

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Хишектуева Ишин-Хорло Дамбадоржиевна

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ
ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук, профессор
А.С. Булдаев

Улан-Удэ — 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. МОДЕЛИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК	13
1.1 Задача оптимизации управляющих параметров	13
1.2 Формула приращения целевой функции	15
1.3 Модели неподвижных точек	20
1.4 Условия оптимальности	25
1.5 Задача оптимизации с управляющими параметрами в начальных условиях	31
1.6 Примеры	36
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК	42
2.1 Итерационные методы решения моделируемых задач о неподвиж- ной точке	42
2.2 Сходимость итерационного метода на основе операции на максимум	45
2.3 Сходимость итерационного метода на основе операции проектиро- вания	48
2.4 Принципиальная схема методов неподвижных точек	52
2.5 Вычислительные особенности реализации методов	55
ГЛАВА 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ	57
3.1 Тестовый пример 1	57
3.2 Тестовый пример 2	61
3.3 Модельная задача «самолет с автопилотом»	65
3.4 Модельная задача «кинетика ядерного реактора»	72
3.5 Эколого-экономическая задача «модель выпуска продукции с уче- том вредных выбросов»	79

3.5.1	Постановка задачи	79
3.5.2	Выбор начальных условий	80
3.5.3	Переход к «безразмерной» модели	80
3.5.4	Выбор интервала времени	82
3.5.5	Уточнение области допустимых значений параметров	83
3.5.6	Результаты расчета	84
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	87
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	88

ВВЕДЕНИЕ

Современная теория управления является одним из основных направлений развития математики с приложениями практически во всех областях знаний. Потребности приложений приводят к разнообразным актуальным задачам оптимального управления, в том числе к задачам оптимизации динамических систем по управляющим параметрам. В частности, к последним относятся: проблема параметрического синтеза управления в виде функции известной структуры от фазовых координат с неизвестными значениями параметров; проблема понижения порядка системы дифференциальных уравнений, описывающей динамический процесс; идентификация модели, когда структура управлений определена и многие другие.

Распространенным подходом к решению задач параметрической оптимизации является частичная или полная ее дискретизация и сведение к задачам математического программирования. Указанный подход широко распространен среди зарубежных исследователей (Е. Polak, D.Q. Mayne, N. Maratos, M.H. Wright, P.E. Gill, W. Murrey и др. [132, 139–143, 147]). Альтернативным к решению рассматриваемых задач является подход, основанный на теории и методах оптимального управления.

Фундаментальными результатами теории оптимального управления являются: принцип максимума Л.С. Понтрягина [79], метод динамического программирования Р. Беллмана [10], достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова [72]. На их основе развиваются следующие подходы и методы решения задач оптимального управления.

1. **Градиентные методы**, основанные на применении формул для вариаций функционалов. Одними из первых были работы: Л.И. Шатровского [127], Т.М. Энеева [128], Дж. Келли [70]. К настоящему времени разработано множество разновидностей градиентных методов: метод условного градиента, метод проекции градиента [57, 108], метод сопряженных градиентов [12, 89, 108],

метод возможных направлений [67], модификация с использованием метода штрафных функций и др. [33, 37, 44, 82, 87, 88, 125].

2. Итерационные методы, построенные на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина. Одним из первых был предложен метод последовательных приближений в работе И.А. Крылова, Ф.Л. Черноусько [74]. Дальнейшие исследования были направлены на построение вычислительных методов со свойствами релаксационности и сходимости и представлены в работах А.А. Милютин, В.В. Дикусара, А.А. Любушина, О.В. Васильева, В.А. Срочко и др. [32–34, 58–60, 76–78, 81, 100, 101, 124, 125].

3. Методы принципа расширения. Основой построения этих методов служат достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова [72] и принцип расширения, сформулированный в работах В.И. Гурмана [47, 49]. Позже на их основе были разработаны методы слабого и сильного улучшения первого и второго порядков [8, 48, 50, 52, 105].

4. Методы динамического программирования, основанные на варьировании состояний управляемой системы в пространстве фазовых координат [10]. Известны его разновидности: метод локальных вариаций [75, 124], метод блуждающей трубки Н.Н. Моисеева [82].

В качестве отдельных направлений также можно выделить исследования и вычислительные методы в определенных классах задач оптимального управления: линейные задачи [41, 71, 82, 83]; задачи с импульсными управлениями и разрывными траекториями [61, 62, 66, 80]; задачи управления гибридными системами (системы переменной структуры [65], дискретно-непрерывные системы [51, 80], логико-динамические системы [35, 36]).

Задачи оптимального управления с управляющими функциями и параметрами в отечественной литературе рассматривались в коллективной фундаментальной работе под руководством Л.С. Понтрягина [79], в которой были получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. Аналогичные условия были сформулированы в классе задач параметри-

ческой оптимизации в работе Р. Габасова, Ф. Кирилловой [40].

Результаты исследований задач оптимизации с управляющими параметрами также приведены в работах В.И. Гурмана [53–56], И.В. Расиной [53–56], О.В. Васильева [33], В.А. Батурина [8, 9], Д.Е. Урбановича [8], А.И. Тятюшкина [106, 107], А.Ю. Горнова [46], А.С. Булдаева [20] и др.

Вычислительные методы, основанные на достаточных условиях оптимальности В.Ф. Кротова и принципе расширения В.И. Гурмана, построены для оптимизации динамических систем с управляющими параметрами в работе В.А. Батурина, Д.Е. Урбановича [8]. В ней конструируются алгоритмы первого и второго порядков для численной оптимизации параметров, приведены примеры решения прикладных и модельных задач.

Мультиметодные вычислительные алгоритмы для оптимизации динамических систем с параметрами и численные результаты решения соответствующих модельных задач рассмотрены в работах А.И. Тятюшкина, А.Ю. Горнова [46, 106].

Новый подход к оптимизации управляемых систем основывается на нестандартных аппроксимациях приращений функционалов от управления и модификациях сопряженных систем, которые позволяют конструировать эффективные нелокальные методы улучшения управления.

Нелокальные методы оптимизации в классах линейных и квадратичных управляемых систем предложены в работе В.А. Срочко [100]. Модифицированные дифференциально-алгебраические сопряженные системы в задачах оптимального управления рассматривались в работах А.С. Булдаева [23, 26]. Численным методам решения различных классов дифференциально-алгебраических систем посвящены работы Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, М.В. Булатова и др. [11, 13].

В работе А.С. Булдаева [20] разработаны методы нелокального улучшения управляющих параметров в полиномиальном по состоянию классе задач параметрической оптимизации динамических систем. Методы основываются

на модификации сопряженной системы, позволяющей получать нестандартные формулы приращения целевой функции задачи, которые не содержат остаточных членов разложений. Получаемые формулы дают возможность конструировать специальные операторные уравнения, решение которых приводит к построению улучшающего управления. Конструируемые методы обладают свойством нелокальности улучшения (улучшение необязательно гарантируется только в локальной окрестности улучшаемого управления), позволяют получать новые усиленные условия оптимальности, а также имеют возможность улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума.

В данной работе указанный подход развивается и обобщается на общий нелинейный класс задач оптимизации параметров динамических систем.

Целью диссертационной работы является разработка вычислительно эффективных моделей и методов оптимизации параметров нелинейных динамических систем, программно-алгоритмическая реализация и апробация конструируемых методов на тестовых и прикладных задачах.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. разработка условий улучшения управляющих параметров динамических систем в форме модельных задач о неподвижной точке конструируемых операторов управления;
2. построение и обоснование сходимости итерационных методов решения задач о неподвижной точке;
3. программно-алгоритмическая реализация построенных методов неподвижных точек и сравнительный анализ их эффективности в вычислительных экспериментах на тестовых и модельных задачах.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы используются нестандартные аппроксимации приращения целевой функции и

модификации сопряженных систем, аппарат теории и методов функционального анализа, динамических систем, вычислительной математики и оптимального управления. Для программной реализации методов применяется пакет Fortran Power Station 4.0.

Научная новизна результатов, выносимых на защиту:

1. Разработанные модели неподвижных точек для решения классов задач параметрической оптимизации динамических систем, представляющие собой специальные задачи о неподвижной точке конструируемых операторов управления, обладают свойствами нелокальности и возможности улучшения неоптимальных управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума.
2. Новое необходимое условие оптимальности усиливает известный дифференциальный принцип максимума в классе линейных по управлению задач параметрической оптимизации.
3. Доказанные теоремы о сходимости обосновывают принципиальную сходимость предлагаемых итерационных алгоритмов решения моделируемых задач о неподвижной точке.
4. Построенные методы решения задач о неподвижной точке имеют повышенную вычислительную эффективность, подтвержденную результатами сравнительного анализа предложенных методов с известными в вычислительных экспериментах.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Полученные в работе результаты определяют перспективное направление развития теории и методов оптимизации параметров нелинейных управляемых систем. Предлагаемые методы неподвижных точек могут применяться для разработки вычислительных комплексов для эффективного решения актуальных прикладных задач управления динамическими системами. Результаты исследований отражены в ряде публикаций и в научных отчетах, выполненных

в рамках грантов РФФИ (проекты 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_а, 13-01-92200-Монг_а, 15-01-03680-а), госзадания Министерства образования и науки РФ (проект № 3808).

Разработан комплекс программ для ЭВМ, предназначенный для решения задач оптимизации управляющих параметров динамических систем разработанными методами. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016611612 от 05.02.2016 г. «Программа оптимизации параметров билинейных динамических систем методом неподвижных точек».

Полученные результаты используются в учебных спецкурсах и для выполнения курсовых и дипломных работ студентов математических специальностей Бурятского государственного университета.

Достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением математического аппарата, доказательствами сформулированных утверждений, проведенными численными экспериментами и решениями модельных и тестовых задач.

Работа соответствует пунктам 2, 3, 4 паспорта научной специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены в докладах и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- III Международная конференция «Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы» ИКВТС-2010 (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 6-11 сентября 2010 г.);
- V, VI, VII Международные симпозиумы «Обобщенные постановки и решения задач управления» (International Symposium «Generalized Statements and Solutions of Control Problems») (г. Улан-Батор, Монголия, 13-17 сентября 2010 г.; г. Геленджик, Краснодарский край, 25-27 сентября 2012 г., 23-30 сентября 2014 г.);

- Межрегиональная молодежная школа-семинар «Моделирование социально-эколого-экономических процессов в регионе» (г. Улан-Удэ, 15 ноября 2012 г., 27-29 ноября 2013 г.);
- The 8th International Forum on strategic technology IFOST-2013 (Ulaanbaatar, Mongolia, June 28 - July 1, 2013);
- The 4th International Conference on Optimization, Simulation and Control ICOSC-2013 (Ulaanbaatar, Mongolia, July 1-4, 2013);
- V Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование» МПМО-2014 (г. Улан-Удэ, оз. Байкал, 23-28 июня 2014 г.);
- Семинар молодых ученых с международным участием «Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа» в рамках международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 20-27 июня 2015 г.);
- The 10th International Conference on Optimization: Techniques and Applications, ICOTA 10 (Ulaanbaatar, Mongolia, July 23-26, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах, включая статьи в журналах, трудах конференций, симпозиумов, семинаров [24, 27, 28, 110–120, 133–135] и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. В том числе 4 статьи в изданиях, включенных в Перечень ВАК Минобрнауки РФ [28, 111, 115, 120].

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Страниц — 103, рисунков — 7, таблиц — 12, в списке литературы 147 наименований.

Глава 1 посвящена разработке и построению моделей неподвижных точек, представляющих собой специальные задачи о неподвижной точке, характеризующих условия улучшения в классе задач параметрической оптимизации динамических систем.

В параграфе 1.1 рассматривается задача оптимизации управляющих параметров динамической системы, приводятся известные необходимые условия оптимальности в форме дифференциального принципа максимума, формулируется задача улучшения управляющих параметров.

В параграфе 1.2 вводится модифицированная дифференциально-алгебраическая сопряженная система. На основе модификации стандартной сопряженной системы строится формула приращения целевой функции задачи, не содержащая остаточных членов разложений (точная формула приращения).

В параграфе 1.3 конструируются условия улучшения допустимого управления, имеющие вид специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов управления на основе операции на максимум функции Понтрягина и операции проектирования на допустимое множество значений управления. Показывается, что решение задачи о неподвижной точке обеспечивает улучшение управления. Характеризуются основные свойства предлагаемого подхода в рассматриваемом классе задач: нелокальность улучшения управления (улучшение необязательно гарантируется только в локальной окрестности улучшаемого управления); получение усиленного условия оптимальности управления; возможность улучшения управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума.

В параграфе 1.4 рассматривается класс линейных по управлению задач оптимизации динамической системы по управляющим параметрам. Обосновываются новые условия оптимальности, усиливающие дифференциальный принцип максимума в рассматриваемом классе задач.

В параграфе 1.5 рассматривается задача совместной оптимизации управляющих параметров, включающей параметры в начальных условиях. Конструируется точная формула приращения целевой функции, строятся условия совместного улучшения управляющих параметров в форме задачи о неподвижной точке.

В параграфе 1.6 даются примеры, иллюстрирующие свойства предлагаемых методов улучшения.

В **главе 2** предлагаются методы оптимизации параметров динамических систем на основе решения построенных задач о неподвижной точке.

В параграфе 2.1 формулируются итерационные методы решения задач о неподвижной точке, аналогичные известному методу простой итерации. Обосновывается теорема о сходимости метода простой итерации в общей операторной форме, являющаяся аналогом известной теоремы.

В параграфах 2.2, 2.3 в форме теорем даются и обосновываются условия сходимости предлагаемых итерационных методов решения задач о неподвижной точке.

В параграфе 2.4 строится принципиальная схема метода неподвижных точек, описывается пошаговый алгоритм работы метода, дается блок-схема.

В параграфе 2.5 указываются вычислительные особенности реализации метода.

В **главе 3** представлены результаты вычислительных экспериментов на тестовых и модельных задачах, в том числе: самолет с автопилотом, кинетика ядерного реактора, эколого-экономическая задача (выпуск продукции с учетом вредных выбросов), демонстрирующие вычислительную эффективность предлагаемого подхода в рассматриваемых классах задач.

В **заключении** представлены основные научные результаты работы.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Александру Сергеевичу Буддаеву за обсуждение и конструктивные замечания к работе.

ГЛАВА 1

МОДЕЛИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

1.1 Задача оптимизации управляющих параметров

Рассматривается класс задач оптимизации динамической системы по управляющим параметрам:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u, t) dt \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1.2)$$

в которой $x(t) \in R^n$ — вектор-функция фазовых переменных (состояние), $u \in R^m$ — вектор управляющих параметров (управление) со значениями в выпуклом компактном множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и интервал T заданы.

Предполагаются выполненными следующие условия:

1. функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n , функция $F(x, u, t)$, вектор-функция $f(x, u, t)$ и их производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x, u, t) на множестве $R^n \times U \times T$;
2. вектор-функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$: $\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L\|x - y\|$.

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t, v)$, $t \in T$ системы (1.2) для любого допустимого управления $v \in U$.

Требуется найти последовательность $u^s \in U$, $s = 0, 1, 2, \dots$, для которой $\Phi(u^s) \rightarrow \inf_{u \in U} \Phi(u)$ при $s \rightarrow \infty$. Такая последовательность называется минимизирующей.

Рассмотрим функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t)$$

и стандартную сопряженную систему

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u, t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (1.3)$$

Для допустимого управления $v \in U$ обозначим $\psi(t, v)$, $t \in T$ — решение системы (1.3) при $u = v$, $x(t) = x(t, v)$.

Известное необходимое условие оптимальности в форме дифференциального принципа максимума (ДПМ) для управления $u \in U$ [33] имеет вид

$$\left\langle \int_T H_u(\psi(t, u), x(t, u), u, t) dt, u \right\rangle = \max_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\psi(t, u), x(t, u), u, t) dt, w \right\rangle. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) можно представить в эквивалентной проекционной форме [33, 34]

$$u = P_U \left(u + \alpha \int_T H_u(\psi(t, u), x(t, u), u, t) dt \right), \quad \alpha > 0. \quad (1.5)$$

Отметим, что для выполнения (1.4) достаточно проверить условие (1.5) хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Распространенным подходом к решению задачи (1.1), (1.2) является сведение к задаче конечномерной оптимизации с неявно заданной целевой функцией. Для ее решения может быть применен богатый арсенал методов конечномерной оптимизации.

В данной работе развивается подход к решению задачи (1.1), (1.2), основанный на теории и методах оптимального управления.

Одним из таких способов решения задачи (1.1), (1.2) является поиск подозрительных на оптимальность управлений, т.е. удовлетворяющих необходимому условию оптимальности типа ДПМ. В частности, к таким методам относятся операторные методы в классе полиномиальных по состоянию систем, развитые в работе [20].

Другим распространенным подходом является последовательное решение

задач улучшения управления.

Задача улучшения определяется следующим образом: для заданного управления $u \in U$ требуется найти управление $v \in U$ с условием

$$\Phi(v) \leq \Phi(u). \quad (1.6)$$

В этой общей постановке различают понятия «строгого» и «нестрогого» улучшения. Для найденного улучшаемого управления $v \in U$ рассматривается новая задача улучшения и т.д.

В ходе последовательного решения задач улучшения строится улучшающаяся (релаксационная) последовательность управлений, которая при определенных условиях может быть минимизирующей. К этому способу решения относятся хорошо известные градиентные методы [57, 108], относящиеся к группе локальных методов управления.

В данной работе предлагаются эффективные методы нелокального улучшения управляющих параметров, являющиеся развитием на общий нелинейный класс (1.1), (1.2) методов [20], разработанных для полиномиальных по состоянию динамических систем.

1.2 Формула приращения целевой функции

Предлагаемый подход к решению задачи улучшения (1.6) основывается на построении нестандартной формулы приращения целевой функции без остаточных членов разложений с помощью модифицированной сопряженной системы. Аналогичные формулы также называются точными [20, 101].

Обозначим для удобства частное приращение произвольной вектор-функции $g(y_1, \dots, y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2}

$$\begin{aligned} \Delta_{y_{s_1} + \Delta y_{s_1}, y_{s_2} + \Delta y_{s_2}} g = & g(y_1, \dots, y_{s_1} + \Delta y_{s_1}, \dots, y_{s_2} + \Delta y_{s_2}, \dots, y_l) - \\ & - g(y_1, \dots, y_l). \end{aligned}$$

Приращение целевой функции (1.1) на допустимых управлениях $u, v \in U$, в соответствии с введенным обозначением выписывается в виде

$$\Delta_v \Phi(u) = \Delta_{x(t_1, v)} \varphi(x(t_1, u)) + \int_T \Delta_{x(t, v), v} F(x(t, u), u, t) dt. \quad (1.7)$$

Дополнительно обозначим $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u)$.

Аналогично [28] введем непрерывную вектор-функцию $p(t) \in R^n, t \in T$ с условием

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - q, \quad (1.8)$$

где величина q удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\langle \varphi_x(x(t_1, u)) + q, \Delta x(t_1) \rangle = \Delta_{x(t_1, v)} \varphi(x(t_1, u)). \quad (1.9)$$

Тогда приращение терминальной части функционала в выражении (1.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{x(t_1, v)} \varphi(x(t_1, u)) &= \langle \varphi_x(x(t_1, u)) + q, \Delta x(t_1) \rangle = -\langle p(t_1), \Delta x(t_1) \rangle = \\ &= -\int_T \frac{d}{dt} \langle p(t), \Delta x(t) \rangle dt = -\int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle \right) dt = \\ &= -\int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta_{x(t, v), v} f(x(t, u), u, t) \rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, приращение целевой функции можно представить следу-

ющим образом

$$\begin{aligned}
\Delta_v \Phi(u) &= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \right. \\
&\quad \left. + \langle p(t), \Delta_{x(t,v),v} f(x(t,u), u, t) \rangle - \Delta_{x(t,v),v} F(x(t,u), u, t) \right) dt = \\
&= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_{x(t,v),v} H(p(t), x(t,u), u, t) \right) dt = \\
&= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_v H(p(t), x(t,v), u, t) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{x(t,v)} H(p(t), x(t,u), u, t) \right) dt. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Предположим, что функция $p(t)$ дополнительно к условиям (1.8), (1.9) удовлетворяет модифицированной сопряженной системе

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t,u), u, t) - r(t), \quad (1.11)$$

где вектор-функция $r(t) \in R^n$, $t \in T$ определяется в каждый момент времени $t \in T$ из алгебраического уравнения

$$\left\langle H_x(p(t), x(t,u), u, t) + r(t), \Delta x(t) \right\rangle = \Delta_{x(t,v)} H(p(t), x(t,u), u, t). \quad (1.12)$$

Тогда формула приращения (1.10) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Delta_v \Phi(u) &= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_v H(p(t), x(t,v), u, t) + \right. \\
&\quad \left. + \langle H_x(p(t), x(t,u), u, t) + r(t), \Delta x(t) \rangle \right) dt = - \int_T \Delta_v H(p(t), x(t,v), u, t) dt.
\end{aligned}$$

В итоге возникает формула приращения целевой функции, не содержащая остаточных членов разложений

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_v H(p(t), x(t,v), u, t) dt. \quad (1.13)$$

Формализуем рассматриваемый подход следующим образом. Введем модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему для сопряженной функции $p(t) \in R^n$, $t \in T$ в форме

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), u, t) - r(t), \quad (1.14)$$

$$\left\langle H_x(p(t), x(t), u, t) + r(t), y(t) - x(t) \right\rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), u, t), \quad (1.15)$$

где переменные $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^n$, $r(t) \in R^n$, $t \in T$, $u \in U$, с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \quad (1.16)$$

$$\left\langle \varphi_x(x(t_1)) + q, y(t_1) - x(t_1) \right\rangle = \Delta_{y(t_1)} \varphi(x(t_1)). \quad (1.17)$$

Для допустимых управлений $u, v \in U$ обозначим $p(t, u, v)$, $t \in T$ — решение системы (1.14)-(1.17) при $x(t) = x(t, u)$, $y(t) = x(t, v)$. Отметим очевидное равенство $p(t, u, u) = \psi(t, u)$, $t \in T$.

Формула приращения целевой функции (1.13) в новых обозначениях, в которых указывается явная зависимость фазовых и сопряженных переменных от управления, принимает вид

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_v H(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt. \quad (1.18)$$

Формула (1.18) не содержит каких-либо остаточных членов разложений и позволяет построить эффективные методы улучшения допустимого управления $u \in U$. Предлагаемые методы основываются на решении специальных конструируемых задач о неподвижной точке определяемых операторов в пространстве управлений.

Отметим, что алгебраические соотношения (1.15), (1.17) всегда можно разрешить относительно вектор-функции $r(t)$ и вектора q , возможно не единственным способом.

В частности, рассмотрим линейную по состоянию задачу (1.1), (1.2) (функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ линейны по x). В этом случае, имеем очевидное решение $r(t) = 0$, $q = 0$, и дифференциально-алгебраическая сопряженная система (1.14)-(1.17) сводится к стандартной (1.3) с решением $\psi(t, u)$, $t \in T$.

В квадратичной по состоянию задаче (1.1), (1.2) (функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ квадратичны по x) возможны несколько способов определения $r(t)$, q . Первый способ определяется формулами

$$\begin{aligned} r(t) &= H_{xx}(p(t), x(t), u, t) \cdot (y(t) - x(t)), \\ q &= \varphi_{xx}(x(t_1)) \cdot (y(t_1) - x(t_1)), \end{aligned}$$

которые обращают соотношения (1.15), (1.17) в очевидные равенства.

В этом случае система (1.14)-(1.17) становится эквивалентной модифицированной сопряженной системе, описанной в [20] для квадратичных систем. Такой способ к представлению $r(t)$, q легко обобщается на полиномиальную по состоянию задачу (1.1), (1.2). При этом сопряженная система (1.14)-(1.17) преобразуется в известную модифицированную сопряженную систему [20]. Таким образом, дифференциально-алгебраическую систему (1.14)-(1.17) можно рассматривать как обобщение известной модифицированной сопряженной системы для полиномиальной по состоянию задачи на общий нелинейный случай.

Другой универсальный способ разрешения $p(t)$, q и сведения к дифференциальной сопряженной системе заключается по аналогии с [23] в следующем.

В случае линейной по x задачи (1.1), (1.2) положим $r(t) = 0$, $t \in T$. В нелинейном случае, если для всех i выполняется $x_i(t) = y_i(t)$, то также положим $r(t) = 0$, $t \in T$. Если существует k такой, что $x_k(t) \neq y_k(t)$, то

полагаем $r_i(t) = 0$, $i \neq k$, а $r_k(t)$ определим по формуле

$$r_k(t) = \frac{\Delta_{y(t)}H(p(t), x(t), u, t) - \langle H_x(p(t), x(t), u, t), y(t) - x(t) \rangle}{y_k(t) - x_k(t)}. \quad (1.19)$$

Правило для q определяется аналогично. В случае линейной функции φ положим $q = 0$. В нелинейном случае, если $\forall i x_i(t_1) = y_i(t_1)$, то $q = 0$. Если $\exists k$ такой, что $x_k(t_1) \neq y_k(t_1)$, то $q_i = 0$, $i \neq k$, и q_k определим по формуле

$$q_k = \frac{\Delta_{y(t_1)}\varphi(x(t_1)) - \langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1) - x(t_1) \rangle}{y_k(t_1) - x_k(t_1)}. \quad (1.20)$$

Таким образом, из алгебраических соотношений (1.15), (1.17) всегда могут быть определены вектор-функция $r(t)$ и вектор q . Меняя правила определения конкретных индексов k в (1.19), (1.20) можно получать различные представления $r(t)$, q . При этом, будем получать различные дифференциальные сопряженные системы, к которым может быть сведена исходная дифференциально-алгебраическая сопряженная система (1.14)-(1.17).

1.3 Модели неподвижных точек

В данном параграфе формируются условия улучшения допустимого управления, имеющие вид специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов управления. Задачи о неподвижной точке конструируются на основе точной формулы приращения (1.18) с помощью операции на максимум функции Понтрягина и операции проектирования на допустимое множество значений управления.

Аналогично [20] определим для удобства отображение W^* по формуле

$$W^*(u, v) = \operatorname{argmax}_{w \in U} \int_T H(p(t, u, v), x(t, v), w, t) dt, \quad u \in U, v \in U. \quad (1.21)$$

Для заданного $u \in U$ рассмотрим уравнение

$$v = W^*(u, v), \quad v \in U. \quad (1.22)$$

Покажем, что его решение $v = v(u)$ обеспечивает улучшение.

Поскольку $W^*(u, v) \in U$, то полученное управление $v = v(u)$ является допустимым. В силу определения отображения $W^*(u, v)$ получаем

$$\int_T H(p(t, u, v), x(t, v), v, t) dt \geq \int_T H(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt.$$

Отсюда и из формулы (1.18) следует $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Таким образом, для нелокального улучшения допустимого управления $u \in U$ достаточно решить систему уравнений

$$v = \operatorname{argmax}_{w \in U} \int_T H(p(t, u, v), x(t, v), w, t) dt, \quad v \in U. \quad (1.23)$$

Используемые обозначения решений фазовых и сопряженных систем, явно указывающие их зависимость от управления, позволяют удобно интерпретировать задачу (1.23) как задачу о неподвижной точке некоторого оператора управления. Представим задачу о неподвижной точке (1.23) в канонической операторной форме

$$v = G^*(v), \quad v \in U, \quad (1.24)$$

в которой оператор G^* определяется в виде суперпозиции трех операторов.

Первый оператор P определяется на основе решения дифференциально-алгебраической сопряженной системы (1.14)-(1.17) с помощью соотношения

$$P(v) = p, \quad v \in U, \quad p \in C(T), \quad p(t) = p(t, u, v), \quad t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T вектор-функций.

Второй оператор X определяется решением $x(t, v)$, $t \in T$ фазовой систе-

мы (1.2)

$$X(v) = x, \quad v \in U, \quad x \in C(T), \quad x(t) = x(t, v), \quad t \in T.$$

Третий оператор I^* определяется соотношением

$$I^*(p, x) = v^*, \quad p \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v^* = \operatorname{argmax}_{w \in U} \int_T H(p(t), x(t), w, t) dt.$$

В итоге оператор G^* можно представить в виде композиции

$$G^*(v) = I^*(P(v), X(v)), \quad v \in U.$$

Построим другой метод улучшения. Введем для заданных $\alpha > 0$ и $u \in U$ отображение W^α с помощью соотношения

$$W^\alpha(u, v, s) = P_U \left(u + \alpha \left(\int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s \right) \right), \quad (1.25)$$

$$v \in U, \quad s \in R^m,$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме, и рассмотрим систему

$$v = W^\alpha(u, v, s), \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} & \int_T \Delta_v H(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt = \\ & = \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s, v - u \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Предположим, что система (1.26), (1.27) допускает решение (v^α, s^α) . Покажем, что решение $v^\alpha \in U$ обеспечивает улучшение заданного $u \in U$.

Согласно известному свойству проекции выполняется неравенство

$$\left\langle \int_T H_u(p(t, u, v^\alpha), x(t, v^\alpha), u, t) dt + s^\alpha, v^\alpha - u \right\rangle \geq \frac{1}{\alpha} \|v^\alpha - u\|^2.$$

Отсюда и из формулы (1.18) следует уменьшение целевой функции с оцен-

кой

$$\begin{aligned} \Delta_{v^\alpha} \Phi(u) &= - \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v^\alpha), x(t, v^\alpha), u, t) dt + s^\alpha, v^\alpha - u \right\rangle \leq \\ &\leq -\frac{1}{\alpha} \|v^\alpha - u\|^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Таким образом, второй метод нелокального улучшения основывается на решении системы (1.26), (1.27). Отметим, что алгебраическое уравнение (1.27) всегда можно разрешить относительно s по аналогии с универсальными правилами разрешения величин $r(t)$ и q .

Действительно, в случае линейной по u задачи (1.1), (1.2) (функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$ линейны по u) можно положить $s = 0$.

Для квадратичного по управлению случая (функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$ квадратичны по u) s можно представить в виде

$$s = \frac{1}{2} \left(\int_T H_{uu}(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt \right) \cdot (v - u).$$

Очевидно, что при этом уравнение (1.27) удовлетворяется тождественно.

Данный способ, основанный на разложении приращения функции Понтрягина по управлению, легко распространяется на общую полиномиальную по управлению задачу (1.1), (1.2).

Другое универсальное правило определения s в общей нелинейной по управлению задаче (1.1), (1.2) состоит в следующем. Если $\forall i v_i = u_i$, то полагаем $s = 0$. Если $\exists k$ такой, что $v_k \neq u_k$, то определяем $s_i = 0$, $i \neq k$, и s_k вычисляем по формуле

$$s_k = \frac{\int_T \Delta_v H(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt - \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt, v - u \right\rangle}{v_k - u_k}. \quad (1.29)$$

Задачу (1.26), (1.27) также можно представить в канонической форме за-

дачи о неподвижной точке соответствующего оператора управления

$$v = G^\alpha(v), \quad v \in U, \quad \alpha > 0. \quad (1.30)$$

Для этого определим дополнительные отображения I^α и S соотношениями

$$\begin{aligned} I^\alpha(p, x, s, u) &= v^\alpha, \quad p \in C(T), \quad x \in C(T), \quad s \in R^m, \\ v^\alpha &= P_U\left(u + \alpha\left(\int_T H_u(p(t), x(t), u, t)dt + s\right)\right), \\ S(v) &= s, \quad v \in U, \quad s = s(u, v), \end{aligned}$$

где $s(u, v)$ — решение алгебраического уравнения (1.27) для заданного $u \in U$.

Тогда с помощью рассмотренных ранее отображений P , X и введенных отображений I^α , S оператор G^α определяется в виде суперпозиции

$$G^\alpha(v) = I^\alpha(P(v), X(v), S(v), u), \quad v \in U.$$

Таким образом, условия нелокального улучшения (1.23) и (1.26)-(1.27) представляются в форме специальных операторных уравнений, сконструированных на основе операций на максимум функции Понтрягина и проектирования на допустимое множество значений управления, которые можно интерпретировать как задачи о неподвижной точке в пространстве параметров. Методы нелокального улучшения заключаются в поиске неподвижных точек соответствующих операторов G^* и G^α .

В дополнение отметим, что необходимые условия оптимальности (1.4) и (1.5) также можно рассматривать как специальные задачи о неподвижных точках. Неподвижные точки в этих задачах являются экстремальными, т.е. подозрительными на оптимальность управлениями. В работе [20] для решения таких операторных уравнений в классе нелинейных задач (1.1), (1.2) разработаны эффективные методы возмущений и проведен анализ условий сходимости этих методов.

1.4 Условия оптимальности

Точная формула приращения (1.18) позволяет получить простые достаточные условия оптимальности в рассматриваемом нелинейном классе задач (1.1), (1.2) аналогично работе [20]. Действительно, для оптимального управления $u \in U$ согласно формуле (1.18) достаточно (и необходимо), чтобы

$$\int_T \Delta_v H(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt \leq 0, \quad v \in U.$$

В силу введенного отображения (1.21) для выполнения последнего неравенства достаточно требовать выполнения условия

$$u = W^*(u, v), \quad v \in U. \quad (1.31)$$

Таким образом, условие (1.31) является достаточным и необходимым условием оптимальности управления $u \in U$.

Выделим условие

$$u = W^*(u, u), \quad (1.32)$$

которое получается из достаточного условия оптимальности (1.31) при $v = u$.

Нетрудно показать, что ДПМ (1.4) для $u \in U$ в форме условия

$$u = \operatorname{argmax}_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\psi(t, u), x(t, u), u, t) dt, w \right\rangle \quad (1.33)$$

является следствием условия (1.32).

Таким образом, подозрительные на оптимальность управления можно искать, решая уравнение (1.32), которое также можно интерпретировать как задачу о неподвижной точке.

В линейной по управлению задаче (1.1), (1.2) уравнение (1.32) становится эквивалентным необходимому условию оптимальности в форме ДПМ (1.33). Для реализации необходимого условия оптимальности (1.33) в [20] разрабо-

таны эффективные методы возмущений.

Точная формула приращения (1.18) позволяет получить новое необходимое условие оптимальности, усиливающее дифференциальный принцип максимума в линейном по управлению классе задач (1.1), (1.2).

Класс линейных по управлению задач можно представить в форме

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T \left(\langle a(x(t), t), u \rangle + d(x(t), t) \right) dt \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (1.34)$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1.35)$$

в которой матричная функция $A(x, t)$, векторные функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, функции $\varphi(x)$, $d(x, t)$ непрерывны вместе со своими производными по x по совокупности аргументов x, t на множестве $R^n \times T$. Множество $U \subset R^m$ выпукло и компактно.

Функция Понтрягина и точная формула приращения (1.18) принимают вид

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, t) &= H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle, \\ H_0(\psi, x, t) &= \langle \psi, b(x, t) \rangle - d(x, t), \\ H_1(\psi, x, t) &= A^T(x, t)\psi - a(x, t), \\ \Delta_v \Phi(u) &= - \left\langle \int_T H_1(p(t, u, v), x(t, v), t) dt, v - u \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Дифференциальный принцип максимума для $u \in U$ записывается в форме

$$u = \operatorname{argmax}_{w \in U} \left\langle \int_T H_1(\psi(t, u), x(t, u), t) dt, w \right\rangle. \quad (1.37)$$

Задача о неподвижной точке (1.23) для заданного $u \in U$ принимает вид

$$v = \operatorname{argmax}_{w \in U} \left\langle \int_T H_1(p(t, u, v), x(t, v), t) dt, w \right\rangle, \quad v \in U, \quad (1.38)$$

или в канонической форме

$$v = G_1^*(v), \quad v \in U. \quad (1.39)$$

Оператор G_1^* определяется соотношениями

$$\begin{aligned} P(v) &= p, \quad v \in U, \quad p \in C(T), \quad p(t) = p(t, u, v), \quad t \in T, \\ X(v) &= x, \quad v \in U, \quad x \in C(T), \quad x(t) = x(t, v), \quad t \in T, \\ I_1^*(p, x) &= v_1^*, \quad p \in C(T), \quad x \in C(T), \\ v_1^* &= \operatorname{argmax}_{w \in U} \left\langle \int_T H_1(p(t), x(t), t) dt, w \right\rangle, \\ G_1^*(v) &= I_1^*(P(v), X(v)). \end{aligned}$$

Обозначим V_1^* множество неподвижных точек оператора G_1^*

$$V_1^*(u) = \left\{ v \in U : v = \operatorname{argmax}_{w \in U} \left\langle \int_T H_1(p(t, u, v), x(t, v), t) dt, w \right\rangle \right\}.$$

Если $u \in V_1^*(u)$, то очевидно u удовлетворяет ДПМ (1.37). Обратно, если u удовлетворяет ДПМ (1.37), то u является решением уравнения (1.38) при $v = u$, т. е. $u \in V_1^*(u)$. Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема 1.1. *В линейной по управлению задаче (1.34), (1.35) управление $u \in U$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума (1.37), тогда и только тогда, когда u является неподвижной точкой оператора G_1^* .*

Таким образом, ДПМ (1.37) в терминах задачи о неподвижной точке оператора G_1^* можно сформулировать в следующей форме.

Следствие 1.1. *(ДПМ) Для оптимальности управления $u \in U$ необходимо, чтобы вектор u являлся неподвижной точкой оператора G_1^* .*

Из теоремы 1.1 также получаем следующие важные утверждения

Следствие 1.2. *Задача о неподвижной точке оператора G_1^* для управления u , удовлетворяющего ДПМ, всегда разрешима.*

Действительно, в этом случае всегда имеется очевидное решение $v = u$. Отметим, что в случае неединственности неподвижных точек оператора G_1^* появляется возможность строгого улучшения управления, удовлетворяющего дифференциальному принципу максимума.

Следствие 1.3. *Если оператор G_1^* не имеет неподвижных точек на U , то управление u не является оптимальным.*

Аналогичные простые условия оптимальности в линейном по управлению классе задач (1.34), (1.35) можно получить на основе операции проектирования P_U .

Для заданных $u \in U$ и $\alpha > 0$ определим отображение W^α соотношением

$$W^\alpha(u, v) = P_U \left(u + \alpha \int_T H_1(p(t, u, v), x(t, v), t) dt \right), \quad v \in U. \quad (1.40)$$

На основе формулы приращения (1.36) с помощью отображения (1.40) получаем достаточное условие оптимальности для допустимого управления $u \in U$

$$u = W^\alpha(u, v), \quad v \in U, \quad \alpha > 0. \quad (1.41)$$

Условие (1.41) достаточно проверить хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Необходимое условие оптимальности (1.5) для управления $u \in U$

$$u = P_U \left(u + \alpha \int_T H_1(\psi(t, u), x(t, u), t) dt \right), \quad \alpha > 0 \quad (1.42)$$

с помощью отображения (1.40) представляется в виде

$$u = W^\alpha(u, u), \quad \alpha > 0. \quad (1.43)$$

Задача о неподвижной точке (1.26), (1.27) для $u \in U$ принимает вид

$$v = W^\alpha(u, v), \quad v \in U, \quad \alpha > 0, \quad (1.44)$$

которая в операторной форме представляется в виде

$$v = G_1^\alpha(v), \quad v \in U, \quad \alpha > 0. \quad (1.45)$$

Оператор G_1^α определяется в виде суперпозиции отображений

$$\begin{aligned} I_1^\alpha(p, x, u) &= v_1^\alpha, \quad p \in C(T), \quad x \in C(T), \\ v_1^\alpha &= P_U\left(u + \alpha \int_T H_1(p(t), x(t), t) dt\right), \quad \alpha > 0, \\ G_1^\alpha(v) &= I_1^\alpha(P(v), X(v), u), \quad u \in U. \end{aligned}$$

Решение $v^\alpha \in U$ уравнения (1.45) обеспечивает улучшение. При этом в силу известного свойства проекции

$$\left\langle \int_T H_1(p(t, u, v^\alpha), x(t, v^\alpha), t) dt, v^\alpha - u \right\rangle \geq \frac{1}{\alpha} \|v^\alpha - u\|^2$$

имеем оценку

$$\Delta_{v^\alpha} \Phi(u) \leq -\frac{1}{\alpha} \|v^\alpha - u\|^2. \quad (1.46)$$

Обозначим множество неподвижных точек оператора G_1^α

$$V_1^\alpha(u) = \left\{ v \in U : v = P_U\left(u + \alpha \int_T H_1(p(t, u, v), x(t, v), t) dt\right), \quad \alpha > 0 \right\}. \quad (1.47)$$

Если $u \in V_1^\alpha(u)$ хотя бы для одного $\alpha > 0$, то u удовлетворяет необходимому условию оптимальности (1.43). Обратно, если управление $u \in U$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности (1.43), то оно является очевидным решением уравнения (1.45) для всех $\alpha > 0$, т.е. $u \in V_1^\alpha$. Следовательно, справедливо утверждение.

Теорема 1.2. *Управление $u \in U$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности (1.43), тогда и только тогда, когда u является неподвижной точкой оператора G_1^α для всех $\alpha > 0$.*

При этом условие того, что u является неподвижной точкой оператора

G_1^α , достаточно проверить хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Следствие 1.4. (ДПМ) *Для оптимальности управления $u \in U$ необходимо, чтобы вектор u являлся неподвижной точкой оператора G_1^α для всех $\alpha > 0$.*

Следствие 1.5. *Задача о неподвижной точке оператора G_1^α для управления u , удовлетворяющего ДПМ, всегда разрешима.*

Следствие 1.6. *Если оператор G_1^α не имеет неподвижных точек хотя бы для одного $\alpha > 0$, то управление u не является оптимальным.*

Оценка (1.46) для формулы приращения (1.36) гарантирует строгое улучшение управления $u \in U$ при $v^\alpha \in V_1^\alpha(u)$, $v^\alpha \neq u$ (в том числе управления, удовлетворяющего ДПМ). Отсюда следует, что случай неединственности решения задачи о неподвижной точке (1.45) для управления u , удовлетворяющего ДПМ, обеспечивает строгое улучшение управления, удовлетворяющего дифференциальному принципу максимума.

Оценка (1.46) позволяет сформулировать новое усиленное необходимое условие оптимальности на основе предлагаемого подхода улучшения.

Теорема 1.3. *Для оптимальности управления $u \in U$ в задаче (1.34), (1.35) необходимо, чтобы u являлось единственной неподвижной точкой оператора G_1^α для всех $\alpha > 0$.*

$$V_1^\alpha(u) = \{u\}.$$

Действительно, в противном случае, если существует $\alpha > 0$ и решение $v^\alpha \neq u$, то в соответствии с формулой приращения получаем строгое улучшение оптимального управления (противоречие).

Очевидно, что дифференциальный принцип максимума (следствие 1.4) является следствием теоремы. Аналогичные усиленные условия оптимальности ранее были получены в классах линейных по управлению и полиномиальных по состоянию задач оптимального управления в работах [20, 101].

1.5 Задача оптимизации с управляющими параметрами в начальных условиях

Рассмотрим класс задач параметрической оптимизации динамической системы

$$\Phi(\sigma) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u, t) dt \rightarrow \inf_{\sigma \in D}, \quad (1.48)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = a, \quad u \in U, \quad a \in A, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1.49)$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор-функция фазовых переменных (состояние), $u \in R^m$, $a \in R^n$ — векторы управляющих параметров. Множества $U \subset R^m$, $A \subset R^n$ замкнуты и выпуклы. Интервал T фиксирован, $\sigma = (u, a)$ — допустимое управление со значениями из множества $D = U \times A$.

Предполагаются выполненными следующие условия:

1. функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n , функция $F(x, u, t)$, вектор-функция $f(x, u, t)$ правых частей фазовой системы и их производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x, u, t) на множестве $R^n \times U \times T$;
2. вектор-функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$: $\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L\|x - y\|$.

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t, \sigma)$, $t \in T$ системы (1.49) для любого допустимого управления $\sigma \in D$.

Для допустимого управления $\sigma \in D$ обозначим $\psi(t, \sigma)$, $t \in T$ — решение стандартной сопряженной системы (1.3) при $x(t) = x(t, \sigma)$ и управлении σ .

Ставится задача улучшения: для заданного управления $\sigma \in D$ требуется найти управление $\sigma^I \in D$ с условием

$$\Phi(\sigma^I) \leq \Phi(\sigma). \quad (1.50)$$

Приращение целевой функции (1.48) на допустимых управлениях σ , σ^I

имеет вид

$$\Delta_{\sigma}\Phi(\sigma^I) = \Delta_{x(t_1,\sigma)}\varphi(x(t_1,\sigma^I)) + \int_T \Delta_{x(t,\sigma),u}F(x(t,\sigma^I),u^I,t)dt. \quad (1.51)$$

Дополнительно обозначим $\Delta x(t) = x(t,\sigma) - x(t,\sigma^I)$, $\Delta a = a - a^I$.

Введем непрерывную вектор-функцию $p(t) \in R^n$, $t \in T$ с условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1,\sigma^I)) - q, \quad (1.52)$$

где вектор q удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\langle \varphi_x(x(t_1,\sigma^I)) + q, \Delta x(t_1) \rangle = \Delta_{x(t_1,\sigma)}\varphi(x(t_1,\sigma^I)). \quad (1.53)$$

Предполагается, что $q = 0$ в случае линейности функции φ по x , а также в случае $x(t_1,\sigma) = x(t_1,\sigma^I)$.

Тогда приращение терминальной части целевой функции в выражении (1.51) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{x(t_1,\sigma)}\varphi(x(t_1,\sigma^I)) &= \langle \varphi_x(x(t_1,\sigma^I)) + q, \Delta x(t_1) \rangle = \\ &= -\langle p(t_1), \Delta x(t_1) \rangle = -\int_T \frac{d}{dt} \langle p(t), \Delta x(t) \rangle dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle = \\ &= -\int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta \dot{x}(t) \rangle \right) dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle = \\ &= -\int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta_{x(t,\sigma),u}f(x(t,\sigma^I),u^I,t) \rangle \right) dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle. \end{aligned}$$

Далее приращение целевой функции при помощи функции Понтрягина

можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}
\Delta_\sigma \Phi(\sigma^I) &= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \left\langle p(t), \Delta_{x(t,\sigma),u} f(x(t, \sigma^I), u^I, t) \right\rangle \right) dt - \\
&\quad - \langle p(t_0), \Delta a \rangle + \int_T \Delta_{x(t,\sigma),u} F(x(t, \sigma^I), u^I, t) dt = \\
&= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_{x(t,\sigma),u} H(p(t), x(t, \sigma^I), u^I, t) \right) dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle = \\
&= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^I, t) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{x(t,\sigma)} H(p(t), x(t, \sigma^I), u^I, t) \right) dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle. \quad (1.54)
\end{aligned}$$

Определим дифференциально-алгебраическую систему для функции $p(t)$ с условиями (1.52), (1.53) в форме

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t, \sigma^I), u^I, t) - r(t), \quad (1.55)$$

где функция $r(t) \in R^n$, $t \in T$ определяется в каждый момент времени $t \in T$ из алгебраического уравнения

$$\left\langle H_x(p(t), x(t, \sigma^I), u^I, t) + r(t), \Delta x(t) \right\rangle = \Delta_{x(t,\sigma)} H(p(t), x(t, \sigma^I), u^I, t). \quad (1.56)$$

При этом по определению полагаем $r(t) = 0$ в случае линейности функций F , f по x , а также в случае равенства $x(t, \sigma) = x(t, \sigma^I)$.

Тогда в силу дифференциально-алгебраической системы (1.55), (1.56) для $p(t)$ с краевыми условиями (1.52), (1.53) формула приращения (1.54) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Delta_\sigma \Phi(\sigma^I) &= - \int_T \left(\langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^I, t) + \right. \\
&\quad \left. + \langle H_x(p(t), x(t, \sigma^I), u^I, t) + r(t), \Delta x(t) \rangle \right) dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle = \\
&= - \int_T \Delta_u H(p(t), x(t, \sigma), u^I, t) dt - \langle p(t_0), \Delta a \rangle. \quad (1.57)
\end{aligned}$$

Для удобства представления явной зависимости $p(t)$ от управления рассмотрим модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему в форме

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), u, t) - r(t), \quad (1.58)$$

$$\left\langle H_x(p(t), x(t), u, t) + r(t), y(t) - x(t) \right\rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), u, t), \quad (1.59)$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \quad (1.60)$$

$$\left\langle \varphi_x(x(t_1)) + q, y(t_1) - x(t_1) \right\rangle = \Delta_{y(t_1)} \varphi(x(t_1)), \quad (1.61)$$

в которой по определению полагаем $q = 0$, $r(t) = 0$ в случае линейности функций φ , F , f по x (линейная по состоянию задача (1.48),(1.49)), а также в случае $x(t, \sigma) = x(t, \sigma^I)$ при соответствующих $t \in T$.

В линейной по состоянию задаче (1.48),(1.49) модифицированная сопряженная система (1.58)-(1.61) совпадает со стандартной сопряженной системой (1.3).

Для допустимых управлений $\sigma \in D$, $\sigma^I \in D$ обозначим $p(t, \sigma^I, \sigma)$, $t \in T$ — решение модифицированной сопряженной системы (1.58)-(1.61) при $x(t) = x(t, \sigma^I)$, $y(t) = x(t, \sigma)$, $u = u^I$. Из определения следует очевидное равенство $p(t, \sigma, \sigma) = \psi(t, \sigma)$, $t \in T$.

Формула приращения (1.57) в новых обозначениях, в которых указывается явная зависимость фазовых и сопряженных переменных от управления, принимает вид

$$\Delta_\sigma \Phi(\sigma^I) = - \int_T \Delta_u H(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), u^I, t) dt - \langle p(t_0, \sigma^I, \sigma), \Delta a \rangle. \quad (1.62)$$

Полученная формула (1.62) не содержит каких-либо остаточных членов

разложений и позволяет конструировать нелокальные методы улучшения управления. Используемые обозначения решений фазовых и сопряженных систем, явно указывающие их зависимость от управления, позволяют удобно интерпретировать условия улучшения и оптимальности управления как задачи о неподвижной точке определяемых операторов управления.

При заданном $\sigma^I \in D$ определим оператор $A^* : \sigma \rightarrow \sigma^*$ на множестве допустимых управлений D следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma &= (u, a) \rightarrow \sigma^* = (u^*, a^*), \\ u^* &= \operatorname{argmax}_{\tilde{u} \in U} \int_T H(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), \tilde{u}, t) dt, \\ a^* &= \operatorname{argmax}_{\tilde{a} \in A} \langle p(t_0, \sigma^I, \sigma), \tilde{a} \rangle.\end{aligned}$$

Для заданного $\sigma^I \in D$ рассмотрим задачу о неподвижной точке $\sigma = A^*(\sigma)$ для оператора A^* , которая определяется следующей системой уравнений

$$u = \operatorname{argmax}_{\tilde{u} \in U} \int_T H(p(t, \sigma^I, \sigma), x(t, \sigma), \tilde{u}, t) dt, \quad \sigma \in D, \quad (1.63)$$

$$a = \operatorname{argmax}_{\tilde{a} \in A} \langle p(t_0, \sigma^I, \sigma), \tilde{a} \rangle, \quad \sigma \in D. \quad (1.64)$$

Предположим, что задача (1.63), (1.64) имеет решение $\sigma^{II} = (u^{II}, a^{II})$ (возможно не единственное). Тогда в силу определения отображения A^* , получаем

$$\begin{aligned}\Delta_{u^{II}} \int_T H(p(t, \sigma^I, \sigma^{II}), x(t, \sigma^{II}), u^I, t) dt &\geq 0, \\ \langle p(t_0, \sigma^I, \sigma^{II}), a^{II} - a^I \rangle &\geq 0.\end{aligned}$$

Отсюда и из формулы приращения (1.62) следует $\Delta_{\sigma^{II}} \Phi(\sigma^I) \leq 0$.

Таким образом, для улучшения управления $\sigma^I \in D$ достаточно построить и решить задачу о неподвижной точке (1.63), (1.64).

Задача (1.63), (1.64) является обобщением задачи (1.23) на рассматриваемом классе задач с управляющими параметрами в начальных условиях.

Аналогично, можно построить модель неподвижных точек в рассматри-

ваемом классе задач на основе операции проектирования P_U .

1.6 Примеры

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие свойства предлагаемых методов улучшения.

Пример 1.1. (Улучшение нелинейного управления)

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}(x^2(t) + u^2)dt \rightarrow \min_{u \in U},$$

$$\dot{x}(t) = u, \quad x(0) = 1, \quad u \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1].$$

Рассмотрим управление $u = 0$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t, u) = 1$, $t \in T$ и значением целевой функции $\Phi(u) = \frac{1}{2}$. Поставим задачу об улучшении управления u .

Применим метод неподвижных точек. В данном примере имеем функцию Понтрягина и ее производные $H = \psi u - \frac{1}{2}(x^2 + u^2)$, $H_x = -x$, $H_u = \psi - u$, $\Delta_v H = \psi(v - u) - \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$, решение фазовой системы $x(t, v) = 1 + vt$, $t \in T$, $v \in U$, дифференциально-алгебраическую сопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= 1 - r(t), \\ (1 - r(t))vt &= \frac{1}{2}(2 + vt)vt, \\ p(1) &= -q, \\ qv &= 0, \end{aligned}$$

определяющую $p(t, u, v)$, $t \in T$.

При $v = 0$ имеем $x(t, v) = x(t, u)$ и, в соответствии с правилами разрешения алгебраических уравнений, полагаем $r(t) = 0$, $q = 0$. Отсюда получаем $p(t, u, v) = \psi(t, u) = t - 1$, $t \in T$.

При $v \neq 0$ сопряженная система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= 1 + \frac{1}{2}vt, \\ p(1) &= 0,\end{aligned}$$

из которой получаем $p(t, u, v) = t + \frac{vt^2}{4} - 1 - \frac{v}{4}$, $t \in T$.

Отображение W^α с проекционным параметром $\alpha > 0$ имеет вид

$$W^\alpha(u, v, s) = P_U\left(\alpha\left(\int_T p(t, u, v)dt + s\right)\right).$$

Таким образом, для заданного $u \in U$ получаем следующую задачу о неподвижной точке

$$v = P_U\left(\alpha\left(\int_T p(t, u, v)dt + s\right)\right), \quad \alpha > 0,$$

$$\int_T \left(p(t, u, v)v - \frac{1}{2}v^2\right)dt = v\left(\int_T p(t, u, v)dt + s\right).$$

Предположим, что $v = 0$ является решением системы. В этом случае алгебраическое уравнение вырождается в тождество. Тогда в соответствии с правилом определения s , получаем $s = 0$. В результате получаем противоречащее соотношение в задаче о неподвижной точке

$$G^\alpha = P_U\left(-\alpha\frac{1}{2}\right) \neq 0.$$

Следовательно, $v = 0$ не может быть неподвижной точкой.

Предположим, что $v \neq 0$. В данном случае получаем следующую систему, определяющую задачу о неподвижной точке

$$v = P_U\left(\alpha\left(\int_T p(t, u, v)dt + s\right)\right), \quad \alpha > 0,$$

$$\int_T \left(p(t, u, v) - \frac{1}{2}v \right) dt = \int_T p(t, u, v) dt + s,$$

из которой следует

$$v = P_U \left(\alpha \left(\int_T \left(t + \frac{vt^2}{4} - 1 - \frac{v}{4} \right) dt - \frac{1}{2}v \right) \right).$$

После упрощений получаем уравнение

$$v = P_U \left(\alpha \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}v \right) \right), \quad \alpha > 0.$$

Методом подстановки точек $v = \pm 1$ в уравнение легко можно убедиться, что эти точки не могут быть неподвижными. Следовательно, неподвижные точки определяются соотношением

$$v = \alpha \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}v \right),$$

из которого получаем единственное решение

$$-1 < v = \frac{-3\alpha}{2(3 + 2\alpha)} < 0.$$

Полученное решение строго улучшает исходное управление $u = 0$ с оценкой, определяемой условием (1.28).

Отметим, что в данном простом примере, используя явное представление решения фазовой системы по параметру v , легко определяется оптимальное управление $v^* = -\frac{3}{8}$, которое соответствует неподвижной точке при $\alpha = \frac{3}{2}$.

Пример 1.2. (Улучшение управления, удовлетворяющего ДПМ)

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_0^1 (x^2(t) - u^2) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \\ \dot{x}(t) &= u, \quad x(0) = 0, \quad u \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1]. \end{aligned}$$

Ставится задача улучшения управления $u = 0$ с соответствующей фазовой

траекторией $x(t, u) = 0$, $t \in T$ и значением целевой функции $\Phi(u) = 0$. Легко проверяется, что $u = 0$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума.

Имеем $H = \psi u - x^2 + u^2$, решение фазовой системы $x(t, v) = vt$, $t \in T$, $v \in U$, дифференциально-алгебраическую сопряженную систему

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -r(t), \\ r(t)vt &= v^2t^2, \\ p(1) &= -q, \\ qv &= 0,\end{aligned}$$

определяющую $p(t, u, v)$, $t \in T$.

Если $v = 0$, то $x(t, v) = x(t, u)$. Следовательно, полагаем $r(t) = 0$, $q = 0$. При этом $p(t, u, v) = \psi(t, u) = 0$, $t \in T$.

Если $v \neq 0$, то получаем сопряженную систему

$$\dot{p}(t) = -vt, \quad p(1) = 0,$$

из которой следует $p(t, u, v) = \frac{v}{2}(t^2 - 1)$, $t \in T$. Отметим, что полученное представление включает случай $v = 0$.

Таким образом, для заданного $u \in U$ получаем отображение W^α с проекционным параметром $\alpha > 0$ в виде

$$W^\alpha(u, v, s) = P_U\left(\alpha\left(\frac{v}{3} + s\right)\right)$$

и задачу о неподвижной точке

$$v = P_U\left(\alpha\left(\frac{v}{3} + s\right)\right), \quad \alpha > 0,$$

$$\int_T (p(t, u, v)v + v^2)dt = v\left(\int_T (p(t, u, v) + 2v)dt + s\right).$$

При $v = 0$ алгебраическое уравнение удовлетворяется тождественно. Тогда согласно правилу определяем $s = 0$. Отсюда следует, что точка $v = 0$ является решением задачи о неподвижной точке для всех $\alpha > 0$.

При $v \neq 0$ получаем задачу о неподвижной точке

$$v = P_U\left(\alpha\left(\frac{v}{3} + s\right)\right), \quad \alpha > 0,$$

$$\int_T (p(t, u, v) + v) dt = \int_T (p(t, u, v) + 2v) dt + s,$$

из которой получаем

$$v = P_U\left(\alpha\frac{2}{3}v\right).$$

Подстановкой точек $v = \pm 1$ в уравнение легко можно убедиться, что эти точки являются неподвижными при $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Других неподвижных точек $v \neq 0$ уравнение не имеет.

Следовательно, неподвижные точки $v = \pm 1$ при $\alpha \geq \frac{3}{2}$ строго улучшают исходное управление $u = 0$ с оценкой, определяемой условием (1.28).

В данном простом примере, используя явное представление решения фазовой системы по параметру v , легко показывается, что полученные решения $v = \pm 1$ являются оптимальными.

Пример 1.3. (Улучшение линейного управления)

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 ux^2(t) dt \rightarrow \min_{u \in U},$$

$$\dot{x}(t) = u, \quad x(0) = 0, \quad u \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1].$$

Рассмотрим задачу улучшения управления $u = 0$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t, u) = 0$, $t \in T$ и значением целевой функции $\Phi(u) = 0$.

В данном примере имеем $H = \psi u - \frac{1}{2}ux^2$, $H_x = -ux$, $H_u = \psi - \frac{1}{2}x^2$, решение фазовой системы $x(t, v) = vt$, $t \in T$, $v \in U$.

Дифференциально-алгебраическая сопряженная система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -r(t), \quad p(1) = -q, \\ r(t)v &= 0, \quad qv = 0.\end{aligned}$$

Если $v = 0$, то получаем $x(t, v) = x(t, u)$ и $r(t) = 0$, $q = 0$. Отсюда, $p(t, u, v) = \psi(t, u) = 0$, $t \in T$.

Если $v \neq 0$, то $r(t) = 0$, $q = 0$. Следовательно $\dot{p}(t) = 0$, $p(1) = 0$. Отсюда $p(t, u, v) = 0$, $t \in T$.

Отображение W^α с проекционным параметром $\alpha > 0$ принимает вид

$$W^\alpha(u, v) = P_U\left(-\alpha \int_T \left(\frac{1}{2}x^2(t, v)\right) dt\right).$$

Заметим, что в силу линейности по управлению решаемой задачи имеем $s = 0$.

Таким образом, получаем задачу о неподвижной точке

$$v = P_U\left(-\frac{1}{6}\alpha v^2\right) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{6}\alpha v^2 \leq -1, \\ -\frac{1}{6}\alpha v^2, & -1 \leq -\frac{1}{6}\alpha v^2 \leq 0. \end{cases}$$

Задача имеет очевидное решение $v = 0$ при любом $\alpha > 0$. В силу теоремы 1.2 это означает, что исходное управление $u = 0$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума.

Решение $v = -1$ реализуется при $\alpha \geq 6$. Другое ненулевое решение $v = -\frac{6}{\alpha}$ получаем при $\alpha > 6$.

Таким образом, задача о неподвижной точке допускает ненулевые решения при $\alpha \geq 6$, которые строго улучшают исходное управление $u = 0$, удовлетворяющее дифференциальному принципу максимума с оценкой (1.28).

В примере оптимальным решением является управление $v = -1$, которое соответствует решению рассматриваемой задачи о неподвижной точке.

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

2.1 Итерационные методы решения моделируемых задач о неподвижной точке

В первой главе показано, что нелокальное улучшение заданного управления $u \in U$ в задаче (1.1), (1.2), обеспечивается решением специальных задач о неподвижной точке (1.23), (1.26)-(1.27), сконструированных на основе операции на максимум функции Понтрягина и операции проектирования на допустимое множество значений управления.

Задача о неподвижной точке на основе операции на максимум для заданного $u \in U$ имеет вид (1.23)

$$v = \operatorname{argmax}_{w \in U} \int_T H(p(t, u, v), x(t, v), w, t) dt, \quad v \in U.$$

Рассмотрим итерационный процесс для ее решения:

$$v^{k+1} = \operatorname{argmax}_{w \in U} \int_T H(p(t, u, v^k), x(t, v^k), w, t) dt, \quad v^k \in U, \quad k \geq 0. \quad (2.1)$$

На нулевой итерации задается начальное приближение $v^0 \in U$.

В соответствии с операторной формой (1.24) рассматриваемой задачи о неподвижной точке итерационный процесс (2.1) представляется в виде

$$v^{k+1} = G^*(v^k), \quad k \geq 0. \quad (2.2)$$

Аналогично для заданных $u \in U$ и $\alpha > 0$ рассмотрим задачу о неподвижной точке (1.26)-(1.27)

$$v = P_U \left(u + \alpha \left(\int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s \right) \right), \quad v \in U, \quad s \in R^m,$$

$$\begin{aligned} & \int_T \Delta_v H(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt = \\ & = \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s, v - u \right\rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим соответствующий итерационный процесс для ее решения

$$v^{k+1} = P_U \left(u + \alpha \left(\int_T H_u(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t) dt + s^k \right) \right), \quad v^k \in U, \quad k \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_T \Delta_{v^k} H(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t) dt = \\ & = \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t) dt + s^k, v^k - u \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

На нулевой итерации задается начальное приближение $v^0 \in U$.

В соответствии с операторной формой (1.30) рассматриваемой задачи о неподвижной точке итерационный процесс (2.3)-(2.4) определяется формулой

$$v^{k+1} = G^\alpha(v^k), \quad k \geq 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.5)$$

На практике вычислений рассматриваемые итерационные процессы достаточно осуществлять до первого улучшения исходного управления $u \in U$.

Итерационные процессы (2.2), (2.5) имеют форму стандартного метода простой итерации для решения соответствующих операторных уравнений (1.24), (1.30). Условия сходимости метода простой итерации могут быть определены на основе принципа сжимающих отображений. Сформулируем аналог известной теоремы ([99], с. 196–197).

Рассмотрим оператор $G : U \rightarrow U$, действующий на выпуклом компактном множестве $U \subset R^m$ с евклидовой нормой. Для решения операторного уравнения

$$v = G(v), \quad v \in U, \quad (2.6)$$

рассматривается метод простой итерации

$$v^{k+1} = G(v^k), \quad k \geq 0, \quad v^0 \in U. \quad (2.7)$$

Теорема 2.1. Пусть оператор G удовлетворяет условию Липшица в шаре $B(\tilde{v}, l) = \{v \in U : \|v - \tilde{v}\| \leq l, \tilde{v} \in U, l > 0\}$ с константой $0 < M = M(\tilde{v}, l) < 1$

$$\|G(v) - G(w)\| \leq M\|v - w\|, \quad v \in B(\tilde{v}, l), \quad w \in B(\tilde{v}, l), \quad (2.8)$$

причем выполняется условие

$$\|G(\tilde{v}) - \tilde{v}\| \leq (1 - M)l. \quad (2.9)$$

Тогда уравнение (2.6) имеет единственное решение $\bar{v} \in B(\tilde{v}, l)$ и метод простой итерации (2.7) сходится к \bar{v} в евклидовой норме при любом начальном приближении $v^0 \in B(\tilde{v}, l)$. Для погрешности метода справедлива оценка

$$\|v^k - \bar{v}\| \leq M^k \|v^0 - \bar{v}\|, \quad k \geq 0.$$

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству, приведенному в работе [99].

Отметим, что условие (2.9) вводится для обеспечения невыхода приближений итерационного процесса (2.7) за пределы множества $B(\tilde{v}, l)$, на котором выполняется условие Липшица (2.8).

Теорема 2.1 позволяет получить условия сходимости итерационных процессов (2.1) и (2.3)-(2.4) для решения соответствующих задач о неподвижной точке (1.23) и (1.26)-(1.27).

2.2 Сходимость итерационного метода на основе операции на максимум

Рассматривается итерационный процесс (2.2)

$$v^{k+1} = G^*(v^k), \quad k \geq 0, \quad v^0 \in U,$$

где оператор G^* определяется соотношением

$$G^*(v) = I^*(P(v), X(v)).$$

Сформулируем условия, при которых оператор G^* удовлетворяет требованиям теоремы 2.1 применительно к итерационному процессу (2.1) для решения задачи (1.23).

Предположим дополнительно к условиям задачи (1.1), (1.2), что функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных x , u , t на множестве $R^n \times U \times T$.

Предположим, что семейство фазовых траекторий системы (1.2) ограничено:

$$x(t, v) \in \Omega, \quad t \in T, \quad v \in U, \quad (2.10)$$

где $\Omega \subset R^n$ — выпуклое компактное множество.

Отметим, что достаточным условием ограниченности траекторий является выполнение известной оценки [101]

$$\|f(x, u, t)\| \leq K(\|x\| + 1), \quad x \in R^n, \quad u \in U, \quad t \in T, \quad K = \text{const}. \quad (2.11)$$

Тогда при выполнении требования ограниченности (2.10) функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ и их производные по x , u удовлетворяют условию Липшица по переменным $x \in \Omega$, $u \in U$ с одной константой Липшица $L > 0$.

Учитывая, что функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным x , u и используя лемму Гронуолла-Беллмана [33], можно показать аналогично [20], что оператор X удовлетворяет условию Липшица

$$\|X(v) - X(w)\| \leq M_1 \|v - w\|, \quad v, w \in U,$$

где $M_1 = \text{const} > 0$.

Предположим, что величина $r(t)$, определяемая из алгебраического уравнения (1.15) модифицированной сопряженной системы является кусочно-непрерывной, ограниченной и однозначной функцией на T . Величина q , определяемая из алгебраического уравнения (1.17) является ограниченной и однозначной.

В сделанных предположениях, используя свойство линейности сопряженной системы и указанного (2.11) достаточного признака ограниченности траекторий дифференциальной системы, можно показать аналогично [20], что семейство сопряженных траекторий (1.14)-(1.17) ограничено

$$p(t, u, v) \in \Lambda, \quad t \in T, \quad u \in U, \quad v \in U,$$

где $\Lambda \subset R^n$ — выпуклое компактное множество, и оператор P удовлетворяет условию Липшица с константой $M_2 > 0$

$$\|P(v) - P(w)\| \leq M_2 \|v - w\|, \quad v, w \in U.$$

Рассмотрим неподвижную точку $\tilde{v} \in U$ оператора G^* . Обозначим $\tilde{p} \in C(T)$ — соответствующее решение $p(t, u, \tilde{v})$, $t \in T$, $\tilde{x} \in C(T)$ — соответствующее решение $x(t, \tilde{v})$, $t \in T$.

Для обоснования сходимости итерационного процесса (2.1) предположим, что оператор I^* удовлетворяет условию Липшица с константой $\varepsilon > 0$ по переменным $p \in C(T)$, $x \in C(T)$ в шаре $B_0 = B_0(\tilde{p}, \tilde{x}, l)$ радиуса l с центром

в точке (\tilde{p}, \tilde{x})

$$\|I^*(p, x) - I^*(q, y)\| \leq \varepsilon \left(\|p - q\|_{C(T)} + \|x - y\|_{C(T)} \right), \quad (p, x) \in B_0, \quad (q, y) \in B_0.$$

Тогда с учетом предыдущих оценок Липшица можно показать аналогично [20], что оператор G^* будет удовлетворять условию Липшица в некотором шаре $B(\tilde{v}, l_1)$ радиуса $l_1 > 0$ с константой Липшица порядка ε :

$$\|G^*(v) - G^*(w)\| \leq \varepsilon(M_1 + M_2)\|v - w\|, \quad u \in B(\tilde{v}, l_1), \quad v \in B(\tilde{v}, l_1).$$

Выполнение условий Липшица гарантирует однозначность операторов P , I^* и G^* в соответствующих множествах и шарах.

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ обеспечивается выполнение условия (2.8) теоремы 2.1. Условие (2.9) теоремы 2.1 для оператора G^* очевидно удовлетворяется в любом шаре с центром в точке \tilde{v} в силу того, что \tilde{v} является неподвижной точкой оператора G^* .

В итоге, на основании выполнения условий теоремы 2.1 можно сформулировать следующее утверждение о сходимости итерационного процесса (2.1).

Теорема 2.2. *Предположим, что*

1) *семейство фазовых траекторий ограничено*

$$x(t, v) \in \Omega, \quad t \in T, \quad v \in U,$$

где $\Omega \subset R^n$ — выпуклое компактное множество;

2) *функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов x, u, t на множестве $R^n \times U \times T$;*

3) *величина $r(t)$, определяемая из алгебраического уравнения (1.15) модифицированной сопряженной системы является кусочно-непрерывной, ограниченной и однозначной функцией на T . Величина q , определяемая из алгебраического уравнения (1.17) модифицированной сопряженной системы яв-*

ляется ограниченной и однозначной;

4) оператор I^* удовлетворяет условию Липшица по переменным $p \in C(T)$, $x \in C(T)$ в шаре $B_0 = B_0(\tilde{p}, \tilde{x}, l)$ радиуса $l > 0$ с центром в точке (\tilde{p}, \tilde{x}) , где $\tilde{x} = x(t, \tilde{v})$, $\tilde{p} = p(t, u, \tilde{v})$ — соответствующие решения фазовой (1.2) и сопряженной (1.14)-(1.17) систем, \tilde{v} — неподвижная точка оператора G^*

$$\|I^*(p, x) - I^*(q, y)\| \leq \varepsilon \left(\|p - q\|_{C(T)} + \|x - y\|_{C(T)} \right),$$

$$(p, x) \in B_0, (q, y) \in B_0, \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в некотором шаре $B(\tilde{v}, l_1)$ радиуса $l_1 > 0$ итерационный процесс (2.1) сходится в евклидовой норме к единственному решению $\bar{v} \in B(\tilde{v}, l_1)$ задачи (1.23) для любого начального приближения $v^0 \in B(\tilde{v}, l_1)$.

2.3 Сходимость итерационного метода на основе операции проектирования

Для заданного $u \in U$ рассмотрим задачу о неподвижной точке на основе операции проектирования в линейном по управлению классе задач оптимизации управляющих параметров (1.34), (1.35), которая принимает вид

$$v = P_U \left(u + \alpha \int_T H_1(p(t, u, v), x(t, v), t) dt \right), \quad \alpha > 0, v \in U. \quad (2.12)$$

Итерационный процесс для ее решения имеет форму

$$v^{k+1} = P_U \left(u + \alpha \int_T H_1(p(t, u, v^k), x(t, v^k), t) dt \right), \quad v^k \in U, \alpha > 0, k \geq 0. \quad (2.13)$$

В соответствии с операторным уравнением (1.45) итерационный процесс

также представляется в операторной форме

$$v^{k+1} = G_1^\alpha(v^k), \quad k \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad (2.14)$$

где оператор G_1^α определяется формулой

$$G_1^\alpha(v) = I_1^\alpha(P(v), X(v), u).$$

Проведем анализ сходимости итерационного процесса (2.13) на основе теоремы 2.1.

Предположим, что семейство фазовых траекторий системы (1.35) ограничено

$$x(t, v) \in \Omega, \quad t \in T, \quad v \in U, \quad (2.15)$$

где $\Omega \subset R^n$ — выпуклое компактное множество.

Предположим дополнительно к условиям задачи (1.34), (1.35), что функции $A(x, t)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $d(x, t)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x , t на множестве $R^n \times T$.

Тогда при выполнении требования ограниченности (2.15) функции $A(x, t)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $d(x, t)$, $\varphi(x)$ и их производные по x удовлетворяют условию Липшица по $x \in \Omega$ с константой $L > 0$.

Используя условия Липшица для правой части системы (1.35) и лемму Гронуолла-Беллмана [33], можно показать аналогично [20], что оператор X удовлетворяет условию Липшица с константой $M_3 > 0$

$$\|X(v) - X(w)\| \leq M_3 \|v - w\|, \quad v \in U, \quad w \in U.$$

Пусть величина $r(t)$, определяемая из алгебраического уравнения (1.15) сопряженной системы является кусочно-непрерывной, ограниченной и однозначной функцией на T . Величина q , определяемая из алгебраического урав-

нения (1.17) является ограниченной и однозначной.

В данных предположениях отметим однозначность оператора G_1^α , $\alpha > 0$ ввиду свойств оператора проектирования P_U .

В сделанных предположениях можно показать, что в силу линейности сопряженной системы и достаточного признака ограниченности траекторий (2.11), семейство сопряженных траекторий (1.14)-(1.17) ограничено

$$p(t, u, v) \in \Lambda, \quad t \in T, \quad u \in U, \quad v \in U,$$

где $\Lambda \subset R^n$ — выпуклое компактное множество, и оператор P удовлетворяет условию Липшица с константой $M_4 > 0$

$$\|P(v) - P(w)\| \leq M_4 \|v - w\|, \quad v \in U, \quad w \in U. \quad (2.16)$$

На основании выполнения известного условия Липшица для оператора проектирования P_U и условия ограниченности (2.15) получаем

$$\begin{aligned} & \|I_1^\alpha(p, x, u) - I_1^\alpha(q, y, v)\|^2 \leq \left\| (u - v) + \right. \\ & \left. + \alpha \int_T (H_1(p(t), x(t), t) - H_1(q(t), y(t), t)) dt \right\|^2 \leq \\ & \leq \|u - v\|^2 + 2\alpha \left\langle u - v, \int_T (H_1(p(t), x(t), t) - H_1(q(t), y(t), t)) dt \right\rangle + \\ & + \alpha^2 \int_T \|H_1(p(t), x(t), t) - H_1(q(t), y(t), t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Предположим, что для функции H_1 выполняется условие

$$\begin{aligned} \left\langle u - v, \int_T (H_1(p, x, t) - H_1(q, y, t)) dt \right\rangle & \leq -L_1 \|u - v\|^2, \\ u, v \in U, \quad p, q \in P, \quad x, y \in \Omega, \quad t \in T, \end{aligned}$$

где $L_1 = \text{const} > 0$.

В итоге нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} & \left\| I_1^\alpha(P(u), X(u), u) - I_1^\alpha(P(v), X(v), v) \right\| \leq \\ & \leq (1 - 2\alpha L_1 + \alpha^2 L_2)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|, \quad u, v \in U, \quad \alpha > 0, \end{aligned}$$

где $L_2 = \text{const} > 0$.

Таким образом, в сделанных предположениях при достаточно малых $\alpha > 0$ оператор G_1^α удовлетворяет условию Липшица с константой меньше единицы, т.е. достигается выполнение условия (2.8) теоремы 2.1 на всем допустимом множестве U . При этом условие (2.9) становится избыточным.

В результате на основе теоремы 2.1 можно сформулировать следующее утверждение о сходимости итерационного процесса (2.13).

Теорема 2.3. *Предположим, что*

1) *семейство фазовых траекторий в задаче (1.34), (1.35) ограничено*

$$x(t, v) \in \Omega, \quad t \in T, \quad v \in U,$$

где $\Omega \subset R^n$ — *выпуклое компактное множество;*

2) *функции $A(x, t)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $d(x, t)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x , t на $R^n \times T$;*

3) *величина $r(t)$, определяемая из алгебраического уравнения (1.15) модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы является кусочно-непрерывной, ограниченной и однозначной функцией на T . Величина q , определяемая из алгебраического уравнения (1.17) модифицированной сопряженной системы является ограниченной и однозначной;*

4) *для функции H_1 выполняется условие*

$$\begin{aligned} & \left\langle u - v, \int_T (H_1(p, x, t) - H_1(q, y, t)) dt \right\rangle \leq -L_1 \|u - v\|^2, \\ & u, v \in U, \quad p, q \in P, \quad x, y \in \Omega, \quad t \in T, \end{aligned}$$

где $L_1 = \text{const} > 0$.

Тогда для достаточно малого параметра проектирования $\alpha > 0$ итерационный процесс (2.13) сходится в евклидовой норме к единственному решению $\bar{v} \in U$ задачи (2.12) для любого начального приближения $v^0 \in U$.

2.4 Принципиальная схема методов неподвижных точек

Предлагаемые методы неподвижных точек заключаются в последовательном решении задач о неподвижной точке. При этом работа метода организуется в два цикла: внешний и внутренний. Во внутреннем цикле реализуется итерационный алгоритм решения задачи о неподвижной точке, который проводится до первого строгого улучшения заданного управления. Во внешнем цикле для найденного улучшающего управления строится новая задача о неподвижной точке и итерационный процесс повторяется.

Предложенные методы неподвижных точек представляют собой семейство методов, конкретная реализация которых характеризуется следующими принципиальными особенностями, включающими:

1. моделируемый оператор управления;
2. способ решения алгебраических уравнений модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы;
3. итерационный метод решения модельных задач о неподвижной точке.

В данной работе для вычислительных экспериментов реализуется метод неподвижных точек на основе оператора проектирования на допустимое множество значений управления (1.25). Рассматривается универсальный способ разрешения алгебраических уравнений (1.15), (1.17), (1.27) модифицированной сопряженной системы, описанный в параграфах 1.2, 1.3 Для решения задач о неподвижной точке применяется метод простой итерации.

Пошаговый **алгоритм метода неподвижных точек** для решения задачи (1.1), (1.2) описывается следующим образом.

Для $u \in U$, $x(t, u)$, $\Phi(u)$:

Шаг 1. Задаются k , v^k .

Шаг 2. Вычисляются $x(t, v^k)$, $\Phi(v^k)$.

Шаг 3. Находится решение $p(t) = p(t, u, v^k)$ дифференциально-алгебраической системы:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -H_x(p(t), x(t, u), u, t) - r(t), \\ \left\langle H_x(p(t), x(t, u), u, t) + r(t), x(t, v^k) - x(t, u) \right\rangle &= \Delta_{x(t, v^k)} H(p(t), x(t, u), u, t), \\ p(t_1) &= -\varphi_x(x(t_1, u)) - q, \\ \left\langle \varphi_x(x(t_1, u)) + q, x(t_1, v^k) - x(t_1, u) \right\rangle &= \Delta_{x(t_1, v^k)} \varphi(x(t_1, u)). \end{aligned}$$

Вектор-функция $r(t)$ и вектор q определяются по правилам (1.19), (1.20).

Шаг 4. Строится $(k + 1)$ -ое приближение:

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= P_U \left(u + \alpha \left(\int_T H_u(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t) dt + s^k \right) \right), \quad v^k \in U, \\ &\int_T \Delta_{v^k} H(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t) dt = \\ &= \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t) dt, v^k - u \right\rangle + \langle s^k, v^k - u \rangle, \end{aligned}$$

где вектор s^k определяется по правилу (1.29).

Шаг 5. Вычисляется v^{k+1} , $\Phi(v^{k+1})$ и проверяется условие улучшения: $\Phi(v^{k+1}) < \Phi(u)$.

Если условие улучшения выполняется, то $u = v^{k+1}$. Строится новая задача о неподвижной точке, и делается переход к шагу 1. В противном случае, осуществляется переход к шагу 6.

Шаг 6. Проверяется условие окончания расчета $\|v^{k+1} - v^k\| \leq \varepsilon \|v^k\|$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Если условие выполняется, то переход к шагу 7. В противном случае, $v^k = v^{k+1}$ и делается переход к шагу 3.

Шаг 7. Проверяется дополнительное условие окончания расчета $|\Phi(v^{k+1}) - \Phi(u)| \leq \varepsilon |\Phi(u)|$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Если условие выполняется, то расчет заканчивается с выходным управлением $\hat{v} = v^{k+1}$. В противном случае, $u = v^{k+1}$ и делается возврат к шагу 1.

На рисунке 2.1 представляется блок-схема описанного алгоритма.

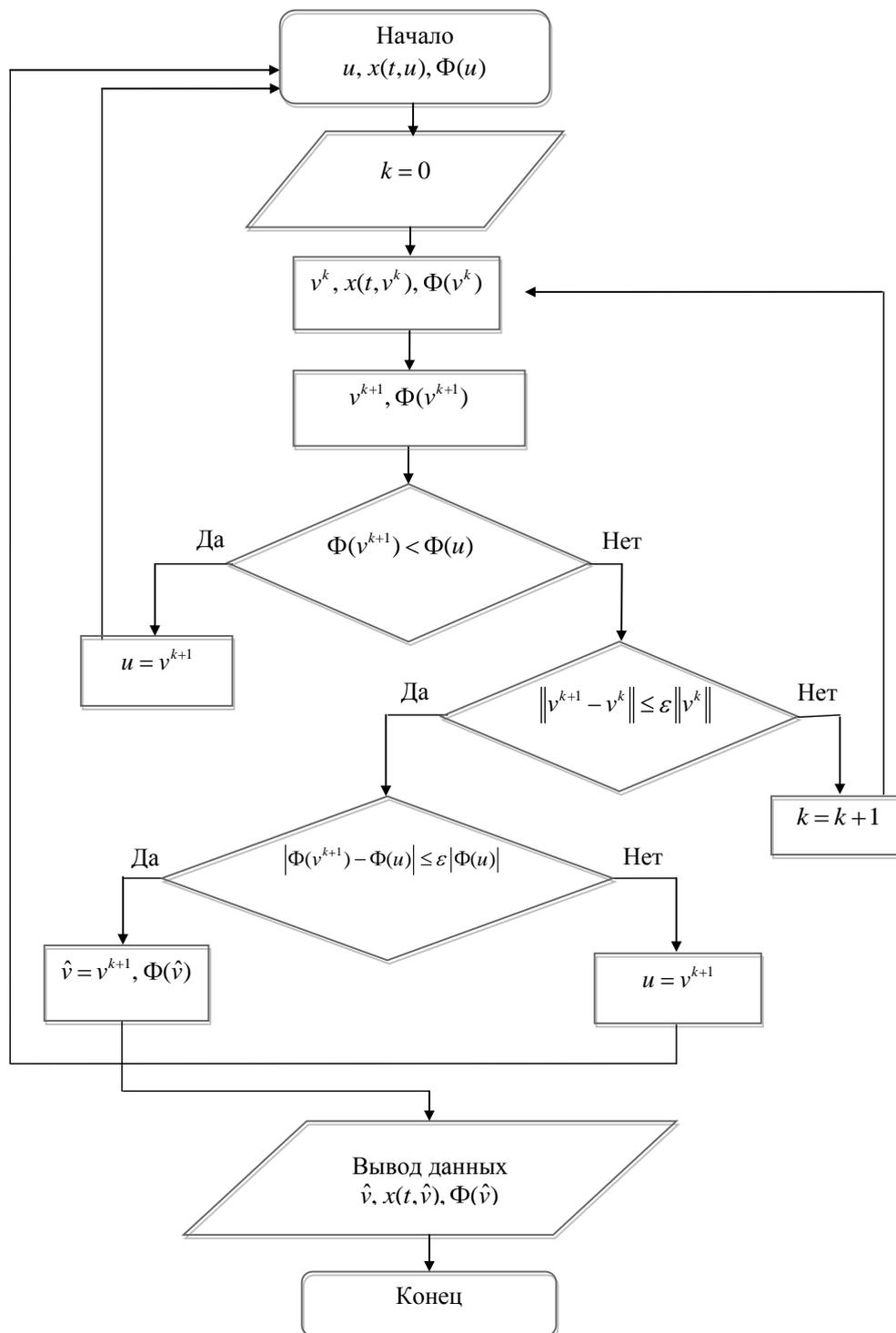


Рис. 2.1. Блок-схема алгоритма метода неподвижных точек

2.5 Вычислительные особенности реализации методов

Вычислительная реализация метода неподвижных точек определяется следующими особенностями.

1) Значения фазовых и сопряженных траекторий запоминаются в узлах заданной равномерной сетки с шагом дискретизации d на интервале T .

2) Значения функции $x(t)$ между узлами заданной равномерной сетки на отрезке T интерполируются линейно при численном решении сопряженной системы.

3) Численное интегрирование фазовой и сопряженной систем осуществляется методом Рунге-Кутты-Вернера переменного (5-6) порядка и шага с помощью модуля DIVPRK библиотеки IMSL Fortran Power Station 4.0.

4) Алгебраические уравнения (1.15), (1.17), (1.27) решаются по следующему правилу. Правило демонстрируется на примере вычисления вектор-функции $r(t)$.

Для каждого индекса i ($i = \overline{1, n}$), начиная с первого, проверяется условие $x_i(t, v^k) = x_i(t, u)$. В случае его выполнения соответствующая компонента вектор-функции $r(t)$ приравнивается нулю, т.е. $r_i(t) = 0$. В противном случае, i -тая компонента вычисляется по формуле

$$r_i(t) = \frac{\Delta_{x_i(t, v^k)} H(p(t), x(t, u), u, t) - \langle H_x(p(t), x(t, u), u, t), x(t, v^k) - x(t, u) \rangle}{x_i(t, v^k) - x_i(t, u)},$$

все остальные компоненты зануляются.

Отметим, что существует множество альтернативных правил разрешения алгебраических уравнений (1.15), (1.17), (1.27). Например, можно вычислять вектор-функцию $r(t)$, проверяя условие равенства $x_i(t, v^k) = x_i(t, u)$, начиная не с первой компоненты, а, наоборот, с последней. Многообразие разрешающих правил приводит к многообразию улучшающих управлений, что значительно повышает вычислительный потенциал предлагаемых методов непо-

движных точек. При этом методы неподвижных точек могут эффективно реализовываться с применением параллельных вычислений, при которых выполняется одновременный расчет разрешающих правил с выбором наилучшего среди полученных улучшающих управлений.

5) Проекционный параметр α для каждой оптимизационной задачи выбирается экспериментально в ходе расчетов.

Построенные методы, основанные на решении специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов в пространстве управлений, обладают свойством нелокальности улучшения (улучшение необязательно гарантируется только в локальной окрестности улучшаемого управления), позволяют получать новое усиленное условие оптимальности, а также имеют возможность улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума.

Указанные свойства методов являются существенными факторами повышения вычислительной эффективности решения задач рассматриваемого класса.

ГЛАВА 3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данной главе проводится сравнительный анализ эффективности предложенных методов на известных тестовых и модельных задачах: самолет с автопилотом, кинетика ядерного реактора, эколого-экономическая задача, описывающая динамику выпуска продукции с учетом загрязнения.

3.1 Тестовый пример 1

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= u, \quad x(0) = 1, \quad u \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В данном примере оптимальным решением является управление $u^* = -0,375$. Ему соответствует значение целевой функции $\Phi(u^*) = 0,40625$.

Для решения данной задачи рассматривается метод неподвижных точек на основе операции проектирования.

Функция Понтрягина и ее производные:

$$H(p, x, u, t) = pu - \frac{1}{2}(x^2 + u^2),$$

$$H_x = -x,$$

$$H_u = p - u.$$

Для заданного $u \in U$ задача о неподвижной точке (1.26)-(1.27) принимает вид:

$$v = P_U \left(u + \alpha \left(\int_0^1 (p(t, u, v) - u) dt + s \right) \right),$$

$$\left(\int_0^1 (p(t, u, v) - u) dt + s \right) (v - u) = \int_0^1 \left(p(t, u, v)(v - u) - \frac{1}{2}(v^2 - u^2) \right) dt,$$

где $p(t, u, v)$ — решение дифференциально-алгебраической сопряженной си-

СТЕМЫ:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= x(t, u) - r(t), \\ (x(t, u) - r(t))(x(t, u) - x(t, v)) &= \frac{1}{2} \left(x^2(t, u) - x^2(t, v) \right), \end{aligned}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} p(1) &= -q, \\ q(x(t_1, v) - x(t_1, u)) &= 0. \end{aligned}$$

В соответствии с указанными в параграфах 1.2, 1.3 правилами из алгебраических соотношений получаем:

$$\begin{aligned} r(t) &= \begin{cases} 0, & x(t, u) = x(t, v), \\ \frac{1}{2}(x(t, u) - x(t, v)), & x(t, u) \neq x(t, v), \end{cases} \\ q &= \begin{cases} 0, & x(t_1, u) = x(t_1, v), \\ 0, & x(t_1, u) \neq x(t_1, v), \end{cases} \\ s &= \begin{cases} 0, & u = v, \\ \frac{1}{2}(u - v), & u \neq v. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда задача о неподвижной точке принимает вид:

$$v = P_U \left(u + \alpha \left(\int_0^1 p(t, u, v) dt - \frac{1}{2}(u + v) \right) \right),$$

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{2} \left(x(t, u) + x(t, v) \right), \quad p(1) = 0.$$

Для ее решения применяется итерационный процесс:

$$v^{k+1} = P_U \left(u + \alpha \left(\int_0^1 p(t, u, v^k) dt - \frac{1}{2}(u + v^k) \right) \right).$$

Результаты численных расчетов приводятся в таблицах 3.1, 3.2.

Таблица 3.1 Результаты расчетов для начального
входного управления $u = 0$

v^0	α	\hat{v}	$\Phi(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ	Кол-во задач Коши
0	10^{-2}	-0,375	0,40625	191	776
	0,1	-0,375	0,40625	28	130
	0,3	-0,375	0,40625	16	94
	0,5	-0,375	0,40625	23	146
	0,7	-0,375	0,40625	36	258
-1	10^{-2}	-0,375	0,40625	165	672
	0,1	-0,375	0,40625	23	113
	0,3	-0,375	0,40625	16	97
	0,5	-0,375	0,40625	11	98
	0,7	-0,375	0,40625	21	183
1	10^{-2}	-0,375	0,40625	169	688
	0,1	-0,375	0,40625	27	129
	0,3	-0,375	0,40625	14	89
	0,5	-0,375	0,40625	17	122
	0,7	-0,375	0,40625	15	150

Таблица 3.2 Результаты расчетов для начального
входного управления $u = 0,5$

v^0	α	\hat{v}	$\Phi(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ	Кол-во задач Коши
0	10^{-2}	-0,375	0,40625	304	1228
	0,1	-0,375	0,40625	29	131
	0,3	-0,375	0,40625	16	94
	0,5	-0,375	0,40625	19	127
	0,7	-0,375	0,40625	25	190
-1	10^{-2}	-0,375	0,40625	346	1399
	0,1	-0,375	0,40625	44	197
	0,3	-0,375	0,40625	17	104
	0,5	-0,375	0,40625	23	152
	0,7	-0,375	0,40625	48	327
1	10^{-2}	-0,375	0,40625	101	413
	0,1	-0,375	0,40625	39	174
	0,3	-0,375	0,40625	15	90
	0,5	-0,375	0,40625	21	144
	0,7	-0,375	0,40625	32	242

Расчеты проводились при $\varepsilon = 10^{-5}$ для различных входных начальных управлений $u \in U$. В качестве начальных приближений v^0 для итерационного процесса рассматривались управления, равные: 0; -1; 1. Параметр α варьировался от 10^{-2} до 1. Наилучшие результаты по скорости сходимости итерационного процесса достигались при $\alpha = 0,3$. При $\alpha > 0,7$ метод не сходится. В таблицах через \hat{v} и $\Phi(\hat{v})$ обозначены, соответственно, полученные расчетные значения управления и целевой функции. ЗНТ расшифровывается как задача о неподвижной точке.

В рассматриваемом примере метод демонстрирует глобальную сходимость, т.е. сходится к оптимальному управлению для различных начальных приближений $v^0 \in U$ и различных начальных управлений $u \in U$.

3.2 Тестовый пример 2

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_0^1 (x^2(t) - u^2) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= u, \quad x(0) = 0, \quad u \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В данном примере оптимальным решением являются управления $u^* = \pm 1$.
Оптимальное значение целевой функции равно $\Phi(u^*) = -\frac{2}{3}$.

Функция Понтрягина и ее производные:

$$H(p, u, x, t) = pu - x^2 + u^2,$$

$$H_x = -2x,$$

$$H_u = p + 2u.$$

Для заданного $u \in U$ задача о неподвижной точке на основе операции проектирования принимает вид:

$$v = P_U \left(u + \alpha \left(\int_0^1 (p(t, u, v) + 2u) dt + s \right) \right),$$

$$\left(\int_0^1 (p(t, u, v) + 2u) dt + s \right) (v - u) = \int_0^1 \left(p(t, u, v)(v - u) + (v^2 - u^2) \right) dt,$$

где $p(t, u, v)$ — решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы:

$$\dot{p}(t) = 2x(t, u) - r(t),$$

$$(-2x(t, u) + r(t))(x(t, v) - x(t, u)) = -x^2(t, v) + x^2(t, u),$$

с начальными условиями

$$p(1) = -q,$$

$$q(x(t_1, v) - x(t_1, u)) = 0.$$

В соответствии с правилами из алгебраических соотношений получаем

$$r(t) = \begin{cases} 0, & x(t, v) = x(t, u), \\ x(t, u) - x(t, v), & x(t, v) \neq x(t, u), \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} 0, & x(t_1, v) = x(t_1, u), \\ 0, & x(t_1, v) \neq x(t_1, u), \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 0, & v = u, \\ v - u, & v \neq u. \end{cases}$$

Отсюда задача о неподвижной точке принимает вид:

$$v = P_U \left(u + \alpha \left(\int_0^1 p(t, u, v) dt + u + v \right) \right),$$

$$\dot{p}(t) = x(t, u) + x(t, v), \quad p(1) = 0.$$

Для ее решения применяется итерационный процесс:

$$v^{k+1} = P_U \left(u + \alpha \left(\int_0^1 p(t, u, v^k) dt + u + v^k \right) \right), \quad v^0 \in U, \quad k \geq 0.$$

Результаты численных расчетов представлены в таблицах 3.3, 3.4. Расчеты проводились при $\varepsilon = 10^{-5}$ для различных входных начальных управлений $u \in U$. В качестве начальных приближений v^0 для итерационного процесса рассматривались управления, равные $0; -0,5; 0,5; -1; 1$. Значения параметра α выбирались равными $10^{-2}, 1, 10^2$.

Таблица 3.3 показывает, что для управления $u = 0$, удовлетворяющего дифференциальному принципу максимума, задача о неподвижной точке имеет три численных решения $\hat{v} = 0, \pm 1$. При этом, при выборе в качестве начального приближения $v^0 = u$ строгого улучшения не происходит, ввиду характеризуемых свойств задачи о неподвижной точке. В этом случае

необходимо задавать начальные приближения $v^0 \neq u$ для того, чтобы реализовать строгое улучшение этого управления. При этом последовательность улучшающихся управлений, генерируемая алгоритмом, сходится к одному из оптимальных решений в зависимости от знака v^0 .

Таблица 3.3 Результаты расчетов для начального входного управления $u = 0$

v^0	α	\hat{v}	$\Phi(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ	Кол-во задач Коши
0	10^{-2}	0	0	1	4
	1	0	0	1	4
	10^2	0	0	1	4
-0.5	10^{-2}	-1.000	-0.667	189	756
	1	-1.000	-0.667	4	16
	10^2	-1.000	-0.667	2	8
0.5	10^{-2}	1.000	-0.667	189	756
	1	1.000	-0.667	4	16
	10^2	1.000	-0.667	2	8
-1	10^{-2}	-1.000	-0.667	133	535
	1	-1.000	-0.667	3	15
	10^2	-1.000	-0.667	2	11
1	10^{-2}	1.000	-0.667	133	535
	1	1.000	-0.667	3	15
	10^2	1.000	-0.667	2	11

Расчеты для других входных начальных управлений $u \in U$, которые не являются оптимальными, показывают, что единственным решением задачи о неподвижной точке является одно из оптимальных решений в зависимости от знака u . При этом метод сходится к этому оптимальному решению для произвольных начальных приближений v^0 .

Например, для входного управления $u < 0$ единственным численным решением задачи о неподвижной точке является расчетное оптимальное управление $\hat{v} = -1$. В этом случае метод сходится к оптимальному решению для

любого начального приближения v^0 . Этот результат, в частности, демонстрируется в таблице 3.4.

Аналогично, если $u > 0$, то единственным численным решением задачи о неподвижной точке является $\hat{v} = 1$, и метод сходится к этому решению для любого начального приближения v^0 .

Таблица 3.4 Результаты расчетов для начального входного управления $u = -0,5$

v^0	α	\hat{v}	$\Phi(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ	Кол-во задач Коши
0	10^{-2}	-1.000	-0.667	71	256
	1	-1.000	-0.667	2	8
	10^2	-1.000	-0.667	2	8
-0.5	10^{-2}	-1.000	-0.667	42	235
	1	-1.000	-0.667	2	11
	10^2	-1.000	-0.667	2	8
0.5	10^{-2}	-1.000	-0.667	396	378
	1	-1.000	-0.667	2	14
	10^2	-1.000	-0.667	2	8
-1	10^{-2}	-1.000	-0.667	30	375
	1	-1.000	-0.667	2	11
	10^2	-1.000	-0.667	2	8
1	10^{-2}	-1.000	-0.667	37	378
	1	-1.000	-0.667	2	14
	10^2	-1.000	-0.667	2	8

Данный пример, во-первых, демонстрирует возможность сходимости предлагаемого метода к различным оптимальным решениям в случае их неединственности. Во-вторых, показывается возможность строго улучшения управления, удовлетворяющего дифференциальному принципу максимума, предлагаемым методом в ходе численного расчета.

3.3 Модельная задача «самолет с автопилотом»

Рассматривается задача понижения порядка следующей системы дифференциальных уравнений [69, 106]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = z_5, \quad \dot{z}_5 = z_6, \\ \dot{z}_6 &= -291,1z_1 - 771,2z_2 - 1146,5z_3 - 364,2z_4 - 107,4z_5 - 16,4z_6, \\ z_1(0) &= 0, \quad z_2(0) = 20, \quad z_3(0) = \dots = z_6(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Идентифицируемая система рассматривается в форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u_2x_1 + u_1x_2, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 20. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Критерием близости идентифицируемой системы к «понижаемой» служит взвешенная среднеквадратическая ошибка в виде минимизируемой целевой функции:

$$I = \int_0^7 \sum_{i=1}^2 \lambda_i [x_i(t) - z_i(t)]^2 dt \rightarrow \min,$$

где $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2$ — весовые коэффициенты.

В работе [106] задача численно решалась для фиксированных значений весовых коэффициентов: а) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$; б) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. В качестве начального приближения методов выбиралось управление: $u_1^0 = -0,6$; $u_2^0 = -0,25$. В [106] были получены следующие оптимальные расчетные значения параметров и минимальной среднеквадратической ошибки для каждого из случаев:

$$\text{а) } u_1^* = -0,5453; \quad u_2^* = -0,2899; \quad I^* = 9,8461;$$

$$\text{б) } u_1^* = -0,5589; \quad u_2^* = -0,2940; \quad I^* = 30,3548.$$

В данной работе для решения задачи применяется метод неподвижных

точек. Выпишем функцию Понтрягина и ее производные:

$$H(p, x, u, t) = p_1 x_2 + p_2(u_2 x_1 + u_1 x_2) - \lambda_1(x_1 - z_1)^2 - \lambda_2(x_2 - z_2)^2,$$

$$H_{x_1} = p_2 u_2 - 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 z_1,$$

$$H_{x_2} = p_1 + p_2 u_1 - 2\lambda_2 x_2 + 2\lambda_2 z_2,$$

$$H_{u_1} = p_2 x_2,$$

$$H_{u_2} = p_2 x_1.$$

Для заданного $u \in U$ задача о неподвижной точке принимает вид:

$$v_1 = P_U(u_1 + \alpha(\int_0^7 p_2(t, u, v)x_2(t, v)dt + s_1)),$$

$$v_2 = P_U(u_2 + \alpha(\int_0^7 p_2(t, u, v)x_1(t, v)dt + s_2)),$$

$$\begin{aligned} & \int_0^7 (p_2(t, u, v)x_1(t, v)(v_2 - u_2) + p_2(t, u, v)x_2(t, v)(v_1 - u_1))dt = \\ & = \int_0^7 p_2(t, u, v)x_2(t, v)dt(v_1 - u_1) + \int_0^7 p_2(t, u, v)x_1(t, v)dt(v_2 - u_2) + \\ & \quad + s_1(v_1 - u_1) + s_2(v_2 - u_2), \end{aligned}$$

где $p(t, u, v)$ — решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы:

$$\dot{p}_1(t) = -p_2 u_2 + 2\lambda_1 x_1(t, u) - 2\lambda_1 z_1 - r_1(t),$$

$$\dot{p}_2(t) = -p_1 - p_2 u_1 + 2\lambda_2 x_2(t, u) - 2\lambda_2 z_2 - r_2(t).$$

Функции $r_1(t)$, $r_2(t)$ определяются из алгебраического уравнения:

$$(\lambda_1(x_1(t, v) - x_1(t, u)) + r_1(t))(x_1(t, v) - x_1(t, u)) +$$

$$+(\lambda_2(x_2(t, v) - x_2(t, u)) + r_2(t))(x_2(t, v) - x_2(t, u)) = 0.$$

Начальные дифференциально-алгебраические условия имеют вид:

$$p_1(7) = -q_1, \quad p_2(7) = -q_2,$$

$$q_1(x_1(t_1, v) - x_1(t_1, u)) + q_2(x_2(t_1, v) - x_2(t_1, u)) = 0.$$

В вычислительных экспериментах алгебраические уравнения для вектор-функции $r(t)$ и векторов q , s разрешались согласно правилам, описанным в параграфе 2.5.

Результаты расчетов для случая $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ при различных начальных приближениях v^0 представлены в таблицах 3.5-3.7:

Таблица 3.5 Результаты расчетов для начального управления $u_1 = -0,6$; $u_2 = -0,25$

v^0	α	\hat{v}	$I(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
$-0,6; -0,25$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	437
$-0,5; -0,3$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5381; -0,2889$	9,7679	184
	10^{-6}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	917
$-0,5453; -0,2899$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5381; -0,2889$	9,7679	235
	10^{-6}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	1271

Таблица 3.6 Результаты расчетов для начального
управления $u_1 = -1; u_2 = -0,5$

v^0	α	\hat{v}	$I(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
$-0,6; -0,25$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	3421
$-0,5; -0,3$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	2276
$-0,5453; -0,2899$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	274
	10^{-6}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	2699

Таблица 3.7 Результаты расчетов для начального
управления $u_1 = -0,5453; u_2 = -0,2899$

v^0	α	\hat{v}	$I(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
$-0,6; -0,25$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5381; -0,2890$	9,7679	186
	10^{-6}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	468
$-0,5; -0,3$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5380; -0,2890$	9,7679	70
	10^{-6}	$-0,5379; -0,2890$	9,7679	1094
$-0,5453; -0,2899$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5381; -0,2889$	9,7679	179
	10^{-6}	$-0,5379; -0,2890$	9,7679	472

Наилучшая эффективность метода наблюдалась при $\alpha = 10^{-5}$ и начальных управлениях $u_1 = -0,5453, u_2 = -0,2899$. При $\alpha > 10^{-5}$ итерационный процесс не сходится.

На рисунке 3.1 для сравнения показаны две первые компоненты $z_1(t), z_2(t)$ точного решения системы (3.3) и полученное решение $x_1(t), x_2(t)$ идентифицируемой системы (3.4) при оптимальных расчетных значениях параметров $\hat{v}_1 = -0,5380; \hat{v}_2 = -0,2890$ для случая а).

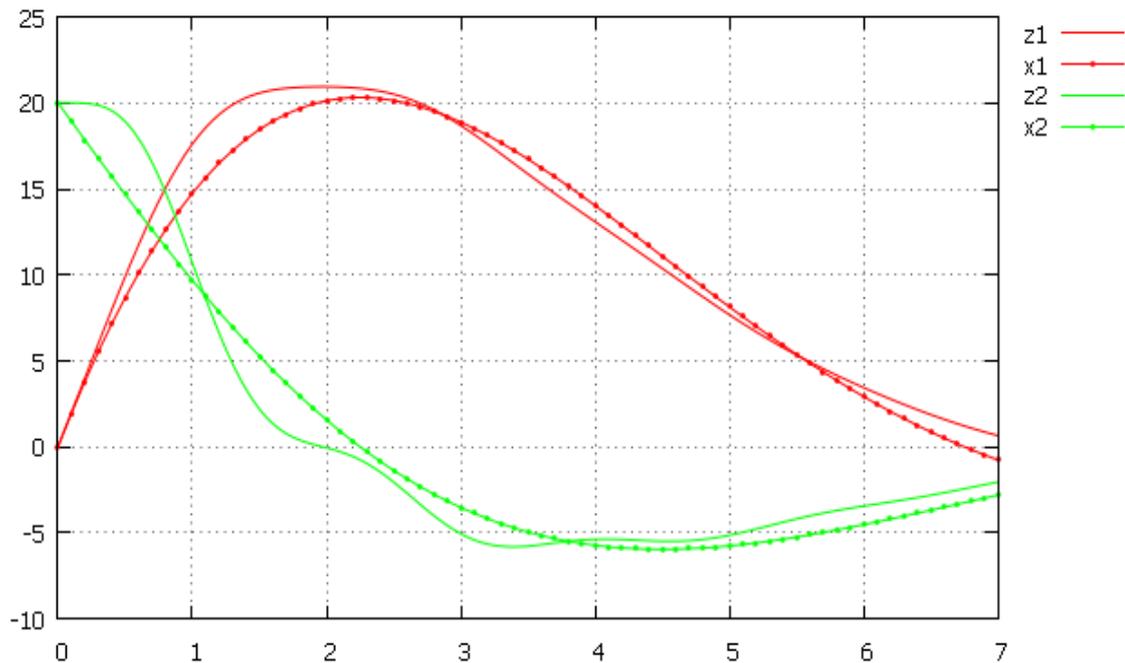


Рис. 3.1. z_1, z_2 - точное решение, x_1, x_2 - полученное решение при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$

Результаты для случая $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ демонстрируются в таблицах 3.8-3.10:

Таблица 3.8 Результаты расчетов для начального управления $u_1 = -0,6; u_2 = -0,25$

v^0	α	\hat{v}	$I(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
$-0,6; -0,25$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	906
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	10735
$-0,5; -0,3$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	100
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	1059
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	14072
$-0,5589; -0,2940$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	36
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	649
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	9405

Таблица 3.9 Результаты расчетов для начального
управления $u_1 = -1; u_2 = -0,5$

v^0	α	\hat{v}	$I(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
$-0,6; -0,25$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	2458
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	24623
$-0,5; -0,3$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	2198
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	20840
$-0,5589; -0,2940$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	2019
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	22821

Таблица 3.10 Результаты расчетов для начального
управления $u_1 = -0,5589; u_2 = -0,2940$

v^0	α	\hat{v}	$I(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
$-0,6; -0,25$	10^{-5}	-	-	не сходится
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	733
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	9577
$-0,5; -0,3$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	46
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	786
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	9071
$-0,5589; -0,2940$	10^{-4}	-	-	не сходится
	10^{-5}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	66
	10^{-6}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	630
	10^{-7}	$-0,5486; -0,2927$	28,51	11079

Наилучшая эффективность метода также наблюдалась при $\alpha = 10^{-5}$. При $\alpha > 10^{-5}$ итерационный процесс не сходится.

На рисунке 3.2 для сравнения представлены первые две компоненты $z_1(t), z_2(t)$ точного решения системы (3.3) и полученное решение $x_1(t), x_2(t)$

идентифицируемой системы (3.4) при оптимальных расчетных значениях параметров $\hat{v}_1 = -0,5486$; $\hat{v}_2 = -0,2927$ для случая б).

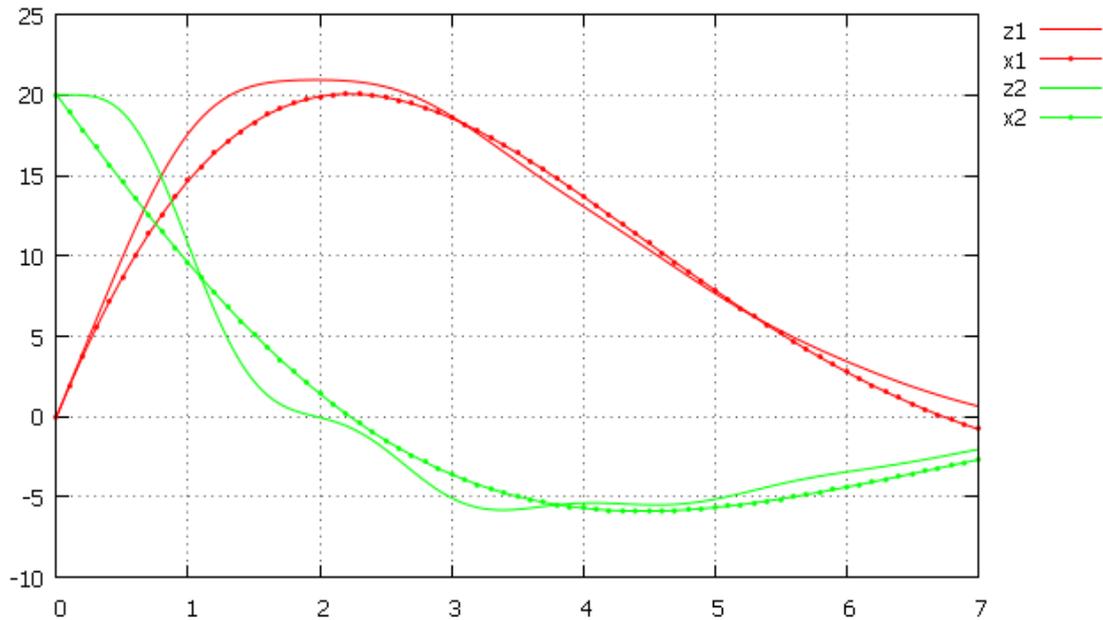


Рис. 3.2. z_1, z_2 - точное решение, x_1, x_2 - полученное решение при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$

В данном примере сравнительный анализ расчетных значений целевой функции задачи с известными из литературного источника демонстрирует лучшую вычислительную эффективность предлагаемого метода неподвижных точек.

3.4 Модельная задача «кинетика ядерного реактора»

Рассматривается задача понижения порядка системы дифференциальных уравнений, описывающей кинетику ядерного реактора [106]:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= 641,02y_1 + 21,02y_2 + 141,03y_3 + 120,192y_4 + \\
 &+ 253,844y_5 + 74,358y_6 + 27,051y_7 + 200, \\
 \dot{y}_2 &= 0,0123(y_1 - y_2), \quad \dot{y}_3 = 0,03(y_1 - y_3), \\
 \dot{y}_4 &= 0,112(y_1 - y_4), \quad \dot{y}_5 = 0,301(y_1 - y_5), \\
 \dot{y}_6 &= 1,149(y_1 - y_6), \quad \dot{y}_7 = 3,012(y_1 - y_7), \\
 y_1(0) &= \dots = y_7(0) = 0,25.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Идентифицируемая система имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= w_1x_1 + w_2x_2 + w_3, \\
 \dot{x}_2 &= w_4x_1 + w_5x_2, \\
 x_1(0) &= v_1, \quad x_2(0) = v_2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

В качестве минимизируемой целевой функции, характеризующей близость решений, служит среднеквадратическая ошибка:

$$I(w, v) = \int_0^8 \sum_{i=1}^2 (x_i(t) - y_i(t))^2 dt, \quad w = (w_1, \dots, w_5), \quad v = (v_1, v_2). \tag{3.7}$$

Задача состоит в определении таких значений вектора параметров (\hat{w}, \hat{v}) , на которых целевая функция (3.7) принимает наименьшее значение.

В работе [106] были получены следующие расчетные оптимальные значения параметров и целевой функции:

$$\begin{aligned}
 w_1^* &= -0,1206, \quad w_2^* = 0,0692, \quad w_3^* = 0,1296, \quad w_4^* = -0,0065, \\
 w_5^* &= 0,0294, \quad v_1^* = 0,5809, \quad v_2^* = 0,2610, \quad I(w^*, v^*) = 0,0244.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ввиду линейности системы (3.5) ее общее решение определяется формулой:

$$y(t) = \sum_{i=1}^7 C_i e^{\lambda_i t} a_i,$$

где λ_i — собственные значения матрицы коэффициентов системы (3.5), a_i — соответствующие собственные векторы этой матрицы. В настоящей работе были вычислены собственные значения рассматриваемой системы с помощью математической библиотеки IMSL языка Fortran (подпрограмма EVCRG):

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 641,43, \quad \lambda_2 = -3,16, \quad \lambda_3 = -1,29, \quad \lambda_4 = -0,41, \\ \lambda_5 = -0,12, \quad \lambda_6 = -0,03, \quad \lambda_7 = -0,01. \end{aligned}$$

Оказалось, что среди собственных чисел имеется достаточно большое положительное число, что приводит к вычислительной неустойчивости численного решения системы. Таким образом, при численных расчетах этой системы обнаружилось расхождение между решением исходной системы (3.5) и решением идентифицируемой системы (3.6) с расчетными значениями параметров (3.8).

Поэтому была поставлена и решена вспомогательная задача идентификации параметров системы (3.5):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 + u_5 y_5 + u_6 y_6 + u_7 y_7 + u_8, \\ \dot{y}_2 &= 0,0123(y_1 - y_2), \quad \dot{y}_3 = 0,03(y_1 - y_3), \\ \dot{y}_4 &= 0,112(y_1 - y_4), \quad \dot{y}_5 = 0,301(y_1 - y_5), \\ \dot{y}_6 &= 1,149(y_1 - y_6), \quad \dot{y}_7 = 3,012(y_1 - y_7), \\ y_1(0) &= \dots = y_7(0) = 0,25, \quad T = [0, 8], \\ \Phi(u) &= \int_T \sum_{i=1}^7 (y_i(t) - z_i(t))^2 dt \rightarrow \min, \quad u = (u_1, \dots, u_8), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $z(t)$ — приближенное решение, построенное следующим образом. Первые две компоненты вычисляются по модели (3.6) с расчетными оптимальными

значениями параметров (3.8). Остальные компоненты восстанавливаются согласно уравнениям исходной модели (3.5) для переменных y_3, \dots, y_7 . Таким образом, $z(t)$ является решением системы:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= -0,1206z_1 + 0,0692z_2 + 0,1296, \\
 \dot{z}_2 &= -0,0065z_1 + 0,0294z_2, \\
 \dot{z}_3 &= 0,03(z_1 - z_3), \quad \dot{z}_4 = 0,112(z_1 - z_4), \\
 \dot{z}_5 &= 0,301(z_1 - z_5), \quad \dot{z}_6 = 1,149(z_1 - z_6), \\
 \dot{z}_7 &= 3,012(z_1 - z_7), \\
 z_1(0) &= 0,5809, \quad z_2(0) = 0,2610, \quad z_3(0) = \dots = z_7(0) = 0,25.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

На рисунке 3.3 представлен график решения $z(t)$.

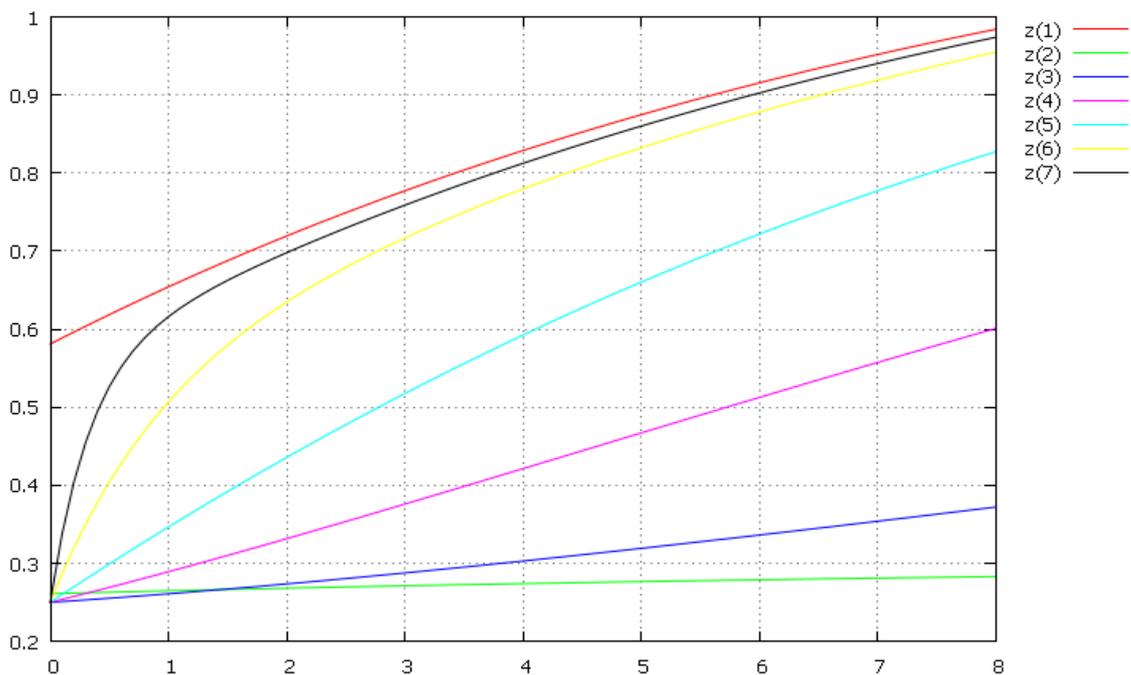


Рис. 3.3. Решение $z(t)$ системы (3.10)

Для численного решения задачи идентификации используется метод непо-

движных точек. Соответствующая задача о неподвижной точке имеет вид:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 y_1(t, v) dt + s_1 \right), \\
v_2 &= u_2 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 y_2(t, v) dt + s_2 \right), \\
v_3 &= u_3 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 y_3(t, v) dt + s_3 \right), \\
v_4 &= u_4 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 y_4(t, v) dt + s_4 \right), \\
v_5 &= u_5 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 y_5(t, v) dt + s_5 \right), \\
v_6 &= u_6 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 y_6(t, v) dt + s_6 \right), \\
v_7 &= u_7 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 y_7(t, v) dt + s_7 \right), \\
v_8 &= u_8 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 dt + s_8 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s_1(v_1 - u_1) + s_2(v_2 - u_2) + s_3(v_3 - u_3) + s_4(v_4 - u_4) + \\
& + s_5(v_5 - u_5) + s_6(v_6 - u_6) + s_7(v_7 - u_7) + s_8(v_8 - u_8) = 0,
\end{aligned}$$

где $p(t, u, v)$ — решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1(t) &= -p_1 u_1 - 0,0123p_2 - 0,03p_3 - 0,112p_4 - \\
& - 0,301p_5 - 1,149p_6 - 3,012p_7 + 2y_1(t, u) - 2z_1 - r_1(t), \\
\dot{p}_2(t) &= -p_1 u_2 + 0,0123p_2 + 2y_2(t, u) - 2z_2 - r_2(t), \\
\dot{p}_3(t) &= -p_1 u_3 + 0,03p_3 + 2y_3(t, u) - 2z_3 - r_3(t), \\
\dot{p}_4(t) &= -p_1 u_4 + 0,112p_4 + 2y_4 - 2z_4 - r_4(t), \\
\dot{p}_5(t) &= -p_1 u_5 + 0,301p_5 + 2y_5 - 2z_5 - r_5(t), \\
\dot{p}_6(t) &= -p_1 u_6 + 1,149p_6 + 2y_6 - 2z_6 - r_6(t), \\
\dot{p}_7(t) &= -p_1 u_7 + 3,012p_7 + 2y_7 - 2z_7 - r_7(t), \\
p_1(8) &= \dots = p_7(8) = 0.
\end{aligned}$$

Численные расчеты проводились на сетке с шагом дискретизации $h = 0,001$ при $\alpha = 1$. Точность расчета $\varepsilon = 10^{-4}$.

Были получены следующие расчетные оптимальные значения параметров

модели и соответствующее значение целевой функции:

$$\hat{u}_1 = -87,9013; \hat{u}_2 = 8,0383; \hat{u}_3 = 13,0397; \hat{u}_4 = 34,0451; \hat{u}_5 = 22,0533;$$

$$\hat{u}_6 = 27,0638; \hat{u}_7 = -14,9313; \hat{u}_8 = 30,1494; \Phi(\hat{u}) = 0,00146.$$

На рисунке 3.4 представлено решение полученной системы в сравнении с приближенным решением $z(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -87,9013y_1 + 8,0383y_2 + 13,0397y_3 + 34,0451y_4 + \\ &+ 22,0533y_5 + 27,0638y_6 - 14,9313y_7 + 30,1494, \\ \dot{y}_2 &= 0,0123(y_1 - y_2), \quad \dot{y}_3 = 0,03(y_1 - y_3), \\ \dot{y}_4 &= 0,112(y_1 - y_4), \quad \dot{y}_5 = 0,301(y_1 - y_5), \\ \dot{y}_6 &= 1,149(y_1 - y_6), \quad \dot{y}_7 = 3,012(y_1 - y_7), \\ y_1(0) &= \dots = y_7(0) = 0,25, \quad T = [0, 8] \end{aligned} \tag{3.11}$$

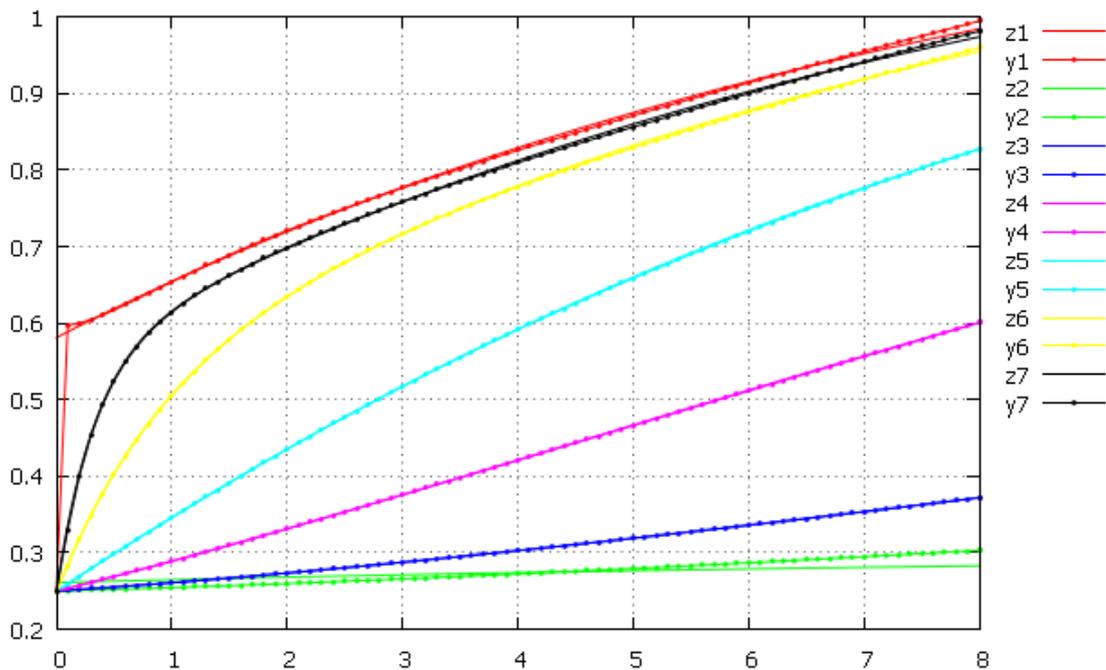


Рис. 3.4. $z(t)$ — приближенное решение (3.10), $y(t)$ — полученное решение (3.11)

Во второй части численного исследования примера рассматривается задача понижения порядка системы дифференциальных уравнений (3.11).

В качестве идентифицируемой системы рассматривается следующая:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= w_1x_1 + w_2x_2 + w_3, \\ \dot{x}_2(t) &= w_4x_1 + w_5x_2, \\ x_1(0) &= 0,5809, \quad x_2(0) = 0,2610, \quad T = [0, 8]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Минимизируемая целевая функция:

$$I(w) = \int_0^8 \sum_{i=1}^2 (x_i(t) - y_i(t))^2 dt, \quad w = (w_1, \dots, w_5).$$

Соответствующая задача о неподвижной точке принимает вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 x_1(t, v) dt + s_1 \right), \\ v_2 &= w_2 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 x_2(t, v) dt + s_2 \right), \\ v_3 &= w_3 + \alpha \left(\int_0^8 p_1 dt + s_3 \right), \\ v_4 &= w_4 + \alpha \left(\int_0^8 p_2 x_1(t, v) dt + s_4 \right), \\ v_5 &= w_5 + \alpha \left(\int_0^8 p_2 x_2(t, v) dt + s_5 \right), \end{aligned}$$

$$s_1(v_1 - u_1) + s_2(v_2 - u_2) + s_3(v_3 - u_3) + s_4(v_4 - u_4) + s_5(v_5 - u_5) = 0,$$

где $p(t, w, v)$ - решение дифференциально-алгебраической системы:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -p_1 w_1 - p_2 w_4 + 2x_1(t, u) - 2y_1 - r_1(t), \\ \dot{p}_2(t) &= -p_1 w_1 - p_2 w_5 + 2x_2(t, u) - 2y_2 - r_2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x_1(t, v) - x_1(t, w))(x_1(t, v) - x_1(t, w) + r_1(t)) + \\ &+ (x_2(t, v) - x_2(t, w))(x_2(t, v) - x_2(t, w) + r_2(t)) = 0, \end{aligned}$$

с начальными дифференциально-алгебраическими условиями:

$$p_1(8) = -q_1, \quad p_2(8) = -q_2,$$

$$q_1(x_1(t_1, v) - x_1(t_1, w)) + q_2(x_2(t_1, v) - x_2(t_1, w)) = 0.$$

Были получены следующие расчетные оптимальные значения параметров и целевой функции:

$$\hat{w}_1 = -0,1102, \quad \hat{w}_2 = 0,0414, \quad \hat{w}_3 = 0,1292,$$

$$\hat{w}_4 = 0,0371, \quad \hat{w}_5 = -0,0904, \quad I(\hat{w}) = 0,000936.$$

На рисунке 3.5 представлено расчетное решение $x(t)$ и две первые компоненты решения системы (3.11), описывающей динамику ядерного реактора.

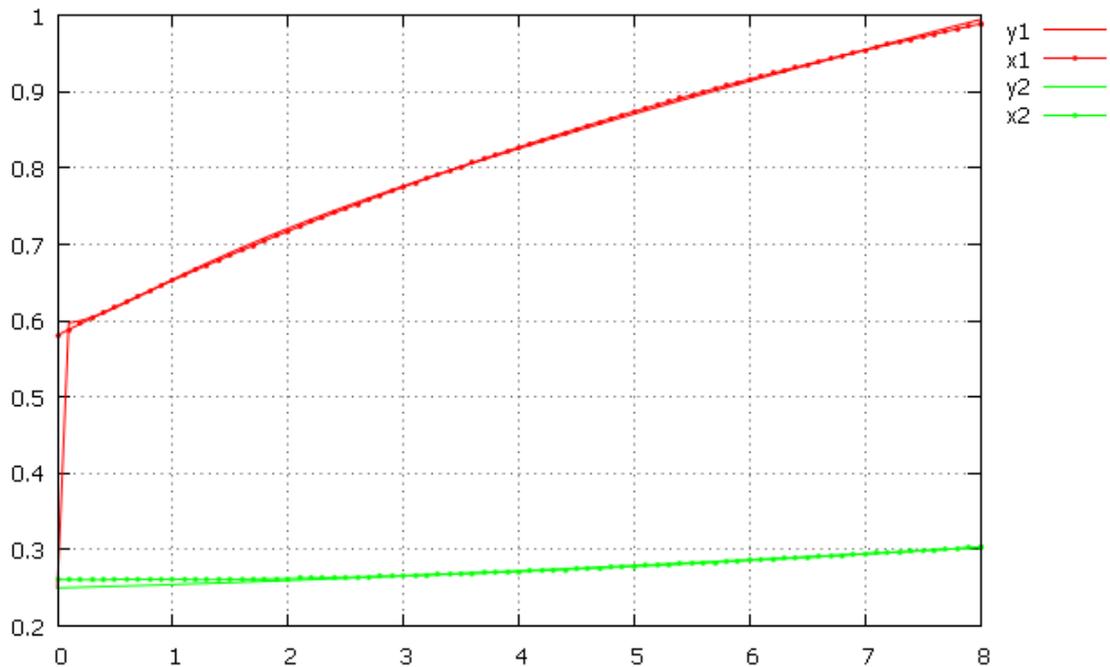


Рис. 3.5. $y(t)$ — решение системы (3.11), $x(t)$ — расчетное решение системы (3.12)

Сравнительный анализ достигнутых расчетных значений целевой функции с известными из литературного источника демонстрирует значительно лучшую эффективность предлагаемого метода неподвижных точек.

3.5 Эколого-экономическая задача «модель выпуска продукции с учетом вредных выбросов»

3.5.1 Постановка задачи

Рассматривается модель выпуска продукции с учетом вредных выбросов [107, 136]:

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= (1 - \alpha - \beta)F(K) - \mu K, \\ \frac{dP}{dt} &= (1 - d\beta)F(K) - bP,\end{aligned}\tag{3.13}$$

где $K(t)$ — капитал; $P(t)$ — объем загрязнения; $F(K) = 10K^{0,5}$ — объем выпуска; $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ — доли выпуска на потребление и борьбу с загрязнением соответственно; μ — доля выбытия капитала; d — удельное загрязнение (ед. продукции); b — скорость очистки; r — ставка дисконтирования.

Ставится задача максимизации полезности (общего благосостояния) от выпускаемой продукции с учетом отрицательного влияния загрязнения:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^T e^{-rt} ((\alpha F(K))^{0,5} - P^{1,1}/5000) dt \rightarrow \max.\tag{3.14}$$

Задача рассматривается при следующих значениях числовых параметров: $\mu = 0,06$; $b = 0,1$; $d = 10$; $r = 0,05$.

Ограничения на управляющие параметры следующие:

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1.\tag{3.15}$$

Для численного анализа модель была приведена к виду, не содержащему интегралов:

$$\begin{aligned}\dot{K} &= (1 - \alpha - \beta)10K^{0,5} - \mu K, \\ \dot{P} &= (1 - d\beta)10K^{0,5} - bP, \\ \dot{L} &= e^{-rt} ((10\alpha)^{0,5} K^{0,25} - P^{1,1}/5000).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Целевая функция принимает вид

$$I(\alpha, \beta) = -L(T) \rightarrow \min. \quad (3.17)$$

В статье [136] проведено аналитическое исследование при некоторых допущениях и получены две пары приближенно экстремальных решений данной задачи при $T \rightarrow \infty$. Экстремальность понимается в смысле выполнения условия максимума функции Понтрягина на полученных решениях. Эти значения равны: 1) $\alpha_1^* = 0,068462$, $\beta_1^* = 0,06992$; 2) $\alpha_2^* = 0,7264$, $\beta_2^* = 0,0$.

3.5.2 Выбор начальных условий

Поскольку в литературном источнике не указано начальное условие для рассматриваемой системы, в качестве начального выбирается состояние системы в положении равновесия (до управляющего воздействия), определяемое равенствами:

$$\begin{aligned} 10K^{0,5} - \mu K &= 0, \\ 10K^{0,5} - bP &= 0. \end{aligned}$$

Система равновесия имеет следующее решение:

$$K = 100/\mu^2; P = 100/(b\mu).$$

3.5.3 Переход к «безразмерной» модели

Для удобства рассматриваемая задача приводится к «безразмерному» виду заменой переменных:

$$y_1 = K/K^*; y_2 = P/P^*; y_3 = L; K^* = 100/\mu^2; P^* = 100/(b\mu).$$

Отсюда, $K = y_1 \cdot K^*$; $P = y_2 \cdot P^*$; $L = y_3$.

Система в новых безразмерных переменных принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{\dot{K}}{K^*} = \frac{(1 - \alpha - \beta)10K^{0,5} - \mu K}{K^*} = \\ &= \frac{(1 - \alpha - \beta)10y_1^{0,5}(K^*)^{0,5} - \mu y_1 K^*}{K^*} = \frac{(1 - \alpha - \beta)10y_1^{0,5}}{(K^*)^{0,5}} - \mu y_1 = \\ &= \frac{(1 - \alpha - \beta)10y_1^{0,5}}{(100/\mu^2)^{0,5}} - \mu y_1 = (1 - \alpha - \beta)\mu y_1^{0,5} - \mu y_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 &= \frac{\dot{P}}{P^*} = \frac{(1 - d\beta)10K^{0,5} - bP}{P^*} = \\ &= \frac{(1 - d\beta)10y_1^{0,5}(K^*)^{0,5} - by_2 P^*}{P^*} = \frac{(1 - d\beta)10y_1^{0,5}(K^*)^{0,5}}{P^*} - by_2 = \\ &= \frac{(1 - d\beta)10y_1^{0,5}(100/\mu^2)^{0,5}}{100/(b\mu)} - by_2 = (1 - d\beta)by_1^{0,5} - by_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_3 &= \dot{L} = e^{-rt}((10\alpha)^{0,5}K^{0,25} - P^{1,1}/5000) = \\ &= e^{-rt}((10\alpha)^{0,5}y_1^{0,25}(K^*)^{0,25} - y_2^{1,1}(P^*)^{1,1}/5000) = \\ &= e^{-rt}((10\alpha)^{0,5}y_1^{0,25}(100/\mu^2)^{0,25} - y_2^{1,1}(100/(b\mu))^{1,1}/5000) = \\ &= e^{-rt}(10\alpha^{0,5}y_1^{0,25}/\mu^{0,5} - y_2^{1,1}(100/(b\mu))^{1,1}/5000).\end{aligned}$$

В итоге получаем безразмерную систему:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= (1 - \alpha - \beta)\mu y_1^{0,5} - \mu y_1, & y_1(0) &= 1, \\ \dot{y}_2 &= (1 - d\beta)by_1^{0,5} - by_2, & y_2(0) &= 1, \\ \dot{y}_3 &= e^{-rt}(10\mu^{-0,5}\alpha^{0,5}y_1^{0,25} - (1/5000)(100y_2/(b\mu))^{1,1}), & y_3(0) &= 0.\end{aligned}$$

Для удобства обозначений перейдем к задаче со стандартными перемен-

НЫМИ x И u :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (1 - u_1 - u_2)\mu x_1^{0,5} - \mu x_1, & x_1(0) &= 1, \\
 \dot{x}_2 &= (1 - du_2)bx_1^{0,5} - bx_2, & x_2(0) &= 1, \\
 \dot{x}_3 &= e^{-rt}(10\mu^{-0,5}u_1^{0,5}x_1^{0,25} - (1/5000)(100x_2/(b\mu))^{1,1}), & x_3(0) &= 0, \\
 & & F(u_1, u_2) &= -x_3(T) \rightarrow \min.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.5.4 Выбор интервала времени

Для сравнительно численного расчета необходимо было задать T достаточно большим. Расчетное значение T подбиралось таким образом, чтобы целевая функция

$$F(u_1, u_2) = - \int_0^T e^{-rt}(10\mu^{-0,5}u_1^{0,5}x_1^{0,25} - (1/5000)(100x_2/(b\mu))^{1,1})dt$$

практически не изменялась при дальнейшем увеличении T . Выбирался следующий критерий: изменение целевой функции не превышает 1%: $|F(T + 10) - F(T)|/|F(T)| \leq 0,01$. Расчетное значение T подбиралось с точностью до 10 единиц при $u_1 = 0,68462$, $u_2 = 0,06992$. Результаты представлены в таблице 3.11. В итоге экспериментально был определен интервал времени $T = [0, 80]$.

Таблица 3.11 Значения функционала
благополучия

T	Значение функционала (F)	$\frac{ F(T+10)-F(T) }{ F(T) }$
10	-201,933	0,601625292
20	-323,421	0,215932175
30	-393,258	0,101055795
40	-432,999	0,052348851
50	-455,666	0,028571366
60	-468,685	0,016085431
70	-476,224	0,009243549
80	-480,626	0,005388805
90	-483,216	0,003172494
100	-484,749	-

3.5.5 Уточнение области допустимых значений параметров

В работе проводился численный и качественный анализ рассматриваемой задачи на неотрицательность переменных состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$. В ходе анализа был определен следующий диапазон значений управляемых параметров u_1 , u_2 , при которых переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$ принимают неотрицательные значения:

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_2 \leq 0,1, u_1 + u_2 \leq 1.$$

Задача проектирования на указанное множество легко решается аналитически. При этом пространство параметров разбивается на 9 областей, из которых осуществляется проектирование. Рисунок 3.6 иллюстрирует разбиение пространства параметров на области проектирования, для каждой из которых легко определяется проекция точки на допустимое множество.

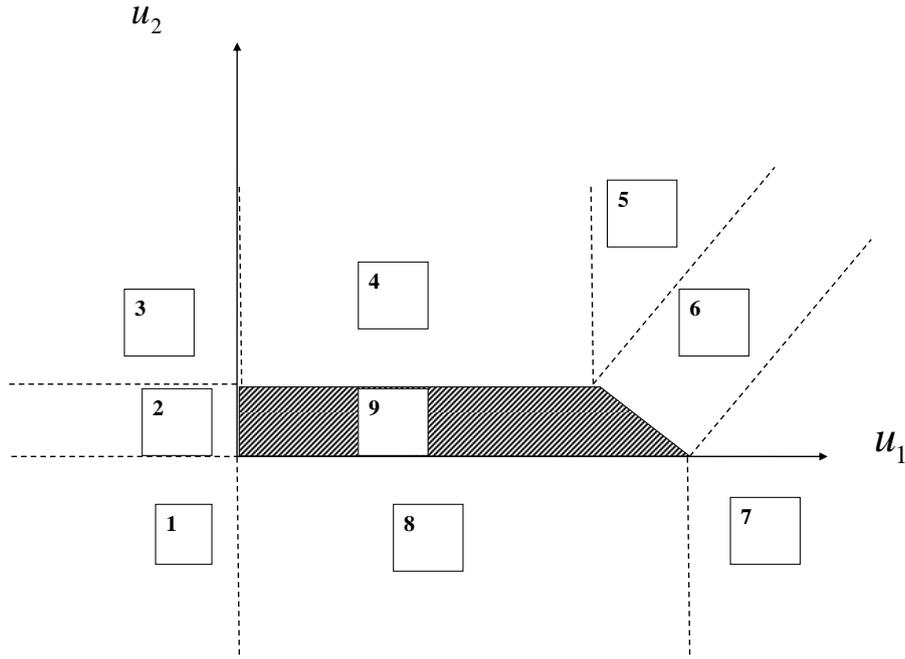


Рис. 3.6. Области проектирования на допустимое множество управлений

3.5.6 Результаты расчета

Функция Понтрягина и ее частные производные по состоянию и управлению принимают следующий вид:

$$H = p_1((1 - u_1 - u_2)\mu x_1^{0,5} - \mu x_1) + p_2((1 - du_2)bx_1^{0,5} - bx_2) + p_3e^{-rt}(10\mu^{-0,5}u_1^{0,5}x_1^{0,25} - (1/5000)(100x_2/(b\mu))^{1,1}),$$

$$H_{x_1} = 0,5\mu(1 - u_1 - u_2)p_1x_1^{-0,5} - \mu p_1 + 0,5b(1 - du_2)p_2x_1^{-0,5} + 2,5\mu^{-0,5}e^{-rt}u_1^{0,5}p_3x_1^{-0,75},$$

$$H_{x_2} = -bp_2 - (100/(b\mu))^{1,1}(1,1/5000)e^{-rt}p_3x_2^{0,1},$$

$$H_{x_3} = 0,$$

$$H_{u_1} = -\mu p_1x_1^{0,5} + 5\mu^{-0,5}e^{-rt}u_1^{-0,5}p_3x_1^{0,25},$$

$$H_{u_2} = -\mu p_1x_1^{0,5} - bdp_2x_1^{0,5}.$$

Для заданного $u \in U$ задача о неподвижной точке следующая:

$$v = P_U(u_1 + \alpha(\int_T H_{u_1}(p(t, u, v), x(t, v), u, t)dt + s_1), \\ u_2 + \alpha(\int_T H_{u_2}(p(t, u, v), x(t, v), u, t)dt + s_2)),$$

$$\int_T (H(p(t, u, v), x(t, v), v, t) - H(p(t, u, v), x(t, v), u, t))dt = \\ = (\int_T H_{u_1}(p(t, u, v), x(t, v), u, t)dt + s_1)(v_1 - u_1) + \\ + (\int_T H_{u_2}(p(t, u, v), x(t, v), u, t)dt + s_2)(v_2 - u_2).$$

Дифференциально-алгебраическая сопряженная система имеет вид:

$$\dot{p}_1(t) = -0,5\mu(1 - u_1 - u_2)p_1x_1^{-0,5} + \mu p_1 - 0,5b(1 - du_2)p_2x_1^{-0,5} - \\ - 2,5\mu^{-0,5}e^{-rt}u_1^{0,5}p_3x_1^{-0,75} - r_1(t), \\ \dot{p}_2(t) = bp_2 + (100/(b\mu))^{1,1}(1, 1/5000)e^{-rt}p_3x_2^{0,1} - r_2(t), \\ \dot{p}_3(t) = -r_3(t),$$

$$(H_{x_1}(p(t, u, v), x(t, u), u, t) + r_1(t))(x_1(t, v) - x_1(t, u)) + \\ + (H_{x_2}(p(t, u, v), x(t, u), u, t) + r_2(t))(x_2(t, v) - x_2(t, u)) + \\ + r_3(t)(x_3(t, v) - x_3(t, u)) = H(p(t, u, v), x(t, v), u, t) - H(p(t, u, v), x(t, u), u, t),$$

$$p_1(T) = -q_1, \quad p_2(T) = -q_2, \quad p_3(T) = 1 - q_3, \\ q_1(x_1(T, v) - x_1(T, u)) + q_2(x_2(T, v) - x_2(T, u)) + \\ + (q_3 - 1)(x_3(T, v) - x_3(T, u)) = x_3(T, u) - x_3(T, v).$$

Расчеты задачи проводились для различных начальных управлений $u \in U$, в том числе, начиная с расчетных оптимальных управлений, указанных в статье [136]. А также при различных значениях параметра проектирования $\alpha > 0$. Результаты расчетов представлены в таблице 3.12. В итоге получены оптимальные расчетные значения параметров: $\hat{v}_1 = 0,9$, $\hat{v}_2 = 0,1$ и соответствующее значение критерия $\hat{F} = F(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = -537,48$. Полученное значение существенно меньше экстремальных расчетных значений, приведенных в [136]. Значение безразмерного критерия соответствующего экстремальным

значениям размерных параметров $\alpha_1^* = 0,68462$, $\beta_1^* = 0,06992$, указанных в литературном источнике, равняется $F_1 = -480,78$. При другой паре экстремальных параметров $\alpha_2^* = 0,7264$, $\beta_2^* = 0,0$ значение безразмерного критерия равняется $F_2 = -440,37$. Расчетные значения параметров, полученных предлагаемым методом, оказываются существенно лучшими по сравнению с экстремальными параметрами, приведенными в литературном источнике.

Таблица 3.12 Результаты расчета параметров модели

α	u	v^0	\hat{v}	$F(\hat{v})$	Кол-во ЗНТ
1	0,01; 0,01	0,01; 0,01	0,9; 0,1	-537,48	3
	0,1; 0,1	0,1; 0,1	0,9; 0,1	-537,48	3
	0,3; 0,01	0,3; 0,01	0,9; 0,1	-537,48	2
	0,6; 0,01	0,6; 0,01	0,9; 0,1	-537,48	2
	0,9; 0,01	0,9; 0,01	0,9; 0,1	-537,48	2
	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	2
	0,726; 0,0	0,726; 0,0	0,9; 0,1	-537,48	2
10^{-8}	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	68043
10^{-6}	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	682
10^{-4}	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	8
1	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	2
10^4	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	2
10^6	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	2
10^8	0,685; 0,07	0,685; 0,07	0,9; 0,1	-537,48	2

Таким образом, в рамках рассматриваемой модельной задачи предлагаемый подход неподвижных точек подтверждает достаточную высокую вычислительную эффективность, а также широкую область сходимости по начальным управлениям метода неподвижных точек и начальным приближениям соответствующего итерационного процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении представлены **основные научные результаты работы:**

1. Разработаны модели и методы неподвижных точек для решения классов задач параметрической оптимизации динамических систем, представляющие собой специальные задачи о неподвижной точке конструируемых операторов управления, обладающие свойством нелокальности и возможностью улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума.
2. Получено новое необходимое условие оптимальности, усиливающее дифференциальный принцип максимума в классе линейных по управлению задач параметрической оптимизации.
3. Построены новые итерационные алгоритмы для решения задач о неподвижной точке и получены условия их сходимости, показывающие принципиальную возможность численного решения рассматриваемых задач.
4. Проведен сравнительный анализ предложенных методов с известными в вычислительных экспериментах, демонстрирующих повышенную вычислительную эффективность предлагаемых методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А. А. Геометрическая теория управления / А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 392 с.
2. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 432 с.
3. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума / А. В. Аргучинцев, В. А. Дыхта, В. А. Срочко // Изв. Вузов. Матем. — 2009. — № 1. — С. 3–43.
4. Арушанян О. Б. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране / О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин. — М. : Изд-во МГУ, 1990. — 336 с.
5. Ащепков Л. Т. Идентификация динамических систем как задача управления параметрами / Л. Т. Ащепков, А. В. Новосельский, А. И. Тятюшкин // Автоматика и телемеханика. — 1975. — Вып. 3. — С. 178–182.
6. Бартеньев О. В. Современный Фортран / О. В. Бартеньев. — М. : Диалог МИФИ, 2000. — 449 с.
7. Бартеньев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 3. / О. В. Бартеньев. — М. : Диалог МИФИ, 2001. — 368 с.
8. Батулин В. А. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В. А. Батулин, Д. Е. Урбанович. — Новосибирск : Наука. Сиб. предприятие РАН, 1997. — 175 с.
9. Батулин В. А. Программная система идентификации динамических моделей / В. А. Батулин, А. А. Лемперт, Д. Е. Урбанович // Мат. моделирование. — 2004. — Т. 16, № 6. — С. 110–113.

10. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. — 401 с.
11. Бояринцев Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск : Наука, 1998. — 224 с.
12. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. — М. : Мир, 1972. — 544 с.
13. Булатов М. В. Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений методом коллокационно-вариационных сплайнов / М. В. Булатов, Н. П. Рахвалов, Л. С. Соловарова // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2013. — Т. 53, № 3. — С. 377–389.
14. Булдаев А. С. Процедуры нелокального улучшения в полиномиальных по состоянию системах управления : научное издание / А. С. Булдаев ; Иркутский гос. ун-т. — Вып. 7. Оптимизация и управление. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 2002. — 48 с.
15. Булдаев А. С. Методы оптимизации управляемых систем / А. С. Булдаев. — Улан-Удэ : Изд-во ВСГУТУ, 2002. — 60 с.
16. Булдаев А. С. Процедуры нелокального улучшения управления в квадратичных по состоянию задачах управления / А. С. Булдаев // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 2. — С. 76–85.
17. Булдаев А. С. Модификация метода проекций в задачах параметрической оптимизации квадратичных по состоянию систем / А. С. Булдаев // Вестник Бурятского университета. Серия 13. Математика и информатика. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2004. — С. 70–76.
18. Булдаев А. С. Нелокальное улучшение управляемых процессов методом возмущений : научное издание / А. С. Булдаев ; Иркутский гос. ун-т. — Вып. 10. Оптимизация и управление. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 2004. — 52 с.

19. Булдаев А. С. Проекционные процедуры нелокального улучшения линейно управляемых процессов / А. С. Булдаев // Изв. вузов. Математика.— 2004. — № 1. — С. 18–24.
20. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем / А. С. Булдаев. — Улан-Удэ : Издательство Бурятского госун-та, 2008. — 260 с.
21. Булдаев А. С. Методы возмущений в квадратичных задачах оптимального управления / А. С. Булдаев, Д. О. Трунин // Автоматика и телемеханика. — 2008. — Т. 69, № 3. — С. 135–145.
22. Булдаев А. С. Метод нелокального улучшения в полиномиальных задачах оптимального управления с терминальными ограничениями / А. С. Булдаев, Д. О. Трунин // Управление большими системами. — 2008. — Вып. 22. — С. 51–69.
23. Булдаев А. С. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач / А. С. Булдаев, О. В. Моржин // Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 94–107.
24. Булдаев А. С. Об одном методе улучшения управляющих параметров нелинейных систем / А. С. Булдаев, И.-Х. Д. Хишектуева // Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы (ИКВТС-2010) : матер. III Междунар. конф., 6–11 сентября 2010 г., г. Улан-Удэ, оз. Байкал. — Улан-Удэ : Изд-во БГУ, 2010. — С. 79–82.
25. Булдаев А. С. Модификация метода проекций для улучшения нелинейных управлений / А. С. Булдаев, О. В. Моржин // Вестник Бурятского гос. ун-та. — 2010. — Вып. 9. Математика, информатика. — С. 10–17.
26. Булдаев А. С. Новый подход к оптимизации управляемых систем на основе краевых задач / А. С. Булдаев // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 87–94.
27. Булдаев А. С. Поиск неподвижных точек операторов проектирования в задачах параметрической оптимизации систем / А. С. Булдаев, Б.

- Очирбат, И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика, информатика. — 2012. — № 2. — С. 4–14.
28. Булдаев А. С. Метод неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем / А. С. Булдаев, И.-Х. Д. Хишектуева // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 12. — С. 5–15.
29. Булдаев А. С. Задачи и методы неподвижных точек принципа максимума / А. С. Булдаев // Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика. — 2015. — Т. 14. — С. 31–41.
30. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. — 476 с.
31. Бутковский А. Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем / А. Г. Бутковский. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 136 с.
32. Васильев О. В. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума / О. В. Васильев, А. И. Тятюшкин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1981. — Т. 21, № 6. — С. 1376–1384.
33. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации / О. В. Васильев. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 1994. — 339 с.
34. Васильев О. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях / О. В. Васильев, А. В. Аргучинцев. — М. : Физматлит, 1999. — 208 с.
35. Васильев С. Н. Интеллектуальное управление динамическими системами / С. Н. Васильев. — М. : Физико-математическая литература, 2000. — 352 с.
36. Васильев С. Н. Теория и применение логико-управляемых систем / С. Н. Васильев // Труды 2-ой Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'03), 2003. — с. 23–52.

37. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 400 с.
38. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач : Учеб. пособие для вузов / Ф. П. Васильев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 552 с.
39. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2002. — 824 с.
40. Габасов Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 508 с.
41. Габасов Р. Ф. Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1973. — 248 с.
42. Габасов Р. Методы оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // «Современные проблемы математики». (Итоги науки и техники). — 1975. — С. 131–259.
43. Габасов Р. Методы оптимизации : пособие / Р. Габасов [и др.]. — Минск : Изд-во «Четыре четверти», 2011. — 472 с.
44. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования / Ю. Б. Гермейер. — М. : Наука, 1971. — 383 с.
45. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. — М. : Мир, 1985. — 509 с.
46. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления / А. Ю. Горнов. — Новосибирск : Наука, 2009. — 278 с.
47. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления / В. И. Гурман. — М. : Наука, 1977. — 304 с.
48. Гурман В. И. Приближенные методы оптимального управления / В. И. Гурман, В. А. Батурич, И. В. Расина. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1983. — 180 с.

49. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления / В. И. Гурман. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука. Физматлит, 1997. — 288 с.
50. Гурман В. И. Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления / В. И. Гурман, И. В. Расина, А. О. Блинов // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. — 2011. — № 2(6). — С. 11–29.
51. Гурман В. И. Дискретно-непрерывные представления импульсных процессов в управляемых системах / В. И. Гурман, И. В. Расина // Автомат. и телемех. — 2012. — № 8. — С. 16–29.
52. Гурман В. И. Итерационные процедуры на основе метода глобального улучшения управления / В. И. Гурман, О. В. Фесько, И. С. Гусева, С. Н. Насатуева // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. — 2014. — Т. 5. — № 2(20). — С. 47–61.
53. Гурман В. И. Оптимизация процессов в спиновой цепочке / В. И. Гурман, И. В. Расина // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 12. — С. 153–159.
54. Гурман В. И. Методы приближенного решения задач оптимального управления / В. И. Гурман, И. В. Расина, И. С. Гусева, О. В. Фесько // Программные системы: теория и приложения. — 2015. — Т. 6, № 4. — С. 113–137.
55. Гурман В. И. Некоторые подходы к оптимизации процессов управления. I / В. И. Гурман, И. В. Расина, О. В. Фесько, И. С. Гусева // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 8. — С. 66–84.
56. Гурман В. И. Некоторые подходы к оптимизации процессов управления. II / В. И. Гурман, И. В. Расина, О. В. Фесько, И. С. Гусева // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 9. — С. 42–57.
57. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. — Л. : ЛГУ, 1968. — 179 с.

58. Дикусар В. В. Качественные и численные методы в принципе максимума / В. В. Дикусар, А. А. Милютин. — М. : Наука, 1989. — 144 с.
59. Дубовицкий А. Я. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления / А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин. — М. : Наука, 1971. — 112 с.
60. Дубовицкий А. Я. Теория принципа максимума / А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин // Методы теории экстремальных задач в экономике. — М. : Наука, 1981. — С. 6–47.
61. Дыхта В. А. Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных процессов / В. А. Дыхта. — Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1995. — 186 с.
62. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок. — М. : Физматлит, 2000. — 256 с.
63. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 432 с.
64. Егоров А. И. Основы теории управления / А. И. Егоров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 504 с.
65. Емельянов С. В. Теория систем с переменной структурой / С. В. Емельянов. — М. : Наука, 1970. — 592 с.
66. Завалицин С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалицин, А. Н. Сесекин. — М. : Наука, 1991. — 256 с.
67. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений / Г. Зойтендейк. — М. : Изд-во иностр. лит., 1963. — 176 с.
68. Зубов В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. — 495 с.
69. Каляев А. В. Расчет переходного процесса в линейных системах методом понижения порядка дифференциального уравнения / А. В. Каляев // Автоматика и телемеханика. — 1959. — Т. 20, Вып. 9. — С. 1171–1179.

70. Келли Г. Метод градиентов / Г. Келли // Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. — М. : Наука, 1965. — С. 101–116.
71. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.
72. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. — М. : Наука, 1973. — 448 с.
73. Кротов В. Ф. Основы теории управления / В. Ф. Кротов, Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов, Н. И. Данилина, С. И. Сергеев. — М. : Высшая школа, 1990. — 430 с.
74. Крылов И. А. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления / И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 1132–1139.
75. Крылов И. А. Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций / И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1966. — Т. 6, № 2. — С. 203–217.
76. Крылов И. А. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления / И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 14–34.
77. Любушин А. А. Модификация и исследование сходимости метода последовательных приближений для задач оптимального управления / А. А. Любушин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1979. — Т. 19, № 6. — С. 1414–1421.
78. Любушин А. А. О применении модификации метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления / А. А. Любушин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1982. — Т. 22, № 1. — С. 30–35.

79. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 392 с.
80. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. — М. : Наука, 2005. — 429 с.
81. Милютин А. А. Оптимальное управление в линейных системах / А. А. Милютин, А. Е. Илютович, Н. П. Осмоловский, С. В. Чуканов. — М. : Наука, 1993. — 268 с.
82. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. — М. : Наука, 1971. — 424 с.
83. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. — М. : Наука, 1975. — 488 с.
84. Моржин О. В. Нелокальное улучшение нелинейных управляемых процессов на основе достаточных условий оптимальности / О. В. Моржин // Автомат. и телемех. — 2010. — № 8. — С. 24–37.
85. Моржин О. В. Проекционные методы нелокального улучшения управляющих функций и параметров / О. В. Моржин // Вестник Бурятского гос. ун-та. — 2011. — Вып. 9. Математика, информатика. — С. 31–35.
86. Необходимое условие в оптимальном управлении / А. П. Афанасьев, В. В. Дикусар, А. А. Милютин, С. А. Чуканов. — М. : Наука, 1990. — 320 с.
87. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход / Э. Полак. — М. : Мир, 1974. — 376 с.
88. Поляк Б. Т. Градиентные методы минимизации функционалов / Б. Т. Поляк // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 643–654.

89. Поляк Б. Т. Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 807–821.
90. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. — М. : Наука, 1983. — 382 с.
91. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. — М. : Наука, 2002. — 303 с.
92. Поляк Б. Т. Развитие теории автоматического управления / Б. Т. Поляк // Проблемы управления. — 2009. — Спец. вып. 3.1. — С. 13–18.
93. Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении / Л. С. Понтрягин. — Изд. 2-е, стереотипное. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 64 с.
94. Пропой А. И. О принципе максимума для дискретных систем управления / А. И. Пропой // Автомат. и телемех. — 1965. — Т. 26, № 7. — С. 1177–1187.
95. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
96. Пшеничный Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1975. — 320 с.
97. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I / Л. И. Розоноэр // Автоматика и телемеханика. — 1959. — Т. 20, № 10. — С. 1320–1334.
98. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 396 с.
99. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Наука, 1989. — 432 с.
100. Срочко В. А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления / В. А. Срочко. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1989. — 160 с.

101. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. — М. : Физматлит, 2000. — 160 с.
102. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации / А. С. Стрекаловский. — Новосибирск : Наука, 2003. — 356 с.
103. Стрекаловский А. С. Современные методы решения невыпуклых задач оптимального управления / А. С. Стрекаловский // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — Т. 8. — С. 141–163.
104. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — 4-е изд. — М. : Физматлит, 2007. — 488 с.
105. Трушкова Е. А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления / Е. А. Трушкова // Автомат. и телемех. — 2011. — № 6. — С. 151–159.
106. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем / А. И. Тятюшкин. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1992. — 193 с.
107. Тятюшкин А. И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем / А. И. Тятюшкин. — Новосибирск : Наука, 2006. — 343 с.
108. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. — 488 с.
109. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А. А. Фельдбаум. — М. : Физматгиз, 1963. — 552 с.
110. Хишектуева И.-Х. Д. Оценка параметров динамических систем методом нелокальной оптимизации / И.-Х. Д. Хишектуева, А. С. Булдаев // Обобщенные постановки и решения задач управления : матер. V Междунар. симпозиума, 13–17 сентября 2010 г., г. Улан-Батор, Монголия, 2010. — С. 187–189.
111. Хишектуева И.-Х. Д. Метод поиска неподвижных точек в задаче улучшения управляющих параметров / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник

- Бурятского гос. ун-та. — 2011. — Вып. 9. Математика, информатика. — С. 57–60.
112. Хишектуева И.-Х. Д. Метод оптимизации линейных параметров динамических систем / И.-Х. Д. Хишектуева, Д. Халтар // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика, информатика. — 2012. — № 2. — С. 40–47.
113. Хишектуева И.-Х. Д. Оптимизация параметров динамических систем поиском неподвижных точек оператора проектирования / И.-Х. Д. Хишектуева // Моделирование социо-эколого-экономических процессов в регионе : матер. межрегион. молодежной школы-семинара, 15 ноября 2012 г., г. Улан-Удэ. — Улан-Удэ : Изд-во БНЦ СО РАН, 2012. — С. 29–33.
114. Хишектуева И.-Х. Д. Оптимизация параметров модели выпуска продукции с учетом вредных выбросов / И.-Х. Д. Хишектуева // Моделирование социо-эколого-экономических процессов в регионе [электронный ресурс] : матер. межрегион. молодежной школы-семинара. — Вып. 3. — Улан-Удэ : Изд-во БНЦ СО РАН, 2013. — С. 44–47.
115. Хишектуева И.-Х. Д. Алгоритм оптимизации параметров нелинейных динамических систем / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского гос. ун-та. — 2013. — Вып. 9. Математика, информатика. — С. 39–44.
116. Хишектуева И.-Х. Д. Расчет оптимальных параметров динамических систем методом неподвижных точек / И.-Х. Д. Хишектуева // Программные системы : теория и приложения : электрон. научн. журн. — 2014. — Т. 5, № 5(23). — С. 29–35.
117. Хишектуева И.-Х. Д. Численное решение задач параметрической оптимизации систем методом неподвижных точек / И.-Х. Д. Хишектуева // Обобщенные постановки и решения задач управления : сборник трудов междунар. научн. симпозиума. — М.: АНО «Изд-во физ.-мат. литературы». — 2014. — С. 194–196.

118. Хишектуева И.-Х. Д. Метод неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем / И.-Х. Д. Хишектуева // Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа : матер. семинара молодых ученых с междунар. участием в рамках Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвящ. 70-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова, 20-27 июня 2015 г., г. Улан-Удэ, оз. Байкал. — Улан-Удэ : Изд-во Бурятск. госуниверситета, 2015. — С. 133–138.
119. Хишектуева И.-Х. Д. Оптимизация параметров модели выпуска продукции с учетом вредных выбросов / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика, информатика. — 2015. — № 4. — С. 47–57.
120. Хишектуева И.-Х. Д. Применение метода неподвижных точек в задачах оптимизации динамических систем по параметрам и начальным условиям / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика, информатика. — 2016. — № 1. — С. 38–48.
121. Хрусталеv М. М. Необходимые и достаточные условия для задачи оптимального управления / М. М. Хрусталеv // ДАН СССР. — 1973. — Т. 211, № 1. — С. 59–62.
122. Хрусталеv М. М. Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамической системы / М. М. Хрусталеv // Автомат. и телемех. — 1988. — № 5. — С. 62–70.
123. Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации в теории управления : Учебное пособие / И. Г. Черноруцкий. — СПб. : Питер, 2004. — 256 с.
124. Черноуcько Ф. Л. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы / Ф. Л. Черноуcько, Н. В. Баничук. — М. : Наука, 1973. — 238 с.

125. Черноусько Ф. Л. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления / Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский // *Мат. анализ. Итоги науки и техники.* — 1977. — Т. 14. — С. 101–166.
126. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф. Л. Черноусько. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 320 с.
127. Шатровский Л. И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления / Л. И. Шатровский // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* — 1962. — Т. 2., № 3. — С. 488–491.
128. Энеев Т. М. О применении градиентного метода в задачах оптимального управления / Т. М. Энеев // *Косм. исслед.* — 1966. — Т. 4, № 5. — С. 651–669.
129. Betts J. T. Practical methods for optimal control using nonlinear programming / J. T. Betts. — Philadelphia : SIAM, 2001. — 190 p.
130. Buldaev A. S. Method of nonlocal control improvement in linear optimal control problems with terminal constraints / A. S. Buldaev, D. O. Trunin // *Journal of Mongolian mathematical society.* — 2006. — Vol. 10. — P. 47–53.
131. Buldaev A. S. Nonlocal improvement method in polynomial optimal control problems with terminal constraints / A. S. Buldaev, D. O. Trunin // *Optimization.* — 2009. — Vol. 58, № 7. — P. 47–53.
132. Gill P. E. Numerical methods for constrained optimization / P. E. Gill, W. Murray. — Academic Press, London and New York, 1974.
133. Khishektueva I.-Kh. D. Numerical method of search of optimal parameters of dynamic systems / I.-Kh. D. Khishektueva // *The 8th International Forum on Strategic Technology (IFOST 2013) : proceedings, June 28 — July 1, 2013, Ulaanbaatar, Mongolia.* — Ulaanbaatar, 2013. — V. 1. — P. 455–456.

134. Khishektueva I.-Kh. D. The numerical algorithm of search of fixed points in optimization problems with parameters / I.-Kh. D. Khishektueva // The Fourth International Conference on Optimization, Simulation and Control : abstracts, July 1-4, 2013, Ulaanbaatar, Mongolia. — Ulaanbaatar, 2013. — P. 66.
135. Khishektueva I.-Kh. D. On one approach to modeling and optimization of the dynamics of the nuclear reactor / I.-Kh. D. Khishektueva, A. S. Buldaev // The 10th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 10) : abstracts, July 23-26, 2016, Ulaanbaatar, Mongolia. — Ulaanbaatar, 2016. — P. 118.
136. Kiler E. Options Control of Pollution of Surroundings / E. Kiler, M. Spens, P. Zekchauer // J. of Economic Theory. — 1972. — Vol. 4, № 1. — P. 57–71.
137. Kirk D. E. Optimal control theory. An introduction / D. E. Kirk. — New York : Dover Publ., 2004. — 472 p.
138. Krotov V. F. Global methods in optimal control theory / V. F. Krotov. — New York : Marcel Dekker, 1996. — 408 p.
139. Mayne D. Q. First order strong variation algorithms for optimal control problems / D. Q. Mayne, E. Polak // J. Optimiz. Theory and Applications. — 1975. — Vol. 16, № 3–4. — P. 277–301.
140. Mayne D. Q. A first order exact penalty function algorithm for equality constrained optimization problems / D. Q. Mayne, N. Maratos // Math. Prog. 16. — 1979. — P. 303–324.
141. Mayne D. Q. Feasible direction algorithms for optimization problems with equality and inequality constraints / D. Q. Mayne, E. Polak // Math. Prog. 11. — 1976. — P. 67–80.
142. Polak E. An historical survey of computational methods in optimal control / E. Polak. — SIAM. Review 15, 1973. — P. 553–584.
143. Polak E. Optimization: Algorithms and consistent approximations / E. Polak. — Spginger, New York, 1997.

144. Teo K. L. On the computational methods of optimal control problems / K. L. Teo, L. T. Yeo // Intern. Journ. Systems Science. — 1979. — Vol. 10, № 1. — P. 51–76.
145. Vasiliev O. V. Optimization methods / O. V. Vasiliev. — World Federation Publishers Company, Atlanta, USA, 1996. — 276 p.
146. Warga J. Optimal control of differential and functional equations / J. Warga. — New York: Academic Press, 1972. — 624 p.
147. Wright M. H. Numerical methods for nonlinearly constrained Optimization / M. H. Wright. — Ph. D. Thesis, Stanford University. California. — 1976.