На правах рукописи

Хишектуева Ишин-Хорло Дамбадоржиевна

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Улан-Удэ – 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Бурятский государственный университет» (ФГБОУ ВО «БГУ»)

Научный руководитель:	**Булдаев Александр Сергеевич** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет», кафедра прикладной математики, профессор
Официальные оппоненты:	**Срочко Владимир Андреевич** доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», кафедра вычислительной математики и оптимизации, профессор
	Лакеев Анатолий Валентинович доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, лаборатория математических методов анализа свойств динамических систем, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	**ФГБУН Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН**

Защита состоится «23» декабря 2016 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д212.022.10 при ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет» по адресу: 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, д. 24а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет», расположенной по адресу: г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4а, а также на сайте: http://www.bsu.ru/dissers/?did=536

Автореферат разослан «__» _________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доц. Т. Г. Дармаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Современная теория управления является одним из основных направлений развития математики с приложениями практически во всех областях знаний. Потребности приложений приводят к разнообразным актуальным задачам оптимального управления, в том числе к задачам оптимизации динамических систем по управляющим параметрам. В частности, к последним относятся проблема параметрического синтеза управления в виде функции известной структуры от фазовых координат с неизвестными значениями параметров; проблема понижения порядка системы дифференциальных уравнений, описывающей динамический процесс; идентификация модели, когда структура управлений определена и многие другие.

Распространенным подходом к решению задач параметрической оптимизации является частичная или полная ее дискретизация и сведение к задачам математического программирования. Указанный подход широко распространен среди зарубежных исследователей (E. Polak, D.Q. Mayne, N. Maratos, M.H. Wright, P.E. Gill, W. Murrey и др.). Альтернативным к решению рассматриваемых задач является подход, основанный на теории и методах оптимального управления.

Задачи оптимального управления с управляющими функциями и параметрами в отечественной литературе рассматривались в работах Л.С. Понтрягина и его учеников, в которых были получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. Аналогичные условия были сформулированы в классе задач параметрической оптимизации в трудах Р. Габасова, Ф.М. Кирилловой.

Результаты исследований задач оптимизации с управляющими параметрами также приведены в работах В.И. Гурмана, И.В. Расиной, О.В. Васильева, В.А. Батурина, Д.Е. Урбановича, А.И. Тятюшкина, А.Ю. Горнова и др.

Новый подход к оптимизации управляемых систем основывается на нестандартных аппроксимациях приращений функционалов от управления и модификациях сопряженных систем, которые позволяют конструировать эффективные нелокальные методы улучшения управления.

Нелокальные методы оптимизации в классах линейных и квадратичных управляемых систем предложены в работах В.А. Срочко и его учеников. Дифференциально-алгебраические модификации сопряженных систем в задачах оптимального управления рассматривались в работах А.С. Булдаева. Численным методам решения различных классов дифференциально-алгебраических систем посвящены труды Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, М.В. Булатова и др.

В работах А.С. Булдаева разработаны методы нелокального улучшения управляющих параметров в полиномиальном по состоянию классе задач параметрической оптимизации динамических систем. Методы основываются на модификации сопряженной системы, позволяющей получать нестандартные формулы приращения целевой функции задачи, которые не содержат остаточных членов разложений. Получаемые формулы дают возможность конструировать специальные операторные уравнения, решение которых приводит к построению улучшающего управления. Конструируемые методы обладают свойством нелокальности улучшения (улучшение необязательно гарантируется только в локальной окрестности улучшаемого управления), позволяют получать новые усиленные условия оптимальности, а также имеют возможность улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума.

В данной работе указанный подход развивается и обобщается на общий нелинейный класс задач оптимизации параметров динамических систем.

Целью диссертационной работы является разработка вычислительно эффективных моделей и методов оптимизации параметров нелинейных динамических систем, программно-алгоритмическая реализация и апробация конструируемых методов на тестовых и прикладных задачах.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**.

1. Разработка условий улучшения управляющих параметров динамических систем в форме модельных задач о неподвижной точке конструируемых операторов управления.
2. Построение и обоснование сходимости итерационных методов решения задач о неподвижной точке.
3. Программно-алгоритмическая реализация построенных методов неподвижных точек и сравнительный анализ их эффективности в вычислительных экспериментах на тестовых и модельных задачах.

Методы исследования. При выполнении диссертационной работы используются нестандартные аппроксимации приращения целевой функции и модификации сопряженных систем, аппарат теории и методов функционального анализа, динамических систем, вычислительной математики и оптимального управления. Для программной реализации методов применяется пакет Fortran Power Station 4.0.

Научная новизна результатов, выносимых на защиту.

1. Разработанные модели неподвижных точек для решения классов задач параметрической оптимизации динамических систем, представляющие собой специальные задачи о неподвижной точке конструируемых операторов управления, обладают свойствами нелокальности и возможности улучшения неоптимальных управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума.
2. Новое необходимое условие оптимальности усиливает известный дифференциальный принцип максимума в классе линейных по управлению задач параметрической оптимизации.
3. Доказанные теоремы о сходимости обосновывают принципиальную сходимость предлагаемых итерационных алгоритмов решения моделируемых задач о неподвижной точке.
4. Построенные методы решения задач о неподвижной точке имеют повышенную вычислительную эффективность, подтвержденную

результатами сравнительного анализа предложенных методов с известными в вычислительных экспериментах.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Полученные в работе результаты определяют перспективное направление развития теории и методов оптимизации параметров нелинейных управляемых систем. Предлагаемые методы неподвижных точек могут применяться для разработки вычислительных комплексов с целью эффективного решения актуальных прикладных задач управления динамическими системами. Результаты исследований отражены в ряде публикаций и в научных отчетах, выполненных в рамках грантов РФФИ (проекты 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_а, 13-01-92200-Монг_а, 15-01-03680-а), госзадания Министерства образования и науки РФ (проект № 3808).

Разработан комплекс программ для ЭВМ, предназначенный для решения задач оптимизации управляющих параметров динамических систем разработанными методами. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016611612 от 05.02.2016 г. «Программа оптимизации параметров билинейных динамических систем методом неподвижных точек».

Полученные результаты используются в учебных спецкурсах и для выполнения курсовых и дипломных работ студентов математических специальностей Бурятского государственного университета.

Достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением математического аппарата, доказательствами сформулированных утверждений, проведенными численными экспериментами и решениями модельных и тестовых задач.

Работа соответствует пунктам 2, 3, 4 паспорта научной специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены в докладах и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- III Международная конференция «Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы» ИКВТС-2010 (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 6-11 сентября 2010 г.);
- V, VI, VII Международные симпозиумы «Обобщенные постановки и решения задач управления» (International Symposium «Generalized Statements and Solutions of Control Problems») (г. Улан-Батор, Монголия, 13-17 сентября 2010 г.; г. Геленджик, Краснодарский край, 25-27 сентября 2012 г., 23-30 сентября 2014 г.);
- Межрегиональные молодежные школы-семинары «Моделирование социо-эколого-экономических процессов в регионе» (г. Улан-Удэ, 15 ноября 2012 г.; 27-29 ноября 2013 г.);
- The 8th International Forum on strategic technology IFOST-2013 (Ulaanbaatar, Mongolia, June 28 – July 1, 2013);
- The 4th International Conference on Optimization, Simulation and Control ICOSC-2013 (Ulaanbaatar, Mongolia, 1-4 July, 2013);

- V Международная конференция «Математика, ее приложения и математическое образование» МПМО-2014 (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 23-28 июня 2014 г.);
- Семинар молодых ученых с международным участием «Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа» в рамках международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (г. Улан-Удэ – оз. Байкал, 20-27 июня 2015 г.);
- The 10th International Conference on Optimization: Techniques and Applications ICOTA 10 (Ulaanbaatar, Mongolia, 23-26 July, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах, включая статьи в журналах, трудах конференций, симпозиумов, семинаров и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. В том числе 4 статьи в изданиях, включенных в Перечень ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Страниц – 103, рисунков – 7, таблиц – 12, в списке литературы 147 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, новизна, практическая и теоретическая значимость результатов, приведены обзор научной тематики и краткое содержание диссертационной работы.

В **главе 1** рассматривается задача оптимизации управляющих параметров динамической системы:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t),u,t)dt \to \inf_{u\in U}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u,t),\ x(t_0) = x^0,\ u \in U,\ t \in T = [t_0,t_1], \tag{2}$$

в которой $x(t) \in R^n$ – вектор-функция фазовых переменных (состояние), $u \in R^m$ – вектор управляющих параметров (управление) со значениями в выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и интервал T заданы.

Предполагаются выполненными следующие условия:

1) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на R^n, функция $F(x,u,t)$, векторная функция $f(x,u,t)$ и их производные $F_x(x,u,t)$, $F_u(x,u,t)$, $f_x(x,u,t)$, $f_u(x,u,t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x,u,t) на множестве $R^n \times U \times T$;
2) вектор-функция $f(x,u,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$: $\| f(x,u,t) - f(y,u,t) \| \le L \| x - y \|$.

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t,v), t \in T$ системы (2) для любого допустимого управления $v \in U$.

Требуется найти последовательность $u^s \in U, s = 0,1,2...$, для которой $\Phi(u^s) \to \inf_{u \in U} \Phi(u)$ при $s \to \infty$. Такая последовательность называется минимизирующей.

Распространенным подходом к решению рассматриваемой задачи является последовательное решение задач улучшения управления, которые определяются следующим образом: для заданного управления $u \in U$ требуется найти управление $v \in U$ с условием $\Phi(v) \le \Phi(u)$.

В ходе последовательного решения задач улучшения строится улучшающаяся (релаксационная) последовательность управлений.

Для удобства записи вводится следующее обозначение приращения произвольной функции $g(y_1,...,y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2}:

$$\Delta_{y_{s_1}+\Delta y_{s_1}, y_{s_2}+\Delta y_{s_2}} g = g(y_1,...,y_{s_1}+\Delta y_{s_1},...,y_{s_2}+\Delta y_{s_2},...,y_l) - g(y_1,...,y_l).$$

В главе построена формула приращения целевой функции

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \Delta_v H(p(t,u,v), x(t,v), u, t)dt, \quad u, v \in U \tag{3}$$

на основе введения модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), w, t) - r(t), \tag{4}$$

$$\langle H_x(p(t), x(t), w, t) + r(t), y(t) - x(t) \rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), w, t) \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \tag{6}$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1)) + q, y(t_1) - x(t_1) \rangle = \Delta_{y(t_1)} \varphi(x(t_1)). \tag{7}$$

Здесь $H(p,x,u,t) = \langle p, f(x,u,t) \rangle - F(x,u,t)$ – функция Понтрягина. Вектор-функция $r(t) \in R^n$ и вектор $q \in R^n$ определяются из алгебраических уравнений (5), (7). Для допустимых управлений $u, v \in U$ $p(t,u,v), t \in T$ – решение системы (4)-(7) при $x(t) = x(t,u), y(t) = x(t,v), w = u$.

Формула (3) не содержит каких-либо остаточных членов разложений и позволяет конструировать эффективные методы улучшения допустимого управления $u \in U$. На основе (3) предлагаются условия улучшения допустимого управления, имеющие вид специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов управления.

Для реализации улучшения управления $u \in U$ рассматривается следующая система уравнений

$$v = \arg\max_{w \in U} \int_T H(p(t,u,v), x(t,v), w, t)dt, \; v \in U, \tag{8}$$

которая интерпретируется как задача о неподвижной точке в пространстве управлений.

Задачу (8) можно представить в стандартной операторной форме

$$v = G^*(v), v \in U,$$

в которой оператор G^* определяется в виде суперпозиции операторов

$$P(v)=p,\, v\in U,\; p\in C(T),\; p(t)=p(t,u,v),\, t\in T,$$
$$X(v)=x,\, v\in U,\, x\in C(T),\, x(t)=x(t,v),\, t\in T,$$
$$I^*(p,x)=v^*,\; p\in C(T),\, x\in C(T),$$
$$v^*=\arg\max_{w\in U}\int_T H(p(t),x(t),w,t)dt,$$
$$G^*(v)=I^*(P(v),X(v)),$$
где $C(T)$ – пространство непрерывных на T вектор-функций.

Аналогично для заданных $\alpha>0$ и $u\in U$ рассматривается задача о неподвижной точке

$$v=P_U(u+\alpha(\int_T H_u(p(t,u,v),x(t,v),u,t)dt+s)),\, v\in U,\, s\in R^m, \tag{9}$$

$$\int_T \Delta_v H(p(t,u,v),x(t,v),u,t)dt=\left\langle \int_T H_u(p(t,u,v),x(t,v),u,t)dt+s, v-u\right\rangle, \tag{10}$$

где P_U – оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Задачу (9), (10) можно представить в стандартной форме для соответствующего оператора управления

$$v=G^\alpha(v),\, v\in U,\, \alpha>0.$$

Для заданного $u\in U$ введем дополнительные отображения I^α и S соотношениями

$$I^\alpha(p,x,s,u)=v^\alpha,\; p\in C(T),\, x\in C(T),\, s\in R^m,$$
$$v^\alpha=P_U(u+\alpha(\int_T H_u(p(t),x(t),u,t)dt+s)),$$
$$S(v)=s,\, v\in U,\, s=s(u,v),$$
где $s(u,v)$ – решение алгебраического уравнения (10).

Тогда с помощью рассмотренных ранее отображений P, X и введенных отображений I^α, S оператор G^α записывается в виде суперпозиции

$$G^\alpha(v)=I^\alpha(P(v),X(v),S(v),u),\, v\in U.$$

В главе показывается, что решения конструируемых задач (8) и (9), (10) гарантируют улучшение заданного управления $u\in U$.

Показывается, что решение $v^\alpha\in U$ задачи (9), (10) обеспечивает улучшение с оценкой

$$\Delta_{v^\alpha}\Phi(u)\le -\frac{1}{\alpha}\left\|v^\alpha-u\right\|^2. \tag{11}$$

Выделим класс линейных по управлению задач

$$\Phi(u)=\varphi(x(t_1))+\int_T(\langle a(x(t),t),u\rangle+d(x(t),t))dt\to\inf_{u\in U}, \tag{12}$$

$$\dot{x}(t)=A(x(t),t)u+b(x(t),t),\, x(t_0)=x^0,\, u\in U,\, t\in T=[t_0,t_1], \tag{13}$$

в котором матричная функция $A(x,t)$, векторные функции $a(x,t), b(x,t)$, функции $\varphi(x), d(x,t)$ непрерывны вместе со своими производными по x по совокупности аргументов на множестве $R^n \times T$. Множество $U \subset R^m$ выпукло и компактно.

Функция Понтрягина и формула приращения (3) принимают вид

$$H(\psi,x,u,t) = H_0(\psi,x,t) + \langle H_1(\psi,x,t),u\rangle,$$

$$H_0(\psi,x,t) = \langle \psi, b(x,t)\rangle - d(x,t),$$

$$H_1(\psi,x,t) = A^T(x,t)\psi - a(x,t),$$

$$\Delta_v \Phi(u) = -\langle \int_T H_1(p(t,u,v),x(t,v),t)dt, v-u\rangle.$$

Известное условие дифференциального принципа максимума[1] (ДПМ) для управления $u \in U$ в линейной задаче (12), (13) записывается в форме:

$$u = \arg\max_{w\in U} \left\langle \int_T H_1(\psi(t,u),x(t,u),t)dt, w \right\rangle. \tag{14}$$

Для заданного $u \in U$ задача о неподвижной точке (8) в рассматриваемом классе имеет вид:

$$v = \arg\max_{w\in U} \langle \int_T H_1(p(t,u,v),x(t,v),t)dt, w\rangle,\ v \in U, \tag{15}$$

или в стандартной форме:

$$v = G_1^*(v),$$

где оператор G_1^* определяется соотношениями

$$P(v) = p,\ v \in U,\ p \in C(T),\ p(t) = p(t,u,v),\ t \in T,$$

$$X(v) = x,\ v \in U,\ x \in C(T),\ x(t) = x(t,v),\ t \in T,$$

$$I_1^*(p,x) = v_1^*,\ p \in C(T),\ x \in C(T),$$

$$v_1^* = \arg\max_{w\in U} \left\langle \int_T H_1(p(t),x(t),t)dt, w \right\rangle,$$

$$G_1^*(v) = I_1^*(P(v), X(v)).$$

Обозначим множество неподвижных точек оператора G_1^*

$$V_1^*(u) = \{v \in U : v = \arg\max_{w\in U} \langle \int_T H_1(p(t,u,v),x(t,v),t)dt, w\rangle\}.$$

В работе получено следующее утверждение:

Теорема 1.1. *В линейной по управлению задаче (12), (13) управление* $u \in U$ *удовлетворяет дифференциальному принципу максимума (14) тогда и только тогда, когда* u *является неподвижной точкой оператора* G_1^*.

В качестве следствия получаем ДПМ в терминах задачи о неподвижной точке (15):

ДПМ. *Для оптимальности управления* $u \in U$ *в задаче (12), (13) необходимо, чтобы вектор* u *являлся неподвижной точкой оператора* G_1^*.

[1] Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 1994. – 339 с.

Для заданных $\alpha > 0$ и $u \in U$ задача о неподвижной точке (9), (10) на основе оператора проектирования P_U на множество допустимых значений U в рассматриваемом классе линейных задач принимает вид:

$$v = P_U(u + \alpha \int_T H_1(p(t,u,v), x(t,v), t)dt), \; v \in U, \tag{16}$$

которая в операторной форме представляется в виде:

$$v = G_1^{\alpha}(v), \; v \in U.$$

Оператор G_1^{α} определяется в виде суперпозиции отображений

$$I_1^{\alpha}(p, x, u) = v_1^{\alpha}, \; p \in C(T), \; x \in C(T),$$

$$v_1^{\alpha} = P_U(u + \alpha \int_T H_1(p(t), x(t), t)dt),$$

$$G_1^{\alpha}(v) = I_1^{\alpha}(P(v), X(v), u).$$

Обозначим множество неподвижных точек оператора G_1^{α}

$$V_1^{\alpha}(u) = \{v \in U : v = P_U(u + \alpha \int_T H_1(p(t,u,v), x(t,v), t)dt)\}.$$

Условие ДПМ (14) для $u \in U$ в линейной задаче (12), (13) в эквивалентной проекционной форме имеет вид

$$u = P_U(u + \alpha \int_T H_1(\psi(t,u), x(t,u), t)dt), \; \alpha > 0. \tag{17}$$

В главе также получено утверждение:

Теорема 1.2. *Управление* $u \in U$ *удовлетворяет необходимому условию оптимальности (17) тогда и только тогда, когда* u *является неподвижной точкой оператора* G_1^{α} *для всех* $\alpha > 0$.

При этом достаточно проверить, что u является неподвижной точкой оператора G_1^{α} хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Из теоремы следует аналог ДПМ в терминах задачи о неподвижной точке (16):

ДПМ. *Для оптимальности управления* $u \in U$ *в задаче* (12), (13) *необходимо, чтобы вектор* u *являлся неподвижной точкой оператора* G_1^{α} *для всех* $\alpha > 0$.

Оценка (11) позволяет получить **новое усиленное необходимое условие оптимальности** в рассматриваемом классе задач в форме следующего утверждения.

Теорема 1.3. *Для оптимальности управления* $u \in U$ *в задаче (12), (13) необходимо, чтобы* u *являлось единственной неподвижной точкой оператора* G_1^{α} *для всех* $\alpha > 0$:

$$V_1^{\alpha}(u) = \{u\}.$$

В главе предлагаемый подход моделирования и поиска неподвижных точек также рассматривается для более сложной задачи с управляющими параметрами в начальных условиях

$$\Phi(\sigma) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t),u,t)dt \to \inf_{\sigma\in D}, \tag{18}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u,t), \quad x(t_0) = a, \quad u \in U, a \in A, t \in T = [t_0,t_1], \tag{19}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор-функция фазовых переменных (состояние), $u \in R^m$, $a \in R^n$ – векторы управляющих параметров. Множества $U \subset R^m, A \subset R^n$ замкнуты и выпуклы. Интервал T фиксирован, $\sigma = (u,a)$ – допустимое управление со значениями из множества $D = U \times A$.

Ставится задача улучшения: для заданного управления $\sigma^I \in D$ требуется найти управление $\sigma \in D$ с условием

$$\Phi(\sigma) \le \Phi(\sigma^I).$$

В рассматриваемом классе задач построена формула приращения в виде:

$$\Delta_\sigma \Phi(\sigma^I) = -\int_T \Delta_u H(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), u^I, t)dt - \langle p(t_0,\sigma^I,\sigma), \Delta a\rangle.$$

Для улучшения заданного управления $\sigma^I \in D$ рассматривается задача о неподвижной точке, которая определяется системой уравнений:

$$u = \arg\max_{\tilde{u}\in U} \int_T H(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), \tilde{u}, t)dt, \ t \in T, \tag{20}$$

$$a = \arg\max_{\tilde{a}\in A} \left\langle p(t_0,\sigma^I,\sigma), \tilde{a} \right\rangle. \tag{21}$$

Аналогично можно построить модель неподвижных точек в рассматриваемом классе задач на основе операции проектирования P_U.

Показывается, что решение задачи (20), (21) обеспечивает улучшение заданного управления $\sigma^I \in D$ в задаче (18), (19).

В **главе 2** для решения моделируемых задач о неподвижной точке предлагаются итерационные методы последовательных приближений, которые аналогичны известному методу простой итерации. Анализ сходимости итерационных методов основывается на известном принципе сжимающих отображений.

Итерационный процесс для решения задачи о неподвижной точке (8) имеет вид:

$$v^{k+1} = \arg\max_{w\in U} \int_T H(p(t,u,v^k), x(t,v^k), w, t)dt, \ v^k \in U, k \ge 0. \tag{22}$$

На нулевой итерации при $k = 0$ задается начальное приближение $v^0 \in U$.

В соответствии с операторной формой рассматриваемой задачи о неподвижной точке итерационный процесс (22) представляется в форме:

$$v^{k+1} = G^*(v^k), k \ge 0.$$

Получено следующее утверждение о сходимости итерационного процесса (22).

Теорема 2.1. *Предположим, что*

1) семейство фазовых траекторий ограничено

$$x(t,v) \in \Omega, t \in T, v \in U,$$

где $\Omega \subset R^n$ *– выпуклое компактное множество;*

2) функции $f(x,u,t), F(x,u,t), \varphi(x)$ *дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов* x, u, t *на множестве* $R^n \times U \times T$*;*
3) величина $r(t)$*, определяемая из алгебраического уравнения (5) модифицированной сопряженной системы, является кусочно-непрерывной, ограниченной и однозначной функцией на* T*. Величина* q*, определяемая из алгебраического уравнения (7) модифицированной сопряженной системы, является ограниченной и однозначной;*
4) оператор I^* *удовлетворяет условию Липшица по переменным* $p \in C(T), x \in C(T)$ *в шаре* $B_0 = B_0(\tilde{p}, \tilde{x}, l)$ *радиуса* $l > 0$ *с центром в точке* $(\tilde{p}, \tilde{x})$*, где* $\tilde{x} = x(t, \tilde{v}), \tilde{p} = p(t, u, \tilde{v})$ *– соответствующие решения фазовой (2) и сопряженной (4)-(7) систем,* $\tilde{v}$ *– неподвижная точка оператора* G^*

$$\left\| I^*(p,x) - I^*(q,y) \right\| \le \varepsilon \left(\|p-q\|_{C(T)} + \|x-y\|_{C(T)} \right),$$

$$(p,x) \in B_0, \quad (q,y) \in B_0, \quad \varepsilon = const > 0.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ *в некотором шаре* $B(\tilde{v}, l_1)$ *радиуса* $l_1 > 0$ *итерационный процесс (22) сходится в евклидовой норме к единственному решению* $\bar{v} \in B(\tilde{v}, l_1)$ *задачи (8) для любого начального приближения* $v^0 \in B(\tilde{v}, l_1)$*.*

Итерационный процесс для решения задачи о неподвижной точке (16) в линейном по управлению классе задач (12), (13) рассматривается в следующей форме:

$$v^{k+1} = P_U(u + \alpha \int_T H_1(p(t,u,v^k), x(t,v^k), t)dt), v^k \in U, k \ge 0, \tag{23}$$

который в операторной форме принимает вид:

$$v^{k+1} = G_1^{\alpha}(v^k), \ k \ge 0.$$

Для итерационного процесса (23) получено следующее утверждение о сходимости:

Теорема 2.2. *Предположим, что*
1) семейство фазовых траекторий в задаче (12), (13) ограничено

$$x(t,v) \in \Omega, t \in T, v \in U,$$

где $\Omega \subset R^n$ *– выпуклое компактное множество;*
2) функции $A(x,t), a(x,t), b(x,t), d(x,t)$ *и* $\varphi(x)$ *дважды непрерывно дифференцируемы по* x, t *на* $R^n \times T$*;*
3) величина $r(t)$*, определяемая из алгебраического уравнения (5) модифицированной сопряженной системы, является кусочно-непрерывной, ограниченной и однозначной функцией на* T*. Величина* q*, определяемая из алгебраического уравнения (7) модифицированной сопряженной системы, является ограниченной и однозначной;*
4) для функции H_1 *выполняется условие*

$$\langle u-v, \int_T (H_1(p,x,t)-H_1(q,y,t))dt\rangle \le -L_1\|u-v\|^2,$$

$$u,v\in U,\ \ p,q\in R^n,\ \ x,y\in\Omega,\ t\in T,$$

где $L_1 = const > 0$.

Тогда для достаточно малого параметра проектирования $\alpha > 0$ *итерационный процесс (23) сходится в евклидовой норме к единственному решению* $\bar v \in U$ *задачи (16) для любого начального приближения* $v^0 \in U$.

Предлагаемые методы неподвижных точек заключаются в последовательном решении задач о неподвижной точке. При этом работа метода организуется в два цикла: внешний и внутренний. Во внутреннем цикле реализуется итерационный алгоритм решения задачи о неподвижной точке, который проводится до первого улучшения заданного управления. Во внешнем цикле для найденного улучшающего управления строится новая задача о неподвижной точке, и итерационный процесс повторяется.

Конкретная реализация метода неподвижных точек задается особенностями, включающими:

1) моделируемый оператор управления;
2) способ реализации алгебраических уравнений модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы;
3) метод решения модельных задач о неподвижной точке.

Построенные методы, основанные на решении специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов в пространстве управлений, обладают свойством нелокальности улучшения (улучшение необязательно гарантируется только в локальной окрестности улучшаемого управления), позволяют получить новое усиленное условие оптимальности, а также имеют возможность улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума. Указанные свойства предлагаемых методов являются существенными факторами повышения вычислительной эффективности решения задач рассматриваемого класса.

В **главе 3** проводится сравнительный анализ эффективности предложенных методов на тестовых и модельных задачах.

Модельная задача «кинетика ядерного реактора»

Рассматривается задача понижения порядка системы дифференциальных уравнений, описывающей кинетику ядерного реактора[2]:

$$\dot y_1 = 641{,}02y_1 + 21{,}02y_2 + 141{,}03y_3 + 120{,}192y_4 + \\ +253{,}844y_5 + 74{,}358y_6 + 27{,}051y_7 + 200, \qquad (24)$$

$$\dot y_2 = 0{,}0123(y_1-y_2),\ \dot y_3 = 0{,}03(y_1-y_3),\ \dot y_4 = 0{,}112(y_1-y_4),$$

---

[2] Ащепков Л.Т., Новосельский А.В., Тятюшкин А.И. Идентификация динамических систем как задача управления параметрами // Автоматика и телемеханика. – 1975. – № 3. – С. 178-182.

$$\dot{y}_5 = 0,301\left(y_1 - y_5\right), \dot{y}_6 = 1,149\left(y_1 - y_6\right), \dot{y}_7 = 3,012\left(y_1 - y_7\right),$$
$$y_1(0) = \ldots = y_7(0) = 0,25.$$

Идентифицируемая система имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3, \quad \dot{x}_2 = w_4 x_1 + w_5 x_2, \\ &x_1(0) = v_1, \quad x_2(0) = v_2. \end{aligned} \tag{25}$$

В качестве минимизируемой целевой функции, характеризующей близость решений, служит среднеквадратическая ошибка:

$$I(w,v) = \int_0^8 \sum_{i=1}^{2} \left(x_i(t) - y_i(t)\right)^2 dt, \, w = \left(w_1, \ldots, w_5\right), \, v = \left(v_1, v_2\right). \tag{26}$$

Задача состоит в определении таких значений вектора параметров $\left(\hat{w}, \hat{v}\right)$, при которых целевая функция (26) принимает наименьшее значение.

В источнике были получены следующие расчетные оптимальные значения параметров и целевой функции:

$$\begin{gathered} w_1^* = -0,1206; \, w_2^* = 0,0692; \, w_3^* = 0,1296; \, w_4^* = -0,0065; \, w_5^* = 0,0294; \\ v_1^* = 0,5809; \, v_2^* = 0,2610; \; I(w^*, v^*) = 0,0244. \end{gathered} \tag{27}$$

Предварительный анализ показал, что система (24) является вычислительно неустойчивой. При численных расчетах этой системы обнаружилось расхождение между решением исходной системы (24) и идентифицируемой системы (25) с расчетными значениями параметров (27). Поэтому была поставлена и решена вспомогательная задача идентификации параметров системы (24):

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 + u_5 y_5 + u_6 y_6 + u_7 y_7 + u_8, \\ \dot{y}_2 = 0,0123\left(y_1 - y_2\right), \dot{y}_3 = 0,03\left(y_1 - y_3\right), \dot{y}_4 = 0,112\left(y_1 - y_4\right), \\ \dot{y}_5 = 0,301\left(y_1 - y_5\right), \dot{y}_6 = 1,149\left(y_1 - y_6\right), \dot{y}_7 = 3,012\left(y_1 - y_7\right), \\ y_1(0) = \ldots = y_7(0) = 0,25, \end{gathered} \tag{28}$$

$$\Phi(u) = \int_0^8 \sum_{i=1}^{7} \left(y_i(t) - z_i(t)\right)^2 dt, \, u = (u_1, \ldots, u_8),$$

где $z(t)$ – приближенное решение, построенное следующим образом. Первые две компоненты вычисляются по модели (25) с расчетными оптимальными значениями параметров (27). Остальные компоненты восстанавливаются по уравнениям исходной модели (24) для переменных $y_3, \ldots, y_7$.

Таким образом, $z(t)$ является решением системы:

$$\dot{z}_1 = -0,1206 z_1 + 0,0692 z_2 + 0,1296, \, \dot{z}_2 = -0,0065 z_1 + 0,0294 z_2,$$
$$\dot{z}_3 = 0,03\left(z_1 - z_3\right), \, \dot{z}_4 = 0,112\left(z_1 - z_4\right), \; \dot{z}_5 = 0,301\left(z_1 - z_5\right),$$
$$\dot{z}_6 = 1,149\left(z_1 - z_6\right), \, \dot{z}_7 = 3,012\left(z_1 - z_7\right),$$
$$z_1(0) = 0,5809, \, z_2(0) = 0,2610, \, z_3(0) = \ldots = z_7(0) = 0,25.$$

Для численного решения задачи идентификации использовался метод неподвижных точек на основе операции проектирования. Таким образом, найдены следующие расчетно-оптимальные значения управляющих параметров задачи (28)

$$\begin{gathered}\hat{u}_1 = -87,9013; \hat{u}_2 = 8,0383; \hat{u}_3 = 13,0397; \hat{u}_4 = 34,0451; \hat{u}_5 = 22,0533; \\ \hat{u}_6 = 27,0638; \hat{u}_7 = -14,9313; \hat{u}_8 = 30,1494; \quad \Phi(\hat{u}) = 0,00146.\end{gathered} \tag{29}$$

В итоге в качестве «понижаемой системы» рассматривалась система (28) со значениями коэффициентов (29).

В качестве идентифицируемой системы рассматривалась следующая:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3, \qquad \dot{x}_2 = w_4 x_1 + w_5 x_2, \\ x_1(0) = 0,5809,\ x_2(0) = 0,2610,\ T = [0,8].\end{gathered} \tag{30}$$

Минимизируемая целевая функция имеет вид:

$$I(w) = \int_0^8 \sum_{i=1}^{2} \left(x_i(t) - y_i(t) \right)^2 dt,\ w = \left(w_1, ..., w_5 \right).$$

Методом неподвижных точек получены расчетные значения параметров и целевой функции:

$$\hat{w}_1 = -0,1102; \hat{w}_2 = 0,0414; \hat{w}_3 = 0,1292; \hat{w}_4 = 0,0371; \hat{w}_5 = -0,0904; \quad I\left(\hat{w}\right) = 0,0009.$$

На рис. 1 представлены графики траекторий y_1, y_2 приближенного решения понижаемой системы и траекторий x_1, x_2 приближенного решения идентифицируемой системы (30):

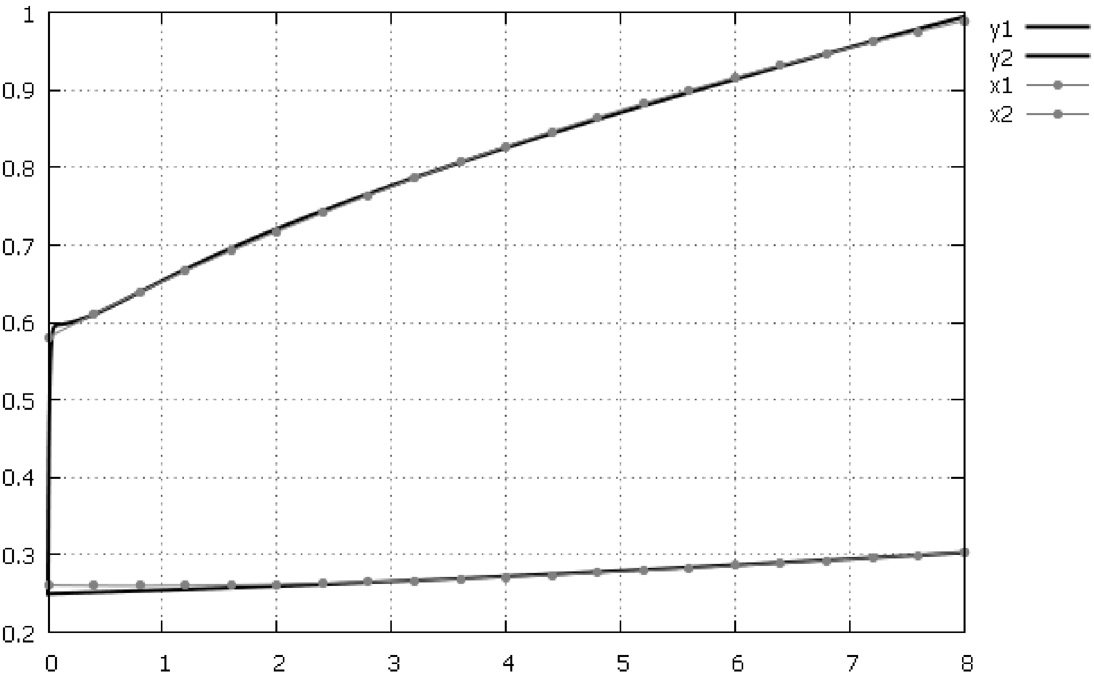

Рис. 1. $y(t)$ – решение «понижаемой» системы, $x(t)$ – полученное решение.

Сравнительный анализ достигнутых расчетных значений целевой функции с известными из литературного источника демонстрирует значительно лучшую эффективность предлагаемого метода неподвижных точек.

Эколого-экономическая задача «модель выпуска продукции с учетом вредных выбросов»

Рассматривается модель выпуска продукции с учетом вредных выбросов[3]:

$$\dot{K} = (1-\alpha-\beta)F(K) - \mu K,$$
$$\dot{P} = (1-d\beta)F(K) - bP,$$

где $K(t)$ – капитал; $P(t)$ – объем загрязнения; $F(K) = 10K^{0,5}$ – объем выпуска; $\alpha \ge 0$; $\beta \ge 0$ – доли выпуска на потребление и борьбу с загрязнением соответственно; μ – доля выбытия капитала; d – удельное загрязнение (ед. продукции); b – скорость очистки; r – ставка дисконтирования.

Ставится задача максимизации полезности (общего благосостояния) от выпускаемой продукции с учетом отрицательного влияния загрязнения:

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-rt}[(\alpha F(K))^{0,5} - P^{1,1}/5000]dt \to \max.$$

Задача рассматривается при следующих значениях числовых параметров: $\mu = 0,06$; $b = 0,1$; $d = 10$; $r = 0,05$.

Ограничения на управляющие параметры следующие:

$$\alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha + \beta \le 1.$$

В главе для численного анализа задача была приведена к виду, не содержащему интегралов:

$$\dot{K} = (1-\alpha-\beta)10K^{0,5} - \mu K,$$
$$\dot{P} = (1-d\beta)10K^{0,5} - bP,$$
$$\dot{L} = e^{-rt}\left((10\alpha)^{0,5}K^{0,25} - P^{1,1}/5000\right).$$

Целевая функция принимает вид:

$$I(\alpha,\beta) = -L(T) \to \min.$$

В работе[4] проведено аналитическое исследование при некоторых допущениях и получены две пары приближенно экстремальных решений данной задачи при $T \to \infty$. Экстремальность понимается в смысле выполнения условия принципа максимума на полученных решениях. Эти значения равны: $\alpha_1^* = 0,68462$, $\beta_1^* = 0,06992$; $\alpha_2^* = 0,7264$, $\beta_2^* = 0,0$.

При численных расчетах задачи в качестве начального условия системы выбиралось состояние равновесия системы, определяемое равенствами:

$$10K^{0,5} - \mu K = 0, \quad 10K^{0,5} - bP = 0.$$

Для удобства рассматриваемая система была преобразована к эквивалентной «безразмерной» системе, которая в стандартных обозначениях переменных принимает следующий вид:

[3] Тятюшкин А.И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука, 2006. – 343 с.

[4] Kiler E., Spens M., Zekchauzer P. Options Control of Pollution of Surroundings // Journal of Economic Theory. – 1972. – Vol. 4, No 1. – P. 57-71.

$$\dot{x}_1 = (1-u_1-u_2)\mu x_1^{0,5} - \mu x_1, \qquad x_1(0)=1,$$
$$\dot{x}_2 = (1-du_2)bx_1^{0,5} - bx_2, \qquad x_2(0)=1,$$
$$\dot{x}_3 = e^{-rt}\left(10\mu^{-0,5}u_1^{0,5}x_1^{0,25} - \left(100/(b\mu)\right)^{1,1}\cdot\left(1/5000\right)\cdot x_2^{1,1}\right), \quad x_3(0)=0,$$
$$F(u_1,u_2) = -x_3(T) \to \min.$$

Расчетный интервал времени T подбирался так, чтобы целевая функция

$$F(u_1,u_2) = -\int_0^T e^{-rt}\left(10\mu^{-0,5}u_1^{0,5}x_1^{0,25} - \left(100/(b\mu)\right)^{1,1}\cdot\left(1/5000\right)\cdot x_2^{1,1}\right)dt$$

практически не изменялась при дальнейшем увеличении T. Выбирался следующий критерий: изменение целевой функции не превышает 1 %, т.е. $\left|F(T+10)-F(T)\right|/\left|F(T)\right| \le 0,01$. В результате экспериментально был определен расчетный интервал времени $T=[0,80]$.

В работе также проводился численный и качественный анализ рассматриваемой задачи на выполнение свойства неотрицательности переменных $x_1(t), x_2(t)$. В ходе анализа был определен следующий диапазон значений управляемых параметров u_1, u_2, при которых переменные $x_1(t), x_2(t)$ принимают неотрицательные значения:

$$u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_1+u_2 \le 1, u_2 \le 0,1.$$

Задача проектирования на указанное множество легко решается аналитически. При этом пространство параметров разбивается на 9 областей, из которых осуществляется проектирование. Рис. 2 иллюстрирует разбиение пространства параметров на области проектирования, для каждой из которых легко определяется проекция точки на допустимое множество.

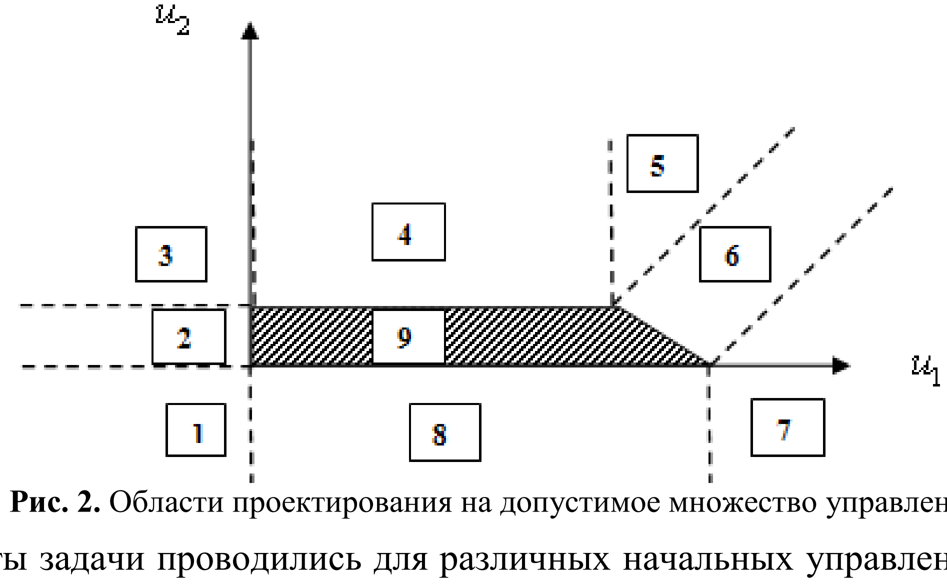

Рис. 2. Области проектирования на допустимое множество управлений.

Расчеты задачи проводились для различных начальных управлений $u \in U$, в том числе начиная с расчетных оптимальных управлений, указанных в источнике, а также при различных значениях параметра проектирования α. В итоге получены расчетные значения параметров $\hat{v}_1 = 0,9, \hat{v}_2 = 0,1$ и соответствующее значение критерия $F(\hat{v}_1,\hat{v}_2) = -537,48$. Значение безразмерного критерия, соответствующего экстремальной паре размерных параметров $\alpha_1^* = 0,68462, \beta_1^* = 0,06992$, указанных в литературном источнике, составляет $F_1 = -480,78$. При другой паре экстремальных параметров $\alpha_2^* = 0,7264, \beta_2^* = 0,0$ значение безразмерного критерия равно $F_2 = -440,37$. Таким образом, расчетные значения параметров, полученных предлагаемым методом неподвижных точек, оказываются существенно лучшими по сравнению с экстремальными параметрами, приведенными в литературном источнике.

В **заключении** представлены основные научные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Разработаны модели и методы неподвижных точек для решения классов задач параметрической оптимизации динамических систем, представляющие собой специальные задачи о неподвижной точке конструируемых операторов управления, обладающие свойством нелокальности и возможностью улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума.
2. Получено новое необходимое условие оптимальности, усиливающее дифференциальный принцип максимума в классе линейных по управлению задач параметрической оптимизации.
3. Построены новые итерационные алгоритмы для решения задач о неподвижной точке и получены условия их сходимости, показывающие принципиальную возможность численного решения рассматриваемых задач.
4. Проведен сравнительный анализ предложенных методов с известными подходами в вычислительных экспериментах, демонстрирующих повышенную вычислительную эффективность предлагаемых методов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в рецензируемых журналах из списка рекомендованных ВАК:

1. Хишектуева И.-Х. Д. Метод поиска неподвижных точек в задаче улучшения управляющих параметров / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского государственного университета. – 2011. – Вып. 9. Математика, информатика. – С. 57–60.
2. Булдаев А. С. Метод неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем / А. С. Булдаев, И.-Х. Д. Хишектуева // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 12. – С. 5–15.
3. Хишектуева И.-Х. Д. Алгоритм оптимизации параметров нелинейных динамических систем / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского государственного университета. – 2013. – Вып. 9. Математика, информатика. – С. 39–44.
4. Хишектуева И.-Х. Д. Применение метода неподвижных точек в задачах оптимизации динамических систем по параметрам и начальным условиям / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2016. – № 1. – С. 38–48.

Свидетельство о государственной регистрации программы:

5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, № 2016611612. Программа оптимизации параметров билинейных динамических систем методом неподвижных точек / И.-Х. Д. Хишектуева ; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО «БГУ». – № 2015619413 ; заяв. 08.10.15 ; дата гос. регистрации в Реестре программ для ЭВМ 05.02.16.

Публикации в других изданиях:

6. Булдаев А. С. Об одном методе улучшения управляющих параметров нелинейных систем / А. С. Булдаев, И.-Х. Д. Хишектуева // Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы (ИКВТС-2010): материалы III Международной конференции (6-11 сентября 2010 г., г. Улан-Удэ, оз. Байкал). – Улан-Удэ : Изд-во Бурятского гос. ун-та, 2010. – С. 79–82.
7. Хишектуева И.-Х. Д. Оценка параметров динамических систем методом нелокальной оптимизации / И.-Х. Д. Хишектуева, А. С. Булдаев // Обобщенные постановки и решения задач управления (GSSCP-2010): материалы V Международного симпозиума (13-17 сентября 2010 г., г. Улан-Батор, Монголия). – Улан-Батор, 2010. – С. 187–189.
8. Хишектуева И.-Х. Д. Метод оптимизации линейных параметров динамических систем / И.-Х. Д. Хишектуева, Д. Халтар // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2012. – № 2. – С. 40–47.
9. Булдаев А. С. Поиск неподвижных точек операторов проектирования в задачах параметрической оптимизации систем / А. С. Булдаев, Б. Очирбат, И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского государственного университет. Математика, информатика. – 2012. – № 2. – С. 4–14.
10. Хишектуева И.-Х. Д. Оптимизация параметров динамических систем поиском неподвижных точек оператора проектирования / И.-Х. Д. Хишектуева // Моделирование социо-эколого-экономических процессов в регионе: материалы межрегиональной молодежной школы-семинара (15 ноября 2012 г., г. Улан-Удэ). – Улан-Удэ : Изд-во БНЦ СО РАН, 2012. – С. 29–33.
11. Хишектуева И.-Х. Д. Оптимизация параметров модели выпуска продукции с учетом вредных выбросов / И.-Х. Д. Хишектуева // Моделирование социо-эколого-экономических процессов в регионе [Электронный ресурс]: материалы межрегиональной молодежной школы-семинара. – Улан-Удэ : Изд-во БНЦ СО РАН, 2013. – Вып. 3. – С. 44–47.
12. Khishektueva I.-Kh. D. The numerical algorithm of search of fixed points in optimization problems with parameters / I.-Kh. D. Khishektueva // The Fourth International Conference on Optimization, Simulation and Control : abstracts (July 1-4, 2013, Ulaanbaatar, Mongolia). – Ulaanbaatar, 2013. – P. 66.
13. Khishektueva I.-Kh. D. Numerical method of search of optimal parameters of dynamic systems / I.-Kh. D. Khishektueva // The 8th International Forum on Strategic Technology (IFOST 2013): proceedings (June 28 – July 1, 2013, Ulaanbaatar, Mongolia). – Ulaanbaatar, 2013. – V. 1. – P. 455–456.

14. Хишектуева И.-Х. Д. Численное решение задач параметрической оптимизации систем методом неподвижных точек / И.-Х. Д. Хишектуева // Обобщенные постановки и решения задач управления: сборник трудов международного научного симпозиума. – Москва : Изд-во физ.-мат. литературы. – 2014. – С. 194–196.
15. Хишектуева И.-Х. Д. Расчет оптимальных параметров динамических систем методом неподвижных точек / И.-Х. Д. Хишектуева // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. журн. – 2014. – Т. 5, № 5(23). – С. 29–35.
16. Хишектуева И.-Х. Д. Оптимизация параметров модели выпуска продукции с учетом вредных выбросов / И.-Х. Д. Хишектуева // Вестник Бурятского государственного университет. Математика, информатика. – 2015.– № 4. – С. 47–57.
17. Хишектуева И.-Х. Д. Метод неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем / И.-Х. Д. Хишектуева // Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа: материалы семинара молодых ученых с международным участием в рамках Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвященной 70-летию со дня рождения профессора В.Н. Врагова (20-27 июня 2015 г., г. Улан-Удэ, оз. Байкал). – Улан-Удэ : Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2015. – С. 133–138.
18. Khishektueva I.-Kh. D. On one approach to modeling and optimization of the dynamics of the nuclear reactor / I.-Kh. D. Khishektueva, A. S. Buldaev // The 10th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 10) : abstracts (July 23-26, 2016, Ulaanbaatar, Mongolia). – Ulaanbaatar, 2016. – P. 118.