_3.

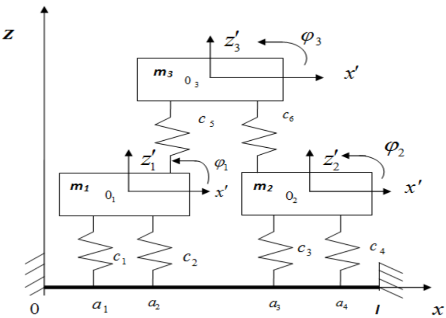

Рис. 2 – Механическая система твердых тел, прикрепленных к стержню

Твердые тела m_1 и m_2 присоединены горизонтально к упругому стержню с помощью пружин жесткости c_1, c_2 и c_3, c_4 соответственно, а тело m_3 каскадно-присоединено к m_1 и m_2 с помощью пружин жесткости

c_5 и c_6. Для данной системы вывод уравнений движения, на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, приводит к следующей системе гибридных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -m_1\ddot{z}_{01}-c_1(z_{01}+z_1'-d_1\varphi_1-u(a_1,t))-c_2(z_{01}+z_2'-d_2\varphi_1-u(a_2,t))+ \\ +c_5\left(z_{03}+z_5'-d_5\varphi_3-\left(z_{01}-d_{13}\varphi_3\right)\right)=0 \\ -m_2\ddot{z}_{02}-c_3(z_{02}+z_3'-d_3\varphi_2-u(a_3,t))-c_4(z_{02}+z_4'-d_4\varphi_2-u(a_4,t))+ \\ +c_6\left(z_{03}+z_6'-d_6\varphi_3-\left(z_{02}-d_{32}\varphi_3\right)\right)=0, \\ -m_3\ddot{z}_{03}-c_5\left(z_{03}+z_5'-d_5\varphi_3-\left(z_{01}-d_{13}\varphi_3\right)\right)-c_6\left(z_{03}+z_6'+d_6\varphi_3-\left(z_{02}-d_{32}\varphi_3\right)\right)=0, \\ -I_{\varphi_1}\ddot{\varphi}_1+c_1d_1(z_{01}+z_1'-d_1\varphi_1-u(a_1,t))+c_2d_2(z_{01}+z_2'-d_2\varphi_1-u(a_2,t))=0, \\ -I_{\varphi_2}\ddot{\varphi}_2+c_3d_3(z_{02}+z_3'-d_3\varphi_2-u(a_3,t))+c_4d_4(z_{02}+z_4'-d_4\varphi_2-u(a_4,t))=0, \\ -I_{\varphi_3}\ddot{\varphi}_3-c_5\left(-d_5+d_{13}\right)\left(z_{03}+z_5'-d_5\varphi_3-\left(z_{01}-d_{13}\varphi_3\right)\right)- \\ -c_6\left(-d_6+d_{32}\right)\left(z_{03}+z_6'-d_6\varphi_3-\left(z_{02}-d_{32}\varphi_3\right)\right)=0, \\ \rho F\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=c_1(z_{01}+z_1'-d_1\varphi_1-u(a_1,t))\delta\left(x-a_1\right)+c_2(z_{01}+z_2'-d_2\varphi_1-u(a_2,t))\delta\left(x-a_2\right)+ \\ +c_3(z_{02}+z_3'-d_3\varphi_2-u(a_3,t))\delta\left(x-a_3\right)+c_4(z_{02}+z_4'-d_4\varphi_2-u(a_4,t))\delta\left(x-a_4\right), \end{cases}$$

где d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6 − соответственно расстояния от осей $0_1'z_1'$, $0_2'z_2'$, $0_3'z_3'$ до осей пружин прикрепленных к стержню в точках a_1,a_2,a_3,a_4; $I_{\varphi_1},I_{\varphi_2},I_{\varphi_3}$ – момент инерции твердых тел относительно центра масс при повороте на угол $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$; z_{01}, z_{02},z_{03} − центры масс подвижных систем; z_1', z_2',z_3',z_4',z_5',z_6' − компоненты координат точек крепления упругих элементов к телу.

Данная гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая механическую систему (рис. 2), является частным случаем системы (1), при этом матрицы A, B, C, D и постоянные из (1) для данной системы могут быть записаны следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} -m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\varphi_3} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ z_{03} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} -c_1 & -c_2 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & -c_4 & 0 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & -c_6 \\ c_1 d_1 & c_2 d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 d_3 & c_4 d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5\left(-d_5+d_{13}\right) & -c_6\left(-d_6+d_{32}\right) \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -d_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -d_4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -d_5+d_{13} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -d_6+d_{32} \end{pmatrix},\ \bar{u}(t)=\begin{pmatrix} u\left(a_1,t\right) \\ u\left(a_2,t\right) \\ u\left(a_3,t\right) \\ u\left(a_4,t\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$k=\rho F,\quad b=EI,\ q_1=c_1,\ \ q_2=c_2,\ q_3=c_3,\ q_4=c_4,\ q_5=c_5,\ q_6=c_6,$$

$$d^{1\prime}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -d_1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ d^{2\prime}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -d_2 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$d^{3\prime}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & -d_3 & 0\end{pmatrix},\ d^{4\prime}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & -d_4 & 0\end{pmatrix},$$

$$d^{5\prime}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -d_5+d_{13}\end{pmatrix},\ d^{6\prime}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -d_6+d_{32}\end{pmatrix}.$$

Если считать, что в (1) функция $u(x,t)$ описывает поперечные перемещения точек стержня, то в соответствии с этим на функцию $u(x,t)$ следует наложить граничные условия, соответствующие тем или иным способам закрепления концов.

В частности, в случае жесткой заделки на концах имеем

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0. \tag{2}$$

Введем понятие обобщенного решения гибридной системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющей краевым условиям (2).

Для этого рассмотрим множество основных вектор-функций

$$K=\left\{\left(y(\cdot),v(\cdot,\cdot)\right)^T:\ \ y(\cdot)\in C^n_{\infty,[0,T]},\ \ v(\cdot,\cdot)\in C_{\infty,\infty,\,D}\right\},$$

где $D=\left\{(x,t)\in R^2:\ 0\le x\le l,\ \ 0\le t\le T\right\}$ − прямоугольник; $C^n_{\infty,[0,T]}$ − пространство n-мерных вектор-функций, заданных на отрезке $\left[0,T\right]$ и имеющих непрерывные производные любого порядка; $C_{\infty,\infty,\,D}$ − пространство функций, двух переменных, заданных на прямоугольнике D и имеющие непрерывные частные производные любого порядка.

Определение 1. Вектор-функцию $z(\cdot)\in C^n_{2,[o,T]}$, скалярную функцию $u(\cdot,\cdot)\in C_{4,2,D}$ назовем обобщенным решением краевой задачи для гибридной системы дифференциальных уравнений (1), если функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям краевой задачи и для любой основной вектор-функции $\left(y(\cdot),v(\cdot,\cdot)\right)^T\in K$ имеет место тождество

$$\int_0^T\left(A\ddot{z}+Bz+C(Dz-\overline{u}),\ y(t)\right)dt+$$

$$+\iint_D\left(k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\sum_{i=1}^m q_i(d^{i\prime}z(t)-u(x,t))\delta(x-a_i)\right)\cdot v(x,t)dxdt=0.$$

Подставив в систему (1) $z(t),\ u(x,t)$ в виде

$$z(t)=Z\sin\omega t,\qquad u(x,t)=V(x)\sin\omega t,$$

где $\omega-$ собственная частота, $Z-n$-мерный вектор амплитуд колебаний масс, $V(x)-$ амплитуда колебаний точек упругого стержня, после преобразований получим алгебраическо-дифференциальную систему

$$(-\omega^2A+B+CD)\,Z-C\overline{V}=0, \tag{3}$$

$$-\omega^2kV(x)+b\frac{d^4V(x)}{dx^4}=\sum_{i=1}^m q_i(d^{i\prime}Z-V(x))\delta(x-a_i), \tag{4}$$

где $\overline{V}-\ m$-мерный вектор с компонентами $V(a_1),\cdots,V(a_m)$.

В случае граничных условий (2) функция $V(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$V(0)=V(l)=0,\ \ \frac{dV}{dx}(0)=\frac{dV}{dx}(l)=0. \tag{5}$$

Определение 2. Функцию $V(\cdot)\in C_{4,[0,T]}$ и вектор $Z\in R^n$ назовем обобщенным решением вспомогательной краевой задачи для алгебраическо-дифференциальной системы (3)-(4), если они удовлетворяют системе алгебраических уравнений (3), функция $V(x)$ удовлетворяет заданному граничному условию и для любой компоненты $v(\cdot,\cdot)$ основной вектор-функции $\left(y(\cdot),v(\cdot,\cdot)\right)^T\in K$, при любом $t\in[0,T]$ имеет место следующее тождество

$$\int_0^l\left(-\omega^2kV(x)+b\frac{d^4V(x)}{dx^4}-\sum_{i=1}^m q_i(d^{i\prime}Z-V(x))\delta(x-a_i)\right)\cdot v(x,t)dx=0.$$

Теорема 1. При любых значениях ω и Z для обобщенного решения $V(x)$ дифференциального уравнения (4) справедливо представление

$$V(x)=\sum_{i=1}^{m}G_i(x-a_i)q_i(d^{i\prime}Z-V(a_i)), \qquad (6)$$

где функции $G_i(x),\ (i=1,...,m)$ обобщенные решения уравнения

$$-\omega^2 kG_i(x)+b\frac{d^4G_i(x)}{dx^4}=\delta(x), \qquad (i=1,...,m).$$

Следствие 1. Если обобщенные решения $G_i(x),\ (i=1,...,m)$ уравнения (10) удовлетворяют краевым условиям

$$G_i(-a_i)=G_i(l-a_i)=0, \quad \frac{dG_i}{dx}(-a_i)=\frac{dG_i}{dx}(l-a_i)=0, \quad (i=1,...,m), \qquad (7)$$

то функция $V(x)$, удовлетворяющая представлению (6), является обобщенным решением дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям (5).

Для нахождения функций $G_1(x),G_2(x),...,G_m(x)$, входящих в (6) имеем m краевых задач для уравнения

$$-\omega^2 kG(x)+b\frac{d^4G(x)}{dx^4}=\delta(x), \qquad (8)$$

с одним из граничных условий, в зависимости от конкретного вида условий, накладываемых в рассматриваемой задаче.

Обобщенное решение дифференциального уравнения (8) запишем в виде

$$\bar{V}(x)=G_0(x)=c_1S_1(\beta x)+c_2S_2(\beta x)+c_3S_3(\beta x)+c_4S_4(\beta x)+\theta(x)\frac{S_4(\beta x)}{b\beta^3},$$

где $S_1(\beta x),S_2(\beta x),S_3(\beta x),S_4(\beta x)$ – функции Крылова; $\beta=\frac{\sqrt{\omega}\cdot\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{b}}$;

$\theta(x)$ − классическая функция Хэвисайда; c_1, c_2, c_3, c_4 – постоянные интегрирования, найденные из условий выполнения соответствующих граничных условий.

Принимая в (6) последовательно значения $x=a_1$, $x=a_2,\ldots,$ $x=a_m$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $V(a_1),V(a_2)...,V(a_m)$, которую, используя матричные обозначения, можно записать в виде

$$M\bar{V}=NZ, \qquad (9)$$

где $\bar{V}$ – m-мерный вектор с компонентами $V(a_1),\cdots,V(a_m)$; M – матрица системы размерности $m\times m$:

$$M=\begin{pmatrix} 1+G_1(0)q_1 & G_2(a_1-a_2)q_2 \ldots\ldots\ldots G_m(a_1-a_m)q_m \\ G_1(a_2-a_1)q_1 & 1+G_2(0)q_2 \ldots\ldots\ldots\ldots G_m(a_2-a_m)q_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_1(a_m-a_1)q_1 & G_2(a_m-a_2)q_2 \ldots\ldots\ldots\ldots 1+G_m(0)q_m \end{pmatrix},$$

$N-$ матрица размерности $m\times n$

$$N=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m}G_i(a_1-a_i)q_id_1^i & \sum_{i=1}^{m}G_i(a_1-a_i)q_id_2^i \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m}G_i(a_1-a_i)q_id_n^i \\ \sum_{i=1}^{m}G_i(a_2-a_i)q_id_1^i & \sum_{i=1}^{m}G_i(a_2-a_i)q_id_2^i \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m}G_i(a_2-a_i)q_id_n^i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sum_{i=1}^{m}G_i(a_m-a_i)q_id_1^i & \sum_{i=1}^{m}G_i(a_m-a_i)q_id_2^i \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m}G_i(a_m-a_i)q_id_n^i \end{pmatrix}.$$

Объединив (9) с системой (3), получим систему линейных, однородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд Z и $\overline{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2A+B+CD)Z-C\overline{V}=0, \\ NZ-M\overline{V}=0. \end{cases} \tag{10}$$

Приравняв определитель системы (10) к нулю, получим уравнение собственных частот

$$\det\begin{pmatrix} -\omega^2A+B+CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix}=0.$$

Произведены исследования собственных колебаний ряда типовых схем систем твердых тел, прикрепленных к упругому стержню. В частности, для механической системы, состоящей из массы m, установленной с помощью двух пружин жесткости c_1 и c_2 на упругом стержне (рис. 3) произведен сравнительный анализ с расчетами, приведенными в литературе.

.

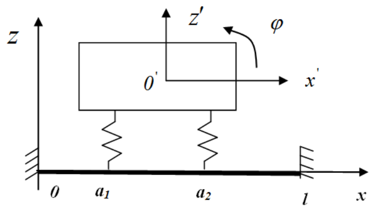

Рис. 3. – Твердое тело с двумя степенями свободы, установленное на стержне с помощью двух пружин.

В таблице 1 показаны результаты проведенного расчета, а также результаты расчета тремя методами, рассмотренными в статьях[1]. Из таблицы 1 видно хорошее совпадение полученных результатов

Таблица 1 – Сравнительный анализ

$\omega_i,\ rad \cdot s^{-1}$	Метод Wu J.-J Whittaker A.R.[1 (2)]	МКЭ	Подход Philip D. Cha [1 (1)]	Предлагаемый подход
ω_1	273.8904	273.8565	273.8892	273.8564
ω_2	1388.6244	1388.5937	1388.6073	1388.5914
ω_3	2880.5511	2879.7694	2880.0323	2879.7628
ω_4	4222.2172	4221.9181	4221.9610	4221.8472
ω_5	7837.1068	7837.4548	7836.9696	7836.9522

Метод исследования реализован в виде комплекса программ по расчету собственных колебаний механических систем, представляющих собой упругий стержень с закрепленными краями и прикрепленными на нем с помощью упругих связей системой твердых тел.

В третьей главе произведен учет демпфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели и развит аналитико-численный метод исследования свободных колебаний на этот случай. Также произведено обобщение методики исследования свободных колебаний механической системы «балка Эйлера-Бернулли» с прикрепленными твердыми телами на случай вынужденных колебаний при гармоническом возмущении.

1. Учет демпфирования в упругих связях в обобщенной математической модели (1), приводит к следующей гибридной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} A\ddot{z} + C_1 z + C_2(Dz - \bar{u}) + B_1\dot{z} + B_2(D\dot{z} - \dot{\bar{u}}) = 0, \\ k\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + b\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \\ \qquad = \sum\limits_{i=1}^{m}\left(q_i(d^{iT}z(t) - u(x,t)) + p_i(d^{iT}\dot{z} - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t))\right)\delta(x-a_i), \end{cases} \tag{11}$$

где $z(t)$ − n-мерная вектор-функция; $u(x,t)$ − скалярная функция; $\bar{u}(t)$ − m-мерная вектор-функция с компонентами $u(a_1,t),\cdots,u(a_m,t)$; A, B_1, C_1 −

[1] 1. Philip D. Cha. Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems, Journal of Sound and Vibration 307 (2007) 386-392.
2. Wu J.-J., Whittaker A.R. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems, Journal of Sound and Vibration 227(1999) 361-381.

заданные, постоянные $n\times n$ – матрицы; B_2, C_2 − заданная, постоянная $n\times m$-матрица; D − заданная, постоянная $m\times n$- матрица; d^i − n-мерный вектор, составленный из i-ой строки матрицы D; k,b,a_i,q_i,p_i $(i=\overline{1,m})$ – заданные постоянные, причем $0\le a_i\le l$; $(\cdot)^T$ − здесь и ниже операция транспонирования.

Применив замену в системе (11) $z(t)=Z\,e^{\lambda t}$, $u(x,t)=V(x)e^{\lambda t}$, после преобразований получим

$$(\lambda^2 A+C_1+C_2D+\lambda(B_1+B_2D)Z-(C_2+\lambda B_2)\bar{V}=0,$$

$$\lambda^2 kV(x)+b\frac{d^4V(x)}{dx^4}=\sum_{i=1}^{m}\Big(q_i(d^{iT}Z-V(x))+\lambda p_i(d^{iT}Z-V(x))\Big)\delta(x-a_i). \quad (12)$$

Пусть функция $V(x)$ должна удовлетворять условиям (5).

Теорема 2. При любых значениях λ и Z для обобщенного решения $V(x)$ дифференциального уравнения (12) справедливо представление

$$V(x)=\sum_{i=1}^{m}G_i(x-a_i)\Big(q_i(d^{iT}Z-V(a_i))+\lambda p_i(d^{iT}Z-V(a_i))\Big), \quad (13)$$

где функции $G_i(x)$, $(i=1,...,m)$ обобщенные решения уравнения

$$\lambda^2 kG_i(x)+b\frac{d^4G_i(x)}{dx^4}=\delta(x), \qquad (i=1,...,m).$$

Следствие 2. Если обобщенные решения $G_i(x)$, $(i=1,...,m)$ уравнения (13) удовлетворяют краевым условиям (7), то функция $V(x)$, удовлетворяющая (13), является обобщенным решением дифференциального уравнения (12), удовлетворяющее краевым условиям (5).

Для нахождения функций $G_1(x),G_2(x),...,G_m(x)$, входящих в (13) имеем m краевых задач для уравнения

$$\lambda^2 kG(x)+b\frac{d^4G(x)}{dx^4}=\delta(x), \quad (14)$$

с одним из граничных условий.

Общее решение $G(x)$ уравнения (14) можно найти в виде суммы общего обобщенного решения $G_0(x)$ однородного уравнения и некоторого обобщенного решения $\tilde{G}(x)$ неоднородного уравнения (14), то есть

$$G(x)=G_0(x)+\tilde{G}(x).$$

Общее решение $G_0(x)$ однородного уравнения можно записать в виде

$$G_0(x)=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+c_3e^{k_3x}+c_4e^{k_4x},$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные; k_1, k_2, k_3, k_4 − корни характеристического уравнения, которые определяются следующим образом

$$k_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m\,,\ k_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m\,,\ k_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m\,,\ k_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m\,.$$

Здесь $m^4 = \dfrac{\lambda^2 k}{b}$. Отметим, что выражение для обобщенного решения $G_0(x)$ определяет общее комплексное решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения (14) может быть представлено в виде

$$\tilde{G}(x) = \theta(x)\Big(\alpha_1\left(e^{k_2 x} - e^{k_1 x}\right) + \alpha_2\left(e^{k_3 x} - e^{k_1 x}\right) + \alpha_3\left(e^{k_4 x} - e^{k_1 x}\right)\Big),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{b(k_2-k_1)(k_2-k_3)(k_2-k_4)},\quad \alpha_2 = \frac{1}{b(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3-k_4)},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{b(k_4-k_1)(k_4-k_2)(k_4-k_3)},\quad \theta(x)\ -\ \text{функция Хэвисайда.}$$

Для нахождения обобщенных решений $G_1(x), G_2(x), ..., G_m(x)$ уравнения (14), удовлетворяющих заданным согласно поставленной задаче краевым условиям, определяются произвольные константы c_1, c_2, c_3, c_4, входящие в общее решение из условий выполнения соответствующих граничных условий.

Следуя результатам второй главы, получим уравнения для нахождения комплексных собственных частот системы в следующем виде:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda^2 A + C_1 + C_2 D + \lambda(B_1 + B_2 D) & C_2 + \lambda B_2 \\ N & M \end{pmatrix} = 0,$$

где $M -$ матрица системы размерности $m \times m$

$$M = \begin{pmatrix} (1+G_1(0))(q_1+\lambda p_1) & ....G_m(a_1-a_m)(q_m+\lambda p_1) \\ G_1(a_2-a_1)(q_1+\lambda p_1) & ....G_m(a_2-a_m)(q_m+\lambda p_1) \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ G_1(a_m-a_1)(q_1+\lambda p_1) & ....(1+G_m(0))(q_m+\lambda p_1) \end{pmatrix},$$

N – матрица размерности $m \times n$

$$
N=\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{m} G_i(a_1-a_i)(q_i+\lambda p_i)d_1^i & \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} G_i(a_1-a_i)(q_i+\lambda p_i)d_n^i \\
\sum_{i=1}^{m} G_i(a_2-a_i)(q_i+\lambda p_i)d_1^i & \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} G_i(a_2-a_i)(q_i+\lambda p_i)d_n^i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\sum_{i=1}^{m} G_i(a_m-a_i)(q_i+\lambda p_i)d_1^i & \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} G_i(a_m-a_i)(q_i+\lambda p_i)d_n^i
\end{pmatrix}.
$$

Для проведения сравнительного анализа предложенного подхода была исследована система: консольный стержень с установленными на пружинах тремя твердыми телами, расчетная модель, которой приведена на рисунке 4. Левый конец стержня жестко закреплен, а правый свободен. Отметим, в этом случае функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$
u(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t)=0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l,t)=0.
$$

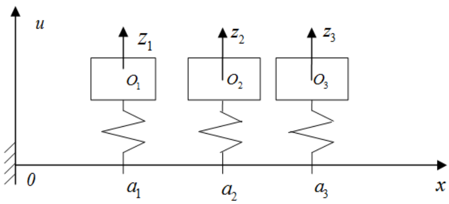

Рис. 4 – Расчетная схема системы «консольный стержень с тремя осцилляторами с демпфированием»

Для расчетов использованы данные модели и расчеты, взятые из статьи[2].

Сравнение расчетов первых двух комплексных собственных частот предложенным в диссертационной работе подходом:

$$
\lambda_1=-0.255+25.839i,\qquad \lambda_2=-0.235+161.938i,
$$

и данных расчетов соответствующих частот, взятых из литературного источника

$$
\lambda_1=-0.255+25.829i,\qquad \lambda_2=-0.235+161.941i,
$$

как видно, дают хорошее совпадение результатов.

2. В случае, если гармоническое возмущение частоты ω приложено к одному или нескольким твердым телам системы, то в правой части обык-

[2] Kukla S., Posiadala B. Free vibrations of beams with elastically mounted masses // J. Sound Vib. 1994. 175(4):557-564.

новенных дифференциальных уравнений обобщенной модели (1) появятся выражения вида $H\sin\omega t$

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = H\sin\omega t, \\ k\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + b\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i (d^{iT} z(t) - u(x,t))\delta(x - a_i), \end{cases} \qquad (15)$$

где H − n-мерный заданный вектор.

Вынужденные установившиеся колебания системы (15) $z(t)$, $u(x,t)$ будем искать в виде

$$z(t) = Z\sin\omega t, \qquad u(x,t) = V(x)\sin\omega t, \qquad (16)$$

где ω – частота внешних возмущений, Z – n-мерный вектор амплитуд вынужденных колебаний масс, $V(x)$ – амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня.

Применение подхода, развитого во второй главе приводит к линейной, неоднородной алгебраической системе уравнений относительно вектора амплитуд Z и $\bar{V}$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)Z - C\bar{V} = H, \\ NZ - M\bar{V} = 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Отметим, если частота внешних возмущений не совпадает с какой-либо собственной частотой, тогда определитель системы (17) не равен нулю

$$\det\begin{pmatrix} -\omega^2 A + B + CD & -C \\ N & -M \end{pmatrix} \neq 0.$$

При этом амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня $V(x)$ определится выражением (6).

Пусть на систему взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли, действует гармоническое силовое возмущение с частотой ω, приложенное в одной или в нескольких точках стержня. В этом случае в правой части уравнений в частных производных обобщенной модели (1) появятся дополнительные слагаемые

$$\begin{cases} A\ddot{z} + Bz + C(Dz - \bar{u}) = 0, \\ k\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + b\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i (d^{iT} z(t) - u(x,t))\delta(x - a_i) + \\ + \sum\limits_{i=1}^{s} H_i \sin\omega t\,\delta(x - \bar{a}_i), \end{cases} \qquad (18)$$

где H_i − заданные амплитуды внешних воздействий, приложенные в точке стержня с координатой $\bar{a}_i$.

Подставив в систему (18) $z(t),\ u(x,t)$ в виде (16) после преобразований получим

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)\,Z - C\bar{V} = 0, \\ -\omega^2 kV(x) + b\,\dfrac{d^4V(x)}{dx^4} = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i\,(d^{i\prime} Z - V(x))\delta(x-a_i) + \sum\limits_{i=1}^{s} H_i\ \delta(x-\bar{a}_i). \end{cases}$$

Теорема 3. При любых значениях Z для обобщенного решения $V(x)$ дифференциального уравнения

$$-\omega^2 kV(x) + b\,\frac{d^4V(x)}{dx^4} = \sum_{i=1}^{m} q_i\,(d^{i\prime} Z - V(x))\delta(x-a_i) + \sum_{i=1}^{s} H_i\ \delta(x-\bar{a}_i)$$

справедливо представление

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} G_i(x-a_i)\,q_i\,(d^{i\prime} Z - V(a_i)) + \sum_{i=1}^{s} \bar{G}_i(x-\bar{a}_i)H_i, \qquad (19)$$

где функции $G_i(x),\ (i=1,...,m)$ обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 kG_i(x) + b\,\frac{d^4G_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \qquad (i=1,...,m),$$

с граничными условиями

$$G_i(-a_i) = G_i(l-a_i) = 0, \qquad \frac{dG_i}{dx}(-a_i) = \frac{dG_i}{dx}(l-a_i) = 0,\ \ (i=1,...,m),$$

функции $\bar{G}_i(x),\ (i=1,...,s)$ обобщенные решения уравнений

$$-\omega^2 k\bar{G}_i(x) + b\,\frac{d^4\bar{G}_i(x)}{dx^4} = \delta(x), \qquad (i=1,...,s),$$

с граничными условиями

$$\bar{G}_i(-\bar{a}_i) = \bar{G}_i(l-\bar{a}_i) = 0, \qquad \frac{d\bar{G}_i}{dx}(-\bar{a}_i) = \frac{d\bar{G}_i}{dx}(l-\bar{a}_i) = 0,\ (i=1,...,s).$$

Система линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно вектора амплитуд Z и $\bar{V}$ запишется в виде

$$\begin{cases} (-\omega^2 A + B + CD)\,Z - C\bar{V} = 0, \\ NZ - M\bar{V} = -b. \end{cases} \qquad (20)$$

где b − m - мерный заданный вектор

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{s} \overline{G}_i (a_1 - \overline{a}_i) H_i \\ \sum_{i=1}^{s} \overline{G}_i (a_2 - \overline{a}_i) H_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{s} \overline{G}_i (a_m - \overline{a}_i) H_i \end{pmatrix}.$$

Если частота внешних возмущений не совпадает с какой-либо собственной частотой, тогда определитель системы (20) не равен нулю. При этом амплитуда вынужденных колебаний точек упругого стержня $V(x)$ будет определяться соотношениями (19).

Основные научные результаты:

1. Впервые введена в рассмотрение обобщенная математическая модель, представляющая собой класс математических моделей различных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера-Бернулли. Обобщенная математическая модель представлена в виде системы гибридных дифференциальных уравнений заданной структуры.
2. Разработан аналитико-численный метод исследования собственных колебаний взаимосвязанных систем твердых тел, соединенных с балкой Эйлера-Бернулли, описываемых обобщенной математической моделью. Произведены все необходимые теоретические исследования, связанные с разработкой аналитико-численного метода исследования колебательных процессов в системах, описываемых системами гибридных дифференциальных уравнений, предложенного класса.
3. Приведено обобщение аналитико-численного метода исследования свободных колебаний на случай учета демпфирования в упругих связях в обобщенной математической модели.
4. На основе предложенного подхода к исследованию собственных колебаний разработан метод исследования вынужденных колебаний при гармоническом возмущении.

Список публикаций по теме диссертационной работы

Публикации в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) Исследование возможности гашения колебаний n масс установленных на упругом стержне / Баргуев С.Г., Елтошкина Е.В., Мижидон А.Д. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2010. – № 4. – С. 78-84.
2. Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне /

Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) // Вестник ВСГУТУ. – 2013. – № 6 (45). – С. 5-12.

3. Дабаева М.Ж. Математическое моделирование, учет демпфирующих свойств упругих связей в обобщенной математической модели системы твердых тел, установленных на упругом стержне / Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. // Вестник ВСГУТУ. – 2015. – № 2 (53). – С. 10-17.

4. Дабаева М.Ж. Установившиеся вынужденные колебания системы твердых тел, установленных на упругом стержне / Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – 2015. – № 9. – С. 68-75.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

5. Дабаева М.Ж. Расчет собственных частот балки Эйлера-Бернулли с прикрепленными твердыми телами / Мижидон А.Д., Баргуев С.Г., Дабаева М.Ж., Гармаева В.В. - №2015612387-18 фев. 2015г.

Другие публикации:

6. Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Об одном способе определения собственных частот и форм колебаний стержня с осциллятором / Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) // Математика, ее приложение и математическое образование: Материалы IV междунар. конф. – Улан-Удэ, 2011. –Ч. 2. – С. 93-96.

7. Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.). Сравнительный анализ подходов к расчету собственных частот стержня с упруго присоединенной системой с двумя степенями свободы / Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) // Проблемы механики современных машин: Материалы V международной конференции. – Улан-Удэ, 2012. – Ч.1. – С. 186-190.

8. Дабаева М.Ж. Теоретические основы и алгоритмическое обеспечение исследования собственных колебаний системы твердых тел, установленных на упругом стержне / Дабаева М.Ж., Елтошкина Е.В., Гармаева В.В. // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы V международной конференции. – Улан-Удэ, 2014. – С. 94-99.

9. Дабаева М.Ж. (Цыцыренова М.Ж.) Теоретические основы исследования систем виброизоляции объектов, установленных на упругом стержне // Сборник статей III Всероссийской научно-практической конференции. Авиамашиностроение и транспорт Сибири – Иркутск: Изд-во Иркутский государственный технический университет, 2013. – С. 219-227.

10. Дабаева М.Ж. Построение частотных уравнений системы твердых тел, прикрепленных к упругому стержню // Проблемы механики современных машин: Материалы VI международной конференции. – Улан-Удэ, 2015. – Т. 3. – С. 132-137.