

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*

**Ботороева Мария Николаевна**

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Булатов Михаил Валерьянович

Иркутск – 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ В ВИДЕ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	18
1.1 Матричные пучки	18
1.2 Классификация интегральных уравнений Вольтерра и их систем	23
1.3 Представление двухсекторной модели В.М. Глушкова для развивающихся систем в виде интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования	37
1.4 Аналитическое исследование ИАУ с переменными пределами интегрирования	43
1.5 Численные методы решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования	67
1.6 Блок-схема алгоритма численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования многошаговыми методами	75
1.7 Численные эксперименты	77
ГЛАВА 2. ЖЕСТКИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА	81
2.1 Системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода	81
2.2 Модель колебаний концентрации озона в атмосфере, основанная на системе нелинейных ИУВ II рода	81
2.3 Особенности поведения численных методов решения систем нелинейных ИУВ II рода	85
2.4 Численные алгоритмы	89
2.5 Численные эксперименты	90

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ В ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ	96
3.1 Модель долгосрочной стратегии развития системы ЭЭС, описанная ИАУ с переменными пределами интегрирования. ....	96
3.2 Односекторная интегральная модель долгосрочной стратегии ввода генерирующих мощностей ЭЭС России. ....	99
3.3 Алгоритм численного решения задачи прогноза развития ЭЭС России и его реализация. ....	102
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	109
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	111

## ВВЕДЕНИЕ

В различных предметных областях существуют динамические системы, которые способны к обновлению своих элементов, выполняющих определенные функции и отличающихся между собой показателями эффективности и сроками службы. Такие системы были названы развивающимися [42] (РС).

Примерами РС являются экологические системы, экономические системы (отрасли экономики, производственно-технические объединения, отдельные предприятия), популяции различных видов животных и растений, отдельные живые организмы и их компоненты.

Весьма эффективными при описании динамики РС и оптимального управления оказались интегральные модели (ИМ), содержащие уравнения вольтерровского типа с оператором вида

$$\mathcal{V}x = \int_{a(t)}^t K(t, s)x(s)ds. \quad (1)$$

где  $a(t)$  — неубывающая функция. Однако возможность практического применения такого сорта ИМ сдерживается недостаточным развитием анализа качественных свойств и прикладной интерпретации моделей, теории и численных методов решения возникающих математических задач.

Линейные интегральные уравнения с операторами, содержащими заданные функции в пределах интегрирования, называют интегральными уравнениями Вольтерра с двумя переменными пределами интегрирования [7], интегро-функциональными [44] уравнениями Вольтерра, а также интегральными уравнениями Вольтерра с запаздыванием [94]. Такие математические объекты возникают при исследовании обратных задач математической физики [44, 85], описания динамики популяций с пополнениями [88], моделирова-

нии энергетических систем с учетом старения элементов [11] и др. Этим уравнениям посвящено множество журнальных публикаций и даже отдельные монографии (см., например, [7, 94], а также библиографию к ним). В настоящее время исследования вопросов разрешимости различных классов интегральных уравнений Вольтерра с запаздыванием и разработку численных методов их решения проводят Н. Brunner [94, 95], Y. Chen и Z. Gu [100], E. Messina, Y. Muoyab, E. Russo и A. Vecchio [113] и др. Основы аналитической теории и численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода с интегральным оператором вида (1) заложены в работах А.С. Апарцина. Эти исследования продолжают его учениками И.В. Сидлер, Е.В. Марковой, Д.Н. Сидоровым. Уравнения Вольтерра первого рода с разрывным (кусочно непрерывным) ядром и системы таких уравнений составляют класс объектов, тесно связанных с уравнениями, интегральный оператор которых в верхнем и нижнем пределах содержит заданные функции [12, 115]. В настоящее время аналитическая теория интегральных уравнений Вольтерра первого рода (в том числе, в абстрактных бесконечномерных пространствах [73]), численные методы их решения и приложения развиваются в работах Д.Н. Сидорова (см. монографию [115]) и его учеников.

Исследования интегральных уравнений в бесконечномерных пространствах и близких им классов линейных интегро-дифференциальных уравнений с необратимым оператором в главной части проводились Н.А. Сидоровым [72], М.В. Фалалеевым [77], Н.Д. Копачевским [106], В.Е. Федоровым [78–80] и их учениками.

За рубежом эта тематика также получила широкое распространение. Здесь следует упомянуть работы A. Favini, A. Lorenzi и H. Tanabe [101], C. Lizama и R. Ponce [110], R. Aparicio и V. Keyantuo [84], S.Q. Bu и G. Cai [96], M. Kostić [107], K. Balachandran и D.G. Park и Y.C. Kwun [86].

Интегральные модели могут описываться системой взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) как первого, так и второго рода и алгебраических уравнений. Такие системы могут быть представлены в виде интегрального уравнения с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью, которое будем называть интегро-алгебраическим уравнением (ИАУ) (см, например, [94, 104]). При проведении исследования были учтены результаты, известные для ИАУ, которые стали появляться относительно недавно. К настоящему времени исследованы лишь некоторые классы таких задач.

Для ИАУ в конечномерных пространствах в разные годы были описаны характеристики сложности: в 1987 году В.Ф. Чистяковым введено понятие индекса как наименьшего порядка дифференциального оператора, обращающего ИАУ в систему ИУВ II рода [81]; в 1990 году W. Gear (США) — понятие индекса по невязке [103]; в 1983 году А.С. Апарциным — степень некорректности [5].

Первая статья [81], посвященная исследованию и численному решению полуявных ИАУ индекса один, вышла в 1987 году. В ней были сформулированы условия существования единственного непрерывного решения и предложен простейший метод численного решения. ИАУ полуявного вида посвящено несколько разделов фундаментальной монографии Н. Brunner [94].

В конце 90-х М.В. Булатов провел исследование на предмет существования единственного решения ИАУ с ядром типа свертки [97]. Им же предложен метод регуляризации для ИАУ индекса один [31]. В 2000 году Р.-Ж. Kauthen (Швейцария) [104] и 2010–2013 М. Hadizadeh (Иран) с учениками разработали методы Рунге-Кутты и исследовали применение полиномов наилучшего приближения для полуявных ИАУ индекса один (см., напр., [102, 114] и приведенную там библиографию). В цикле работ Е.Б. Кузнецова пробле-

ма построения численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследована на основе метода продолжения по параметру и преобразования исходной задачи к наилучшему аргументу, т. е. обеспечивающего наилучшую обусловленность системы уравнений продолжения. Эти подходы нашли применение при разработке эффективных численных методов решения дифференциально-алгебраических уравнений [54, 55], в том числе высоких индексов [13], а также дифференциально-алгебраических и интегродифференциально-алгебраических уравнений с отклоняющимся аргументом [45, 56].

В работах [30, 82] показано, что линейные ИАУ относятся к классу некорректных задач. То есть, если исходная задача имела единственное решение, то сколь угодно малое возмущение данных задачи может привести к сколь угодно большим возмущениям решения или к его отсутствию в классе непрерывных функций.

Методами регуляризации некорректных задач занимались А.Н. Тихонов, В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев, В.А. Морозов (см., например, [57, 75, 76, 112] и приведенную там библиографию). Большой класс таких методов основан на параметризации исходной задачи, что делает ее корректной. В [36] показано, что многошаговые методы для численного решения линейных ИАУ обладают свойством саморегуляризации, то есть параметром регуляризации является шаг дискретизации.

В настоящей диссертационной работе поставлена задача разработки стратегии ввода новых элементов РС для достижения заданного уровня роста производства внешнего продукта элементами РС. Данная задача описывается системой уравнений, среди которых ИУВ как первого, так и второго рода на основе оператора (1) и алгебраические уравнения. Такие системы представляются в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования.

К настоящему времени практически нет работ по качественной теории и численному решению ИАУ с переменными пределами интегрирования.

Таким образом, в рамках моделирования РС весьма актуальным оказывается качественное исследование ИАУ с переменными пределами интегрирования и разработка численных методов их решения с последующей программной реализацией. Именно таким направлениям посвящена диссертационная работа.

**Целью диссертационной работы** является качественное исследование моделей РС в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования и разработка методов их численного решения.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Анализ существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования, описание их свойств и построение на их основе модели РС.
2. Разработка и программная реализация  $k$ -шаговых методов численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования; построение, исследование устойчивости и программная реализация  $L$ -устойчивого безытерационного метода второго порядка точности для численного решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода.
3. Расчет стратегии ввода генерирующих мощностей электроэнергетической системы (ЭЭС) России до 2056 г., обеспечивающей заданную динамику роста располагаемой мощности.

**Методы исследования.** В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, теории матричных пучков, теории разностных схем и теории устойчивости.



## Научная новизна результатов, выносимых на защиту.

1. Впервые модели РС представлены в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования. Такая запись позволяет привлечь удобный для исследования на предмет существования единственного непрерывного решения аппарат теории матричных пучков.
2. Получены условия о существовании единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования, которая позволяет эффективно исследовать модели РС на предмет существования единственного непрерывного решения. Приводится исследование конкретной модели ЭЭС.
3. Предложены  $k$ -шаговые методы для численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования, используя которые возможно получить стратегию развития моделируемых систем с требуемой точностью.
4. Построены безытерационные  $L$ -устойчивые методы численного решения систем нелинейных ИУВ II рода, которые обладают вторым порядком точности.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** В диссертационной работе исследован новый класс задач ИАУ с переменными пределами интегрирования: сформулирована и доказана теорема существования единственного непрерывного решения, описаны основные свойства, предложены численные методы решения.

Результаты диссертационной работы позволяют строить модели РС различных предметных областей, проводить их исследование и численные расчеты с высокой точностью. В диссертационной работе приведен пример иссле-

дования модели ЭЭС. Получена стратегия ввода генерирующих мощностей ЭЭС России для достижения заданного роста располагаемых мощностей.

Разработаны программы для ЭВМ, предназначенные для численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614303 от 11.04.2017 «Программа численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования многошаговыми методами»).

Также в работе предложен безытерационный  $L$ -устойчивый метод второго порядка точности для численного решения систем ИУВ II рода (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615853 от 25.05.2017 «Неявный безытерационный метод численного решения жестких нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода»).

Результаты исследований отражены в ряде публикаций и в научных отчетах, выполненных в рамках грантов РФФИ (проекты 18-51-54001-Вьет-а, 16-51-54002-Вьет-а, 16-31-00219 мол\_а, 15-01-03228\_а, 14-01-31224 мол\_а, 13-01-93002, 11-01-00639\_а, 11-01-93005-Вьет-а, 10-01-00571\_а).

**Достоверность полученных результатов.** Научные положения, сформулированные в диссертационной работе, согласуются с ранее полученными результатами для ИАУ с постоянным нижним пределом интегрирования (В.Ф. Чистяков, М.В. Булатов), неклассических ИУВ I рода (А.С. Апарцин). Численные расчеты тестовых примеров, выполненные разработанными в диссертации методами, сравниваются с результатами, полученными при использовании известных численных методов. Адекватность математических моделей и эффективность предложенных алгоритмов подтверждается сравнением численных прогнозов с полученными ранее [10] и с реальными данными вводов генерирующих мощностей. Полученный прогноз ввода генерирующих

мощностей ЭЭС России так же хорошо согласуется с планом министерства энергетики РФ [68].

Результаты, полученные другими авторами, используются в диссертационной работе и отмечаются ссылками. Все результаты диссертации обсуждались на научных конференциях и семинарах.

Работа соответствует пунктам: 2 «развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», 3 «разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», 4 «реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» паспорта научной специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

**Апробация результатов.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных **международных** мероприятиях:

- Международный семинар «New Approaches in the Analysis and Numerical Solution of Differential and Integral Equations» (Иркутск–Байкал, 8-13 августа 2010 г.);

- Российско-монгольская конференция молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Иркутск–Ханх, 2011 г.);

- Международный семинар «New Approaches in the Analysis and Numerical Solution of Differential and Integral Equations» (Иркутск–Харанцы, 8-15 августа 2011 г.);

- X Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, 12-15 июня 2012 г.);

- III Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 25 июня – 1 июля 2012 г.);
- II Российско-монгольская конференция молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Россия—Монголия, 25 июня – 1 июля 2013 г.);
- Workshop Systems and Control Theory (Вьетнам, Ханой, 2013 г.);
- V Congress of the Turkic World Mathematicians (Киргизия, Булан-Соготту, 5–7 июня 2014 г.);
- Международный семинар «Numerical Solution of Integral and Differential Equations» (Харанцы, 15–20 июля 2014 г.);
- Международный семинар «New Approaches in the Analysis and Numerical Solution of Differential and Integral Equations» (Вьетнам, Ханой, 7–9 ноября 2014 г.);
- Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 19–21 ноября 2015 г.);
- VIII Международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, 1–7 сентября 2016 г.);
- First Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Differential and Integral Equations (Монголия, 10–11 сентября 2016 г.);
- Второй Монгольско-Российско-Вьетнамский семинар «Численное решение интегральных и дифференциальных уравнений» (Харанцы, 1–7 июля 2017 г.);
- Международная конференция «Математика в современном мире» (Новосибирск, 14–19 августа 2017 г.);
- VIII Международная конференция по математическому моделированию (Якутск, 4–8 июля 2017 г.);

- Международная конференция «Понтрягинские чтения – ХХХ» в рамках Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3-9 мая 2019 г.);

**всероссийских** конференциях и семинарах:

- XI конференция по математическому моделированию и информационным технологиям (Иркутск, 15–21 марта 2010 г.);

- «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 9–11 декабря 2013 г.);

- XIII Всероссийская конференция молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск–Ангасолка, 2017 г.);

на **научных** семинарах в Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Московском авиационном институте, Бурятском государственном университете и Иркутском государственном университете.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, среди которых 9 статей [15, 16, 19, 20, 25, 33, 37, 64, 98], в том числе 4 работы в журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ [20, 25, 37, 98], 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [70, 71].

В совместных статьях [16, 19, 20, 37] личный вклад соискателя заключается в построении численных методов решения поставленных задач и проведении расчетов; в статьях [33] и [98] — анализ существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования и с несколькими нижними переменными пределами интегрирования соответственно. Представление в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования и анализ модели ЭЭС в статье [20] также проведен Ботороевой М.Н. самостоятельно. Результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации состав-

ляет 128 страницы с 9 рисунками, 10 таблицами и списком литературы из 116 наименований.

Во **введении** сформулирована цель диссертационного исследования, обоснована его актуальность, представлен обзор литературы по изучаемой проблеме, приведены краткое содержание диссертации и ее основные результаты.

**Первая глава** посвящена исследованию моделей РС в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования.

В параграфе 1.1 излагаются необходимые сведения из теории матричных пучков.

В параграфе 1.2 приводится классификация ИУВ и их систем, показано место рассматриваемых в диссертации ИАУ в данной классификации.

В параграфе 1.3 математическая модель В.М. Глушкова двухсекторной РС представляется в виде, ранее не встречающегося в литературе, линейного ИАУ с переменными пределами интегрирования.

В параграфе 1.4 проведен качественный анализ новой математической модели РС в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования: описаны характерные особенности; сформулирована и доказана теорема существования единственного непрерывного решения; приведен анализ технических характеристик РС, при которых модель имеет единственное непрерывное решение.

Параграф 1.5 посвящен численному решению линейных ИАУ с переменными пределами интегрирования: освещены сложности, связанные с построением численных методов их решения, приводится описание построения многошаговых методов, основанных на явных квадратурных формулах Адамса и экстраполяционных формулах.

В параграфе 1.6 представлено пошаговое описание алгоритма численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования построенными ме-

тодами, приведена блок схема и описаны особенности его реализации в среде Maple 13 для  $k = 1, 2, 3$ .

В параграфе 1.7 представлены результаты численных расчетов.

**Вторая глава** посвящена построению эффективных численных методов для решения систем жестких нелинейных ИУВ II рода

В параграфе 2.1 описывается постановка задачи.

Параграф 2.2 носит прикладной характер. Строится интегральный аналог дифференциальной модели колебания концентрации озона в атмосфере в виде жесткой системы нелинейных ИУВ II рода.

В параграфе 2.3 формулируются основные проблемы численного решения жестких нелинейных ИУВ II рода.

В параграфе 2.4 предложен безытерационный алгоритм, который объединяет «хорошие» качества метода, основанного на квадратурной формуле правых прямоугольников ( $L$ -устойчивость), и метода, основанного на квадратурной формуле трапеции (второй порядок точности).

В параграфе 2.5 приводятся результаты численных расчетов известных модельных примеров и сравнение их с результатами использования линеаризованных методов правых прямоугольников и метода, основанного на формуле трапеций.

**Третья глава** диссертационной работы посвящена исследованию конкретных моделей РС в области электроэнергетики.

В параграфе 3.1 приводится описание представленной в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования математической модели ЭЭС из трех типов неатомных и трех типов атомных электростанций, которая учитывает ограничения на топливо и капиталовложения, сроки жизни электростанций и динамику замены устаревших технологий новыми. Строится данная модель на основе модели [7], которая была представлена в виде системы шести урав-

нений, среди них ИУВ с переменными пределами интегрирования как I, так и II рода и алгебраические уравнения. В конце параграфа приводится анализ модели в виде условий на входные данные (технические характеристики системы), при которых ИАУ с переменными пределами интегрирования имеет единственное непрерывное решение (существует единственный прогноз ввода генерирующих мощностей при заданной динамике роста располагаемых мощностей).

В параграфе 3.2 приведено описание односекторной интегральной модели [10] ЭЭС России. В моделируемой системе отсутствует подсистема, отвечающая за ее совершенствование и развитие, что объясняется невозможностью аккумуляции производимой электроэнергии в больших количествах. Тем не менее на смену устаревшим генерирующим мощностям приходят новые извне. В математической интерпретации это означает присутствие в модели лишь неклассических ИУВ I рода, которые можно рассматривать как частный случай ИАУ (1.27) при  $n = 1$ .

Конкретные значения введенных генерирующих мощностей по годам с 1950 по 2016 г. были предоставлены сотрудниками Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН И.В. Сидлер и Е.В. Марковой.

Модель позволяет определить стратегию ввода новых мощностей, начиная с 2010 и до 2050 г. включительно, которые обеспечат заданные темпы роста располагаемой мощности при известных данных о вводах мощностей по годам в период с 1950 по 2009 г. включительно.

В параграфе 3.3 описан алгоритм численного решения ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования одношаговым методом. Приведена блок-схема алгоритма и описаны особенности его реализации в среде Maple 13. Сравнение полученного прогноза ввода генерирующих мощностей с реаль-



ными данными подтверждает адекватность модели, описанной в предыдущем параграфе, и эффективность предложенных численных методов.

**В заключении** представлены основные научные результаты.

В работе принята двойная нумерация для формул и тройная для теорем, лемм и примеров. Если осуществляется ссылка на формулу, то первая цифра обозначает номер главы, вторая – номер формулы. В ссылках на теорему, лемму или пример первая цифра обозначает номер главы, вторая – номер параграфа и третья цифра является номером теоремы, леммы или примера.

# ГЛАВА 1

## МОДЕЛЬ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ В ВИДЕ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Глава посвящена модели развивающихся систем в виде нового математического объекта – интегро-алгебраического уравнения с переменными пределами интегрирования. Будет описано построение модели, ее особенности и преимущества и проведено аналитическое исследование: описаны свойства, доказана теорема существования единственного непрерывного решения. Будут построены многошаговые методы численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования. Вначале приведем некоторые определения и факты теории матричных пучков, необходимые для дальнейшего изложения.

### 1.1 Матричные пучки

Приведем ряд известных фактов и понятий теории матричных пучков, которые в дальнейшем помогут выделить свойства ИАУ и описать сложности, связанные с их исследованием и численным решением.

**Определение 1.1.1** [40]. *Пучком матриц назовем сумму  $\lambda B + C$ , где  $\lambda$  – скалярный параметр,  $B$  и  $C$  – матрицы размера  $(m \times n)$ .*

**Определение 1.1.2** [40]. *Если  $m = n$  и  $\det(\lambda B + C) \not\equiv 0$ , то пучок матриц  $\lambda B + C$  называется регулярным.*

*В противном случае ( $m \neq n$  или  $\det(\lambda B + C) \equiv 0$ ) пучок называется сингулярным.*

Отметим важные свойства некоторых пучков матриц.

**Определение 1.1.3** [81]. Пучок матриц  $\lambda B(t) + C(t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке  $[0, T]$  (имеет индекс один, имеет простую структуру), если

$$\text{rank} B(t) = \text{deg}(\det(\lambda B(t) + C(t))) = m = \text{const} \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $\lambda$  – скалярный параметр, символ  $\text{deg}(\cdot)$  означает показатель степени многочлена  $(\cdot)$ , а операция  $\text{deg}(0)$  не определена.

Для иллюстрации вышеприведенных определений рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.1.1.** Пусть матрицы  $B(t)$  и  $C(t)$  имеют вид:

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{rank} B(t) = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Найдем определитель пучка матриц  $\lambda B(t) + C(t)$ :

$$\begin{aligned} \det(\lambda B(t) + C(t)) &= \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda t \\ \lambda t - t & \lambda t^2 + 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda t^2 + 1) - \lambda t(\lambda t - t) = \lambda(2t^2 + 1) + 1. \end{aligned}$$

Степень определителя пучка матриц

$$\text{deg}(\det(\lambda B(t) + C(t))) = 1,$$

следовательно, рассматриваемый пучок матриц  $\lambda B(t) + C(t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень» на отрезке  $[0, T]$ .

Рассмотрим другой пример.

**Пример 1.1.2.** Пусть матрицы  $B(t)$  и  $C(t)$  имеют вид:

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\text{rank}B(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, t], \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Найдем определитель пучка матриц  $\lambda B(t) + C(t)$ :

$$\begin{aligned} \det(\lambda B(t) + C(t)) &= \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & \lambda t + 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -\lambda t - 2. \end{aligned}$$

Степень определителя пучка матриц

$$\text{deg}(\det(\lambda B(t) + C(t))) = \begin{cases} 1, & t \in (0, t], \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Так как ранг  $B(t)$  и  $\text{deg}(\det(\lambda B(t) + C(t)))$  являются переменными, следовательно, рассматриваемый пучок матриц  $\lambda B(t) + C(t)$  не удовлетворяет критерию «ранг-степень» при  $t \in [0, T]$ .

**Пример 1.1.3.** Пусть матрицы  $B(t)$  и  $C(t)$  имеют вид:

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{t^2} \\ 3 & e^t \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\text{rank}B(t) = 1$ , а определитель пучка матриц  $\lambda B(t) + C(t)$ :

$$\begin{aligned} \det(\lambda B(t) + C(t)) &= \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{t^2} \\ 3 & e^t \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & e^{t^2} \\ 3 & \lambda + e^t \end{pmatrix} = 0 \cdot (\lambda + e^t) - 3 \cdot e^{t^2} = -3e^{t^2}. \end{aligned}$$

Степень определителя пучка матриц

$$\text{deg}(\det(\lambda B(t) + C(t))) = \text{deg}(-3e^{t^2}) = 0,$$

следовательно, рассматриваемый пучок матриц  $\lambda B(t) + C(t)$  не удовлетворяет критерию «ранг-степень», несмотря на то, что  $\text{rank}B(t)$  постоянен и равен 1.

**Определение 1.1.4** [38]. Матрица размерности  $(n \times m)$ , обозначаемая в дальнейшем как  $A^-(t)$ , называется полуобратной к  $(m \times n)$ -матрице  $A(t)$ , если для всех  $t$  из области определения она удовлетворяет уравнению

$$A(t)A^-(t)A(t) = A(t).$$

Полуобратную матрицу называют псевдообратной (обозначают  $A^+(t)$ ), если справедливы равенства

$$A^+(t)A(t)A^+(t) = A^+(t), (A^+(t)A(t))^T = A^+(t)A(t), (A(t)A^+(t))^T = A(t)A^+(t).$$

Полуобратная и псевдообратная матрицы определены в каждом значении  $t$  из области определения любой матрицы  $A(t)$  размерности  $(m \times n)$ . Псевдообратная матрица единственна  $\forall t \in [0, T]$ . Теории постоянных обобщенных обратных матриц посвящена монография [40]. Если матрица  $A(t)$  квадратная и неособенная, то  $A^{-1}(t) = A^+(t) = A^-(t)$ .

Введем обозначение  $W(t) = E - A(t)A^{-}(t)$ , где  $E$  – единичная матрица подходящей размерности. Тогда, в силу определения 1.1.4, имеем

$$W(t)A(t) = 0. \quad (1.1)$$

**Лемма 1.1.1** [27]. *Если пучок матриц  $\lambda A(t) + B(t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень», то*

$$\det(A(t) + W(t)B(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T];$$

$$\det(A(t) + W(t)(A'(t) + B(t))) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

**Лемма 1.1.2** [81]. *Если пучок матриц  $\lambda B(t) + C(t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень» на всем отрезке  $[0, T]$  и элементы матриц  $B(t)$  и  $C(t)$  принадлежат классу функций  $C_{[0, T]}^p$ , то существуют невырожденные матрицы  $P(t)$  и  $Q(t)$  с элементами из  $C_{[0, T]}^p$  такие, что*

$$P(t)B(t)Q(t) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t)C(t)Q(t) = \begin{pmatrix} J_m(t) & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix},$$

где  $J_m(t)$  –  $(m \times m)$ -матрица, а  $E_m$  – единичная матрица размерности  $m$ .

Из этой леммы вытекает блочное представление матрицы  $B(t)$ :

$$P(t)B(t) = \begin{pmatrix} B^1(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $B^1(t)$  –  $(m \times n)$ -матрица и  $\text{rank} B^1(t) = m$ ,  $0$  – нулевая матрица размерности  $((n - m) \times n)$ .

**Лемма 1.1.3** [27]. *Если пучок матриц  $\lambda B(t) + C(t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень» на всем отрезке  $[0, T]$  и матрицы  $B(t)$  и  $C(t)$  имеют*

блочный вид:

$$B(t) = \begin{pmatrix} B^1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} C^1(t) \\ C^2(t) \end{pmatrix},$$

где матрицы  $B^1(t)$  и  $C^1(t)$  имеют размеры  $(m \times n)$ ,  $0$  — нулевая  $((n - m) \times n)$ -матрица,  $C^2(t)$  —  $((n - m) \times n)$ -матрица и  $\text{rank} B^1(t) = m = \text{const}$ , то

$$\det \begin{pmatrix} B^1(t) \\ C^2(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Приведенные леммы будут использоваться в дальнейшем при доказательстве теоремы о существовании единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования.

Далее обозначим место ИАУ с переменными пределами интегрирования в классификации интегральных уравнений Вольтерра и их систем.

## 1.2 Классификация интегральных уравнений Вольтерра и их систем

Одним из первых результатов, который можно связать с интегральными уравнениями, являются формулы обращения Фурье [67]

$$r(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(t) \cos ts dt, \quad (1.2)$$

$$g(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} r(t) \cos ts dt. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) является решением интегрального уравнения (1.2), в котором  $g(s)$  — искомая, а  $f(s)$  — известная функция.

Другое интегральное уравнение

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = f(y)$$

с неизвестной функцией  $\varphi(y)$  и заданной функцией  $f(y)$  получил Н. Абель при изучении движения материальной точки под действием силы тяжести в вертикальной плоскости по некоторой кривой.

Основателем же классической теории интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) является Вито Вольтерра, который в 1896 г. в работе [116] рассматривал интегральное уравнение вида

$$Vx \equiv \int_0^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

где ядро  $K(t, s)$  и свободный член  $f(t)$  являются известными непрерывными функциями, определенными на треугольнике  $Q^* = \{(t, s)/0 \leq s \leq t \leq T\}$  (см. Рисунок 1.1) и отрезке  $[0, T]$  соответственно, а  $x(t)$  — искомой функцией. Сейчас (1.4) называют линейным интегральным уравнением Вольтерра I рода.

В. Вольтерра показал, что если  $K(t, t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$  и является достаточно гладким вместе с правой частью  $f(t)$ , то уравнение (1.4) имеет единственное непрерывное решение.

Интегральным уравнением Вольтерра II рода называют уравнение вида

$$x(t) = \vartheta \int_0^t K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad \vartheta = const, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

которое при любых значениях  $\vartheta$  и достаточно гладких  $K(t, s)$  и  $f(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , имеет единственное непрерывное решение, получаемое в виде ряда Ней-



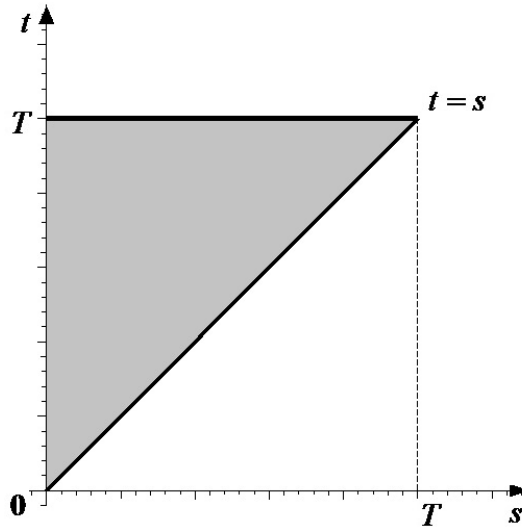


Рисунок 1.1 — Область определения ядра  $K(t, s)$  уравнения (1.4) (заштрихована)

мана по степеням параметра  $\vartheta$ . Действительно, если применить метод простой итерации и за стартовое значение принять свободный член  $x_0(t) = f(t)$ , то итерации  $x_n(t)$  можно выразить

$$x_n(t) = \int_0^t \mathfrak{R}_n(t, s) f(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots,$$

с помощью итерированных ядер

$$\mathfrak{R}_{n+1}(t, s) = \int_s^t \mathfrak{R}_1(t, \tau) \mathfrak{R}_n(\tau, s) d\tau, \quad n \geq 2,$$

где  $\mathfrak{R}_1(t, s) = K(t, s)$ .

Тогда решение можно представить с помощью резольвенты  $R(t, s, \vartheta) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \vartheta^\rho \mathfrak{R}_{\rho+1}(t, s)$  [53] в виде

$$x(t) = f(t) + \vartheta \int_0^t R(t, s, \vartheta) f(s) ds.$$

Интегральным уравнением Вольтерра III рода называют уравнение вида

$$g(t)x(t) = \vartheta \int_0^t K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad \vartheta = \text{const}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.6)$$

где  $K(t, t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$  и неубывающая функция  $g(t)$  такова, что существуют такие точки  $t_k \in [0, T]$ , что  $g(t_k) = 0$ . Точки  $t_k$  называют сингулярными, в них может не быть решения или проходить множество решений. В разные годы исследованием уравнений (1.6) занимались Н.А. Магницкий [58], Т.Т. Каракеев [46]. Краткий обзор работ по этой теме можно найти в [46].

Доопределив ядро  $K(t, s)$  для  $s > t$  и предположив, что  $K(t, s) = 0$  при  $t < s \leq T$ , получим, что уравнения (1.4), (1.5) являются частными случаями уравнений Фредгольма I и II родов соответственно:

$$\int_0^T K^*(t, s)x(s)ds = f(t), \quad (1.7)$$

$$x(t) = \vartheta \int_0^T K^*(t, s)x(s)ds + f(t), \quad \vartheta = \text{const}, \quad (1.8)$$

где

$$K^*(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ 0, & s > t. \end{cases}$$

Приведем некоторые наиболее известные нелинейные относительно неизвестной функции  $x(t)$  интегральные уравнения.

Уравнение вида

$$x(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds, \quad a \leq s \leq t \leq b, \quad (1.9)$$

называется уравнением Урысона. Его частным случаем является уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(t, s)F(s, x(s))ds, \quad a \leq s \leq t \leq b, \quad (1.10)$$

которое называется уравнением Гаммерштейна.

Если верхний предел интегрирования в уравнении (1.9) переменный, то получим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t K(t, s, x(s))ds, \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (1.11)$$

Представленные интегральные уравнения относятся ко второму роду. Если в уравнениях (1.9)-(1.11) в левой части вместо неизвестной функции  $x(t)$  будет некоторая известная функция, то уравнения будут называться нелинейными интегральными уравнениями первого рода.

Рассмотрим систему интегральных уравнений Вольтерра (СИУВ)

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.12)$$

где  $A(t)$  — матрица размерности  $(n \times n)$ ;  $K(t, s)$  — матрица размерности  $(n \times n)$ , задающая ядро интегрального уравнения;  $x(t)$ ,  $f(t)$  — искомая и известная  $n$ -мерные вектор-функции.

Принята следующая классификация [39, 91]:

а) если  $A(t)$  — тождественно нулевая матрица, то (1.12) называется системой интегральных уравнений Вольтерра I рода;

б) если  $\det A(t) \neq 0$ ,  $t \in [0, T]$ , то (1.12) называется системой интегральных уравнений Вольтерра II рода;

с) если  $\det A(t)$  обращается в нуль на дискретном множестве точек отрезка  $[0, T]$ , то (1.12) называется системой интегральных уравнений Вольтерра III рода;

d) если

$$A(t) \neq O, \det A(t) \equiv 0, \quad (1.13)$$

где  $O$  — нулевая матрица, то (1.12) называют интегральными аналогами дифференциально-алгебраических уравнений [81], СИУВ четвертого рода [28], вырожденными СИУВ [31] и интегро-алгебраическими уравнениями [94, 104]. Последнего термина мы и будем придерживаться.

Исследование ИАУ началось относительно недавно. ИАУ могут иметь как множество решений, так и не иметь их вовсе. В первой работе [81] были сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения ИАУ в виде теоремы и предложен численный метод решения, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников.

**Теорема 1.2.1.** [81] *Пусть для интегро-алгебраического уравнения (1.12) выполнены следующие условия:*

- 1)  $A(t) \in C^1_{[0, T]}$ ,  $f(t) \in C^1_{[0, T]}$ ,  $K(t, s) \in C^2_{\Delta}$ ,  $\Delta = \{0 \leq s \leq t \leq T\}$ ;
- 2) *пучок  $\lambda A(t) + K(t, t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень» на всем отрезке интегрирования;*
- 3)  $\text{rank} A(0) = \text{rank}(A(0|f(0)))$ .

*Тогда ИАУ (1.12) имеет единственное непрерывное решение.*

Прокомментируем условия теоремы. Гладкость входных данных — стандартные условия, необходимые при проведении доказательства теоремы. Если подставим в (1.12) значение  $t = 0$ , то получим систему  $A(0)x(0) = f(0)$ , разрешимость которой нам гарантирует третье условие. Второе условие теоремы можно интерпретировать как отсутствие на отрезке  $[0, T]$  сингулярных

точек, т.е. точек, в которых решение может не существовать или через которые проходит не единственное решение.

Если  $x(t)$  – скалярная функция, то второе условие теоремы 1.2.1 с условием (1.13) означает, что  $K(t, t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ , а третье условие теоремы примет вид  $f(0) = 0$ . Это классические условия существования и единственности решения ИУВ I рода в классе непрерывных функций (см., например, [7, 91]).

Если третье условие теоремы 1.2.1 является необходимым, то второе – только достаточным. Точки, в которых ранг матрицы  $A(t)$  изменяется, не всегда являются сингулярными. Покажем это на примерах.

**Пример 1.2.1.**

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, 1], \quad f(0) = 0.$$

Данная система имеет семейство решений

$$\begin{cases} y(t) = qt, \\ z(t) = f'(t), \end{cases}$$

где  $q$  – произвольное число.

В данном примере второе условие теоремы 1.2.1 нарушено в точке  $t = 0$ . В самом деле,

$$\lambda A(t) + K(t, t) = \lambda \begin{pmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \frac{t}{2} - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\text{rank} A(t) = \begin{cases} 0, t = 0, \\ 1, t \neq 0, \end{cases}$  является переменным и

$$\deg(\det(\lambda A(t) + K(t, t))) = \deg(\lambda \frac{t}{2} - 1) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \neq 0. \end{cases}$$

Степень определителя пучка матриц меняется в той же точке, что и ранг матрицы  $A(t)$ , т.е.  $t = 0$  является сингулярной.

**Пример 1.2.2.** Рассмотрим похожую систему

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, 1], \quad f(0) = 0.$$

Эта система имеет единственное решение

$$y(t) = f'(t), \quad z(t) = \frac{1}{2}f'(t) + \frac{t}{2}f''(t).$$

Выпишем пучок матриц

$$\lambda A(t) + K(t, t) = \lambda \begin{pmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \frac{t}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\text{rank} A(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \neq 0, \end{cases}$  однако

$$\deg(\det(\lambda A(t) + K(t, t))) = \deg(1) = 0.$$

Степень определителя пучка матриц не зависит от переменной  $t$ .

Если матричный пучок  $\lambda A(t) + K(t, t)$  не удовлетворяет критерию «ранг-степень», то исследование на предмет существования единственного решения в классе непрерывных функций наталкивается на большие трудности, так как мы не можем судить о разрешимости системы (1.12) с условием (1.13)

и эта система может иметь множество решений, несмотря на регулярность (сингулярность) пучка матриц. Покажем это на примерах.

**Пример 1.2.3.**

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, 1].$$

Эта система имеет множество решений  $\begin{cases} y(t) = c\sqrt{t}, \\ z(t) = 2, \end{cases}$  где  $c$  — произвольное число.

Выпишем определитель пучка матриц

$$\begin{aligned} \det(\lambda A(t) + K(t, t)) &= \det \left( \lambda \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda t - \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \lambda t^2 - \frac{3}{2}t. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что пучок матриц  $\lambda A(t) + K(t, t)$  является сингулярным, т.к. при  $t = 0$  определитель пучка матриц обращается в ноль.

**Пример 1.2.4.**

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} g'(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, 1], \quad g(0) = 0.$$

Легко проверить, что данный пример имеет множество решений вида  $y(t) = const, z(t) = g'(t)$ , однако пучок матриц  $\lambda A(t) + K(t, t)$  для данно-

го примера регулярный:

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \det \begin{pmatrix} \lambda t - 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda t - 1.$$

Здесь  $\text{rank} A(t) = 1$ , а  $\text{deg}(\det(\lambda A(t) + K(t, t))) = \begin{cases} 1, t \neq 0, \\ 0, t = 0. \end{cases}$

Далее будем рассматривать уравнения, у которых оба предела интегрирования являются переменными.

В 1977 г. в статье [41] В.М. Глушковым была предложена двухсекторная макроэкономическая модель, описываемая интегральными соотношениями с операторами Вольтерра (1). При этом функция  $a(t)$ , отражающая динамику отмирания или замены элементов РС, является неубывающей, что обусловлено необратимостью процесса отмирания элементов РС.

Классификация ИУВ и их систем с переменными как верхним, так и нижним пределами интегрирования аналогична.

Уравнение вида

$$\int_{a(t)}^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t_0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.14)$$

где ядро  $K(t, s)$ , свободный член  $f(t)$  и нижний предел интегрирования  $a(t)$  являются известными функциями, а  $x(t)$  — искомой функцией, называется линейным ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования или неклассическим ИУВ I рода, согласно терминологии, введенной А.С. Апарциным в [7].



Уравнение вида

$$x(t) = \vartheta \int_{a(t)}^t K(t, s)x(s)ds + f(t), \quad \vartheta = \text{const}, \quad t_0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.15)$$

называется линейным ИУВ II рода с переменными пределами интегрирования.

ИАУ с переменными как верхним, так и нижним пределами интегрирования вида

$$A(t)x(t) + \int_{a(t)}^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t_0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.16)$$

где  $A(t)$  — ненулевая матрица размерности  $(n \times n)$ , но  $\det A(t) \equiv 0$ ,  $K(t, s)$  — матрица размерности  $(n \times n)$ , задающая ядро интегрального уравнения,  $x(t)$  и  $f(t)$  — искомая и известная  $n$ -мерные вектор-функции соответственно,  $a(t)$  — известная неубывающая функция, будем называть ИАУ с переменными пределами интегрирования.

Основным отличием (1.16) от (1.12) является то, что нижний предел интегрирования является переменным и определяется неубывающей функцией  $a(t)$ , и могут потребоваться известные значения стартовой  $n$ -мерной вектор-функции

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [a(t_0), t_0]. \quad (1.17)$$

Оказалось, что перенесение результатов, известных для ИАУ, на случай ИАУ с переменными пределами интегрирования весьма нетривиально. Более того, исследование (1.16) существенно зависит от того, предполагается ли (как это принято в моделях Глушкова), что

$$a(t) < t \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (1.18)$$

либо в начальной точке  $t = t_0$

$$a(t_0) = t_0. \quad (1.19)$$

Весьма подробно особенности исследования и поведения численных методов решения неклассических ИУВ I рода в случаях (1.18) и (1.19) изложено в монографии [7]. Для демонстрации отличий приведем простые примеры в предположении, что выполнены все необходимые условия разрешимости.

**Пример 1.2.5.** ИАУ (1.12) при  $A(t) \equiv 0$ ,  $K(t, s) \equiv 1$ ,  $f(0) = 0$  и  $f(t) \in C_{[0, T]}^1$

$$\int_0^t x(s) ds = f(t)$$

имеет решение  $x(t) = f'(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

**Пример 1.2.6.** ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.16) при  $A(t) \equiv 0$ ,  $K(t, s) \equiv 1$  и заданной функцией  $x^0(t)$  на предыстории  $[t_0 - 1, t_0]$ . При  $a(t) = t - 1$  (случай (1.18))

$$\int_{t-1}^t x(s) ds = f(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Станем разыскивать решение, последовательно рассматривая промежутки.

При  $t \in [t_0, t_0 + 1)$  уравнение представляется в виде

$$\int_{t_0}^t x(s) ds = f(t) + \int_{t_0}^{t-1} x^0(s) ds,$$

продифференцировав его, получим

$$x^1(t) = f'(t) + x^0(t - 1), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + 1).$$

На следующем промежутке  $t \in [t_0 + 1, t_0 + 2)$  исходное уравнение можно представить в виде

$$\int_{t_0+1}^t x(s)ds = f(t) + \int_{t_0+1}^{t-1} x^1(s)ds.$$

Продифференцируем последнее уравнение:

$$x^2(t) = f'(t) + x^1(t-1), \forall t \in [t_0 + 1, t_0 + 2).$$

Подставив найденное ранее значение  $x^1(t)$ , будем иметь

$$x^2(t) = f'(t) + f'(t-1) + x^0(t-2), \forall t \in [t_0 + 1, t_0 + 2).$$

Продолжая процесс, получим решение в виде

$$x(t) = x^k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} f'(t-i) + x^0(t-k), t \in [t_0 + k - 1, t_0 + k],$$

где  $k = \overline{1, [T - t_0] + 1}$ ,  $[\cdot]$  – целая часть числа.

При  $a(t) = \frac{t}{2}$  (случай (1.19)) вся информация о решении содержится в самом уравнении

$$\int_{\frac{t}{2}}^t x(s)ds = f(t).$$

Дифференцируя его, получим

$$x(t) = f'(t) + x\left(\frac{t}{2}\right).$$

Далее, неизвестную функцию в правой части представим в виде суммы. Согласно последней формулы, найдем

$$x(t) = f'(t) + f'\left(\frac{t}{2}\right) + x\left(\frac{t}{4}\right).$$

Продолжая этот процесс, получим решение в виде бесконечного ряда:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} f'\left(\frac{t}{2^i}\right).$$

В диссертационной работе будет рассматриваться только частный случай (1.18), а именно

$$a(t) = t - c, \quad c > 0, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (1.20)$$

Также предполагается, что входные данные  $K(t, s)$ ,  $f(t)$  обладают необходимой степенью гладкости. Под решением уравнения (1.16) будем понимать любую непрерывную функцию  $x(t)$ , обращающую его в тождество и непрерывно стыкующуюся со стартовым значением (1.17) в начальной точке  $t = t_0$ , т.е. справедливо условие  $x(t_0) = x^0(t_0 - 0)$ .

Следует отметить, что перенесение результатов, известных для (1.12), на случай (1.16) является нетривиальным. К примеру, в случае ИУВ I рода (1.4)  $a(t) \equiv t_0$  и в точке  $t = t_0$  условие (1.18) нарушается, поэтому ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.16) нельзя назвать обобщением (1.12). С другой стороны, при определенной постановке задачи (1.16) ряд свойств, присущих ИАУ (1.4) (связанных с ИУВ I рода), может быть сохранен.

Так, будем полагать, что  $a'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$ , чтобы охватить и случай  $a'(t) \equiv 0$ , соответствующий ИАУ (1.12).

Также принципиальным моментом является определение решения в начальной точке отрезка  $[t_0, T]$ . Решение ИАУ (1.12) содержит в себе значение  $x(t_0)$ , которое в нашем понимании решения ИАУ с переменными пределами

интегрирования (1.16) должно совпасть с  $x^0(t_0 - 0)$ , поэтому предыстория (1.17) не содержала точку  $t_0$ , поскольку в противном случае задача станет переопределенной.

Характер стыковки функций  $x(t)$  и  $x^0(t)$  в точке  $t_0$  играет важную роль при исследовании гладкости решения на  $[t_0, T]$ . В случае ИАУ (1.12) гладкость  $x(t)$  является следствием гладкости  $f(t)$  и  $K(t, s)$ . В случае же (1.16) при сколь угодно гладких  $f(t)$ ,  $K(t, s)$ ,  $a(t)$  и  $x^0(t)$  функция  $x(t)$  не обязана быть даже непрерывной на  $[t_0, T]$ .

Далее построим модель РС в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.16) и проведем ее аналитическое исследование. При этом будем использовать вышеприведенные определения и описанные особенности ИАУ с переменными пределами интегрирования.

### **1.3 Представление двухсекторной модели В.М. Глушкова для развивающихся систем в виде интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования**

Теория моделирования РС является результатом развития и обобщения динамических макроэкономических моделей, предложенных В.М. Глушковым [42]. Новый класс моделей Глушкова представляется в виде системы интегральных уравнений, причем нижние пределы интегралов являются заданными или неизвестными функциями, которые интерпретируются как временные границы ликвидации устаревших технологий производства продуктов моделируемой системы.

Наиболее подробная интерпретация макроэкономических моделей Глушкова с позиций общей теории систем приведена в [83]. Рассмотрим

систему, состоящую из отдельных элементов, которые отличаются временем их создания и показателями эффективности выполнения функций. По функциональному признаку система разделяется на подсистемы, элементы которых выполняют однотипные внутренние и внешние функции. Внутренние функции направлены на обеспечение функционирования, совершенствование и развитие самой системы, например, производство новых элементов системы, повышение эффективности созданных элементов и т. п. Внешние функции системы связаны с выпуском некоторых внешних (по отношению к самой системе) продуктов.

Рассматриваемые интегральные модели описывают нестационарные системы с переменной структурой, под которой понимается распределение функционирующих элементов системы по времени создания, выполняемым функциям и эффективности их выполнения. Предполагается, что в систему вводятся новые эффективные элементы, которые производятся подсистемой совершенствования или поступают извне. При этом происходит ликвидация старых и неэффективных элементов системы.

Рассмотрим базовую двухсекторную модель РС В.М. Глушкова [42]. Она описывает систему, состоящую из двух подсистем:  $\mathcal{A}$  — подсистема совершенствования и  $\mathcal{B}$  — подсистема создания внешнего продукта. Новые продукты создаются внутри системы, не поступая извне. Введем следующие количественные характеристики системы:

$m(t)$  — общее количество новых элементов, создаваемых в единицу времени в момент  $t$ ;

$\alpha(t, s)$  — количество новых элементов, создаваемых в единицу времени в момент  $t$  одним элементом, созданного в момент  $s$  и функционирующего в  $\mathcal{A}$ ;

$y(t)$  — относительная доля созданных в момент  $t$  элементов, остающаяся в подсистеме  $\mathcal{A}$ ;

$a_1(t), a_2(t)$  — временные границы сворачивания устаревших элементов в подсистемах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно;

$\beta(t, s)$  — выпуск внешнего продукта в единицу времени в момента  $t$  одним элементом, созданным в момент  $s$  и функционирующим в  $\mathcal{B}$ ;

$p(t)$  — объем производства внешнего продукта в единицу времени в момент  $t$  (желаемый объем потребления);

$n(t)$  — количество элементов, функционирующих в моделируемой системе в момент  $t$ .

Будем считать, что созданные ранее момента  $a_1(t)$  или  $a_2(t)$  элементы в момент  $t$  не используются в системе, а созданные после используются на 100%, и временные границы  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  являются неубывающими функциями, т. е.  $a_1'(t) \geq 0, a_2'(t) \geq 0, t \in [t_0, T]$ .

Тогда двухсекторная модель РС может быть записана в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{a_1(t)}^t \alpha(t, s)y(s)m(s)ds, \\ p(t) &= \int_{a_2(t)}^t \beta(t, s)(1 - y(s))m(s)ds, \\ n(t) &= \int_{a_1(t)}^t y(s)m(s)ds + \int_{a_2(t)}^t (1 - y(s))m(s)ds, \\ 0 \leq y(t) \leq 1, \quad 0 \leq a_1(t) < t, \quad 0 \leq a_2(t) < t, \quad t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{1.21}$$

с начальными условиями  $a_1(t_0) = a_1^0 \geq 0, a_2(t_0) = a_2^0 \geq 0, y(s) \equiv y^0(s), m(s) = m^0(s), s \in [\min\{a_1(t_0), a_2(t_0)\}, t_0]$ .

Модель позволяет ставить различные задачи, которые согласно [83] можно разделить на две группы. Первой группой являются задачи идентификации модели, сущность которых состоит в определении функций  $\alpha(t, s)$  и  $\beta(t, s)$ .

К другой группе относятся задачи прогноза развития моделируемых систем. Сформулируем одну из них.

Введем замену переменных:

$$v(t) = y(t)m(t), \quad w(t) = (1 - y(t))m(t),$$

где  $v(t), w(t)$  — количество новых элементов системы, созданных в единицу времени в момент  $t$  для функционирования в подсистемах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно. При этом важно учесть, что

$$v(t) + w(t) = m(t).$$

Предположим, что временные границы сворачивания устаревших элементов известны, например, экспертно установлены. Тогда задачу (1.21) можно представить уже в виде системы линейных относительно неизвестных функций  $v(t), w(t), m(t), n(t)$  интегральных уравнений как первого, так и второго рода с переменными пределами интегрирования и алгебраического уравнения, а именно

$$\begin{aligned} v(t) + w(t) &= \int_{a_1(t)}^t \alpha(t, s)v(s)ds, \\ p(t) &= \int_{a_2(t)}^t \beta(t, s)w(s)ds, \\ n(t) &= \int_{a_1(t)}^t v(s)ds + \int_{a_2(t)}^t w(s)ds, \\ v(t) + w(t) &= m(t), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{1.22}$$

На предыстории задаются значения неизвестных функций:

$$\begin{aligned} v(t) &= v^0(t), \quad w(t) = w^0(t), \quad n(t) = n^0(t), \\ m(t) &= v^0(t) + w^0(t), \quad t \in [\min\{a_1(t_0), a_2(t_0)\}, t_0). \end{aligned} \tag{1.23}$$



Предыстория начинается с момента  $\min\{a_1(t_0), a_2(t_0)\}$ , когда вводится в действие самый старый из используемых в последующие моменты  $t > t_0$  элемент,  $t_0$  — начало моделирования.

Модель (1.21) состоит из уравнения воссоздания элементов системы, обеспечивающих ее внутреннюю функцию (рост фондов); уравнения производства внешнего продукта, обеспечивающих ее внешнюю функцию, и балансовых уравнений. Такая постановка задачи позволяет определить необходимую скорость ввода элементов системы (новое оборудование, ресурсы, рабочие места) в подсистемы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и общее количество функционирующих в моделируемой системе элементов в каждый момент времени  $t \in [t_0, T]$  для достижения желаемого объема производства внешнего продукта с учетом известных значений уже указанных характеристик на предыстории ( $t \in [\min\{a_1(t_0), a_2(t_0)\}, t_0)$ ) производительности труда и сроков сворачивания устаревших элементов.

Запишем систему (1.22) в виде

$$A(t)x(t) + \sum_{j=1}^2 \int_{a_j(t)}^t K_j(t, s)x_j(s)ds = f(t), t \in [t_0, T], \quad (1.24)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1(t, s) = \begin{pmatrix} -\alpha(t, s) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2(t, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(t, s) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_j(t) - j\text{-ая компонента вектора } x(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \\ m(t) \\ n(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что сроки сворачивания элементов системы совпадают, то задачу (1.22), (1.23) можно значительно упростить

$$\begin{aligned} v(t) + w(t) &= \int_{a(t)}^t \alpha(t, s)v(s)ds, \\ p(t) &= \int_{a(t)}^t \beta(t, s)w(s)ds, \\ n(t) &= \int_{a(t)}^t m(s)ds, \\ v(t) + w(t) &= m(t), \\ 0 \leq a(t) &< t, \quad t \in [t_0, T], \end{aligned} \tag{1.25}$$

начальные значения аналогичны (1.23).

Представим модель (1.25) в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.16) относительно вектор-функции  $x(t) = (v(t), w(t), m(t), n(t))^T$ , с заданными значениями на предыстории (1.23). При этом

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ K(t, s) &= \begin{pmatrix} -\alpha(t, s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t, s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Согласно классификации систем интегральных уравнений, приведенной в первом параграфе, можем сказать, что двухсекторная модель (1.25) РС описывается ИАУ с переменными пределами интегрирования, а более общий случай модели (1.22) описывается в виде уравнения (1.24), которое станем называть ИАУ с несколькими нижними пределами интегрирования.

Далее проведем аналитическое исследование построенных моделей: сформулируем и докажем теоремы существования единственного непрерывного решения и опишем ряд свойств ИАУ с переменными и несколькими переменными нижними пределами интегрирования.

## 1.4 Аналитическое исследование ИАУ с переменными пределами интегрирования

В данном параграфе рассматриваются ИАУ с переменными пределами интегрирования вида

$$A(t)x(t) + \int_{t-c}^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t - c \leq s \leq t \leq T, \quad (1.27)$$

где  $A(t)$  и  $K(t, s)$  — квадратные матрицы размерности  $n$ ,  $f(t)$  —  $n$ -мерная заданная вектор-функция,  $c$  — известная положительная постоянная величина. Поскольку оба предела интегрирования переменные, достаточно потребовать чтобы ядро — матрица  $K(t, s)$  — было определено в заштрихованной области Рисунка 1.2. Для данной системы заданы значения неизвестной вектор-функции  $x(t)$  на предыстории:

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0). \quad (1.28)$$

Матрица  $A(t)$  — тождественно вырожденная:

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (1.29)$$

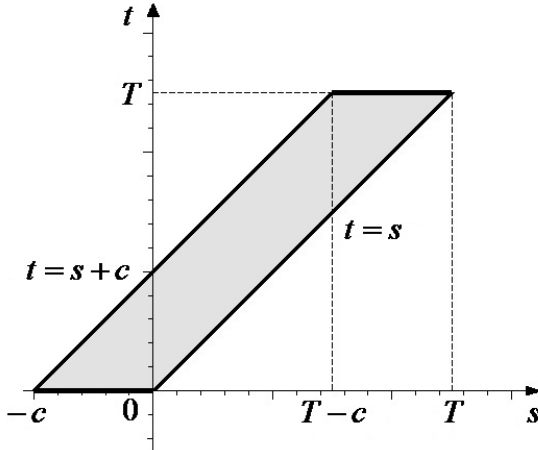


Рисунок 1.2 — Область определения ядра  $K(t, s)$  уравнения (1.27) (заштрихована)

Предполагается, что входные данные  $A(t)$ ,  $K(t, s)$ ,  $f(t)$  обладают необходимой степенью гладкости. Под решением задачи будем понимать любую непрерывную вектор-функцию  $x(t)$ , обращающую (1.27) в тождество и непрерывно стыкующуюся со стартовым значением (1.28), т.е.  $x(0) = x^0(-0)$ .

**Теорема 1.4.1.** Пусть для задачи (1.27), (1.28), (1.29) выполнены условия:

1) элементы матриц  $A(t)$ ,  $K(t, s)$  и вектор-функции  $f(t)$  являются непрерывно-дифференцируемыми функциями;

2) пучок  $\lambda A(t) + K(t, t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень»  $\forall t \in [0, T]$ ;

3)  $W(0)f'(0) = W(0) [K(0, 0)x^0(-0) - K(0, -c)x^0(-c) + A'(0)x^0(-0)] +$

$$+ W(0) \int_{-c}^0 K'_t(0, s)x^0(s)ds,$$

где  $W(0) = E - A(0)A^{-1}(0)$ ;

$$4) A(0)x^0(-0) = f(0) - \int_{-c}^0 K(0, s)x^0(s)ds.$$

Тогда задача (1.27), (1.28), (1.29) имеет непрерывное решение и это решение единственное.

*Доказательство.* Обозначим  $\Omega_0 = [-c, 0)$ ,  $\Omega_k = [(k-1)c, kc)$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,  $\Omega_{N+1} = [Nc, T]$ ,  $\bigcup_{k=1}^{N+1} \Omega_k = [0, T]$ , где  $N = \left[\frac{T}{c}\right]$ .

Пусть  $t \in \Omega_1 = [0, c)$ . Тогда исходную систему (1.27) можно записать в виде

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds = f(t) - \int_{t-c}^0 K(t, s)x^0(s)ds. \quad (1.30)$$

Действуя на (1.30) дифференциальным оператором  $W \frac{d}{dt}$ , (в силу первого условия теоремы это возможно), где  $W(t)$  — матрица из формулы (1.1), получим

$$\begin{aligned} & W(t) (A'(t) + K(t, t)) x(t) + W(t) \int_0^t K'_t(t, s)x(s)ds = \\ & = W(t) \left[ f'(t) + K(t, t-c)x^0(t-c) - \int_{t-c}^0 K'_t(t, s)x^0(s)ds \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Складывая последнюю систему с (1.30), получим

$$\begin{aligned} & [A(t) + W(t) (A'(t) + K(t, t))] x(t) + \int_0^t [W(t)K'_t(t, s) + K(t, s)] x(s)ds = f(t) + \\ & + W(t) [f'(t) + K(t, t-c)x^0(t-c)] - \int_{t-c}^0 [W(t)K'_t(t, s) + K(t, s)] x^0(s)ds. \end{aligned} \quad (1.32)$$

В силу второго условия теоремы и леммы (1.1.1)

$$\det[A(t) + W(t) (A'(t) + K(t, t))] \neq 0 \quad \forall t \in \Omega_1. \quad (1.33)$$

Уравнение (1.32) является ИУВ II рода, которое, в силу первого условия теоремы, имеет единственное непрерывное решение, обозначаемое в дальнейшем  $x^1(t)$ . Верхний индекс  $x^j(t)$  означает, что  $t \in \Omega_j$ . Итак, задача (1.27), (1.28), (1.29) имеет единственное непрерывное решение  $x^1(t)$  на  $\Omega_1$ .

Покажем, что вектор-функция  $x^1(t)$  непрерывно стыкуется со стартовым значением  $x^0(t)$  в начальной точке  $t = 0$ , то есть справедливо равенство

$$x^0(-0) = x^1(0). \quad (1.34)$$

Так как  $x^1(t)$  является решением уравнения (1.32), а значит, и уравнения (1.31), то имеем

$$\begin{aligned} & W(0) (A'(0) + K(0, 0)) x^1(0) = \\ & = W(0) \left[ f'(0) + K(0, -c)x^0(-c) - \int_{-c}^0 K'_t(0, s)x^0(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись третьим условием теоремы, получаем

$$\begin{aligned} & W(0) (A'(0) + K(0, 0)) x^1(0) = \\ & = W(0)K(0, 0)x^0(-0) - W(0)K(0, -c)x^0(-c) + \\ & + W(0)A'(0)x^0(-0) + W(0) \int_{-c}^0 K'_t(0, s)x^0(s)ds + \\ & + W(0)K(0, -c)x^0(-c) - W(0) \int_{-c}^0 K'_t(0, s)x^0(s)ds, \end{aligned}$$

или

$$W(0) (A'(0) + K(0, 0)) x^1(0) = W(0) (A'(0) + K(0, 0)) x^0(-0). \quad (1.35)$$

Так как  $x^1(t)$  также является решением уравнения (1.30), то имеем

$$A(0)x^1(0) = f(0) - \int_{-c}^0 K(0, s)x^0(s)ds.$$

По четвертому условию теоремы легко заметить, что

$$A(0)x^1(0) = A(0)x^0(-0).$$

Складывая последнее равенство с (1.35), получим

$$[A(0) + W(0) (A'(0) + K(0, 0))] x^1(0) = [A(0) + W(0) (A'(0) + K(0, 0))] x^0(-0).$$

Учитывая второе условия теоремы и лемму 1.1.1 получаем, что матрица  $[A(0) + W(0) (A'(0) + K(0, 0))]$  не вырождена, следовательно, равенство (1.34) справедливо.

Пусть  $t \in \Omega_2 = [c, 2c)$ . По аналогии с предыдущим случаем уравнение (1.27) представим в виде

$$A(t)x(t) + \int_c^t K(t, s)x(s)ds = f(t) - \int_{t-c}^c K(t, s)x^1(s)ds. \quad (1.36)$$

Действуя на (1.36) дифференциальным оператором  $(E + W \frac{d}{dt})$  (в силу первого условия теоремы это возможно), где  $E$  — единичный оператор (мат-

рица), а  $W$  — матрица из формулы (1.1), получим

$$\begin{aligned}
& [A(t) + W(t) (A'(t) + K(t, t))] x(t) + \int_c^t [W(t)K'_t(t, s) + K(t, s)] x(s) ds = f(t) + \\
& + W(t) [f'(t) + K(t, t - c)x^1(t - c)] - \int_{t-c}^c [W(t)K'_t(t, s) + K(t, s)] x^1(s) ds.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

В силу второго условия теоремы и леммы 1.1.1  $\det[A(t) + W(t) (A'(t) + K(t, t))] \neq 0 \quad \forall t \in \Omega_2$ , то есть (1.37) является системой ИУВ II рода, которая, учитывая первое условие теоремы, имеет единственное непрерывное решение, обозначаемое в дальнейшем  $x^2(t)$ . А значит и исходная задача (1.27), (1.28), (1.29) имеет единственное непрерывное решение  $x^2(t)$  на  $\Omega_2$ .

Для доказательства непрерывности единственного решения задачи (1.27), (1.28) с условием (1.29) на  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  покажем, что

$$x^1(c - 0) = x^2(c). \tag{1.38}$$

Из равенства (1.32) имеем

$$\begin{aligned}
& [A(c) + W(c) (A'(c) + K(c, c))] x^1(c - 0) + \int_0^c [W(c)K'_t(c, s) + K(c, s)] x^1(s) ds = \\
& = f(c) + W(c) [f'(c) + K(c, 0)x^0(-0)].
\end{aligned}$$

Из равенства (1.37) имеем

$$[A(c) + W(c) (A'(c) + K(c, c))] x^2(c) =$$



$$= f(c) + W(c) [f'(c) + K(c, 0)x^1(0)] - \int_0^c [W(c)K'_t(c, s) + K(c, s)] x^1(s)ds.$$

Из последних двух формул и (1.34) легко заметить, что (1.38) верно.

Таким образом, решение единственно и непрерывно на интервале  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = [0, 2c)$ .

Повторяя этот процесс  $N$  раз, заметим, что решением рассматриваемой задачи (1.27), (1.28), (1.29) является единственная непрерывная вектор-функция  $x^k(t)$ ,  $t \in \Omega_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ , причем непрерывность стыковки  $x^k(t)$  и  $x^{k+1}(t)$  в точке  $kt$ , где  $k = \overline{0, N}$ , обеспечивается третьим и четвертым условиями теоремы. *Доказательство закончено.*

Отметим, что для  $n = 1$  мы имеем интегральное уравнение I рода

$$\int_{t-c}^t K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.39)$$

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0),$$

с условием

$$K(t, t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.40)$$

Последний случай в деталях рассмотрен в [7]. Все условия теоремы, сформулированной в этой работе, совпадают с условием теоремы существования единственного решения для уравнения (1.39) с условием (1.40).

Выше было доказано, что условия теоремы 1.4.1 являются достаточными для существования единственного непрерывного решения рассматриваемой задачи. Приведем примеры, иллюстрирующие, что третье и четвертое условия теоремы 1.4.1 близки к необходимым.

Далее будет принято  $x(t) = (u(t), v(t))^T$ .

**Пример 1.4.1.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0, \quad t \in [-1, 0).$$

Учитывая стартовые значения неизвестных функций, из первого уравнения системы получаем

$$u(t) + \int_0^t v(s) ds = 0,$$

а второе уравнение данной системы сведется к уравнению

$$\int_0^t [u(s) + (t-s)v(s)] ds = 0,$$

эквивалентному первому уравнению. В этом можно убедиться, продифференцировав последнее уравнение по переменной  $t$ . Данная система имеет множество решений:

$$u(t) = -\frac{Ct^{k+1}}{k+1}, \quad v(t) = Ct^k \quad k \geq 0, \quad \forall C = const, \quad t \in [0, 1].$$

При этом

$$\text{rank}A(t) = 1 = const,$$

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = -1,$$

второе условие теоремы 1.4.1 нарушено, поскольку

$$\deg(-1) = 0 \neq \text{rank}A(t).$$

**Пример 1.4.2.**

$$\begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0, \quad t \in [-1, 0).$$

Ранг матрицы  $A(t)$  является постоянным и равен 1, но степень характеристического многочлена пучка матриц  $\lambda A(t) + K(t, t)$  непостоянна. В самом деле,

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \lambda(2t - 1) - 3,$$

$$\deg \det(\lambda(2t - 1) - 3) = \begin{cases} 0, & t = \frac{1}{2}, \\ 1, & t \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, точка  $t = \frac{1}{2}$  является сингулярной и, как нетрудно убедиться, через нее проходит множество решений

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \varkappa\sqrt{2t-1}, & t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad v(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ -\varkappa\sqrt{2t-1}, & t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где  $\varkappa$  — любое число.

Следующий пример иллюстрирует, что правая часть (1.27) должна удовлетворять третьему и четвертому условиям теоремы 1.4.1.

**Пример 1.4.3.**

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3],$$

$$u(t) = u^0(t) = 0, \quad v(t) = v^0(t) = 0, \quad t \in [-1, 0).$$

**а)** Пусть  $\psi(t) \equiv 0$ ,  $a = -1$ ,  $\varphi(t) = t$ .

Входные данные не удовлетворяют третьему условию теоремы 1.4.1. Действительно, взяв в качестве  $W(t)$  матрицу

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

должны получить равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

которое несправедливо.

Приведем точное решение данного уравнения. Для этого воспользуемся методом шагов (см., например, [66]). Пусть  $t \in [0, 1)$ , тогда можем записать систему

$$\begin{cases} u(t) = v(t), \\ \int_{t-1}^0 v^0(s)ds + \int_0^t v(s)ds = t, \quad t \in [0, 1). \end{cases}$$

Получим решение  $v^1(t)$  на первом промежутке  $[0, 1)$  (верхний индекс  $v^j(t)$  и  $u^j(t)$  означает, что  $t \in [j - 1, j)$ ):

$$\int_0^t v^1(s)ds = t \Rightarrow v^1(t) = 1, \quad t \in [0, 1).$$

Рассмотрим следующий промежуток  $t \in [1, 2)$ . Второе уравнение системы примет вид

$$\int_{t-1}^1 v^1(s)ds + \int_1^t v^2(s)ds = t.$$

Подставим найденное ранее значение  $v^1(t)$ , вычислим интеграл, тогда

$$\int_1^t v^2(s)ds = 2t - 2.$$

Дифференцируем обе части уравнения и находим решение на втором промежутке:

$$v^2(t) = 2, \quad t \in [1, 2).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим разрывное решение вида

$$u(t) = v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1), \\ 2, & t \in [1, 2), \\ 3, & t \in [2, 3), \\ 4, & t = 3. \end{cases}$$

**б)** Пусть  $\psi(t) \equiv 0$ ,  $a = -1$ ,  $\varphi(t) = e^t$ .

В этом случае из второго уравнения системы, учитывая стартовые значения неизвестных функций, получаем

$$\int_0^t v(s) ds = e^t.$$

Это уравнение неразрешимо в классе непрерывных функций.

Убедимся, что четвертое условие теоремы 1.4.1 не выполняется. Действительно, в левой части равенства имеем ноль-вектор, а в правой части интегральное слагаемое обращается в ноль и остается вектор с ненулевым элементом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_{-1}^0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

в) В случае, когда  $\psi(t) = 1$ ,  $a = 0$ ,  $\varphi(t) \equiv 0$  также нарушается четвертое условие. Несмотря на то, что решение существует:

$$\begin{cases} u(t) = 1, & t \in [0, 3], \\ v(t) = 0, & t \in [0, 3], \end{cases}$$

его значения в начальной точке  $t = 0$  не совпадает со значением стартовой функции в той же точке.

г) Пусть  $\psi(t) \equiv 0$ ,  $a = -1$ . Если  $\varphi(t)$  — непрерывно-дифференцируемая функция и  $\varphi(0) = \varphi'(t)|_{t=0} = 0$ , то данная задача имеет единственное непрерывное решение  $u(t) = v(t) = \varphi'(t)$ .

Вернемся к модели РС (1.16), (1.26) с заданными значениями на предыстории (1.23). Получим условия на количественные характеристики модели, при которых она будет иметь единственное и непрерывное решение.

Покажем, что пучок матриц  $\lambda A(t) + K(t, t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень». Действительно, ранг матрицы  $A(t)$  равен трем. Степень определителя пучка матриц

$$\begin{aligned} \deg(\det(\lambda A(t) + K(t, t))) &= \deg \begin{vmatrix} \lambda + \alpha(t, t) & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t, t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \deg(\lambda^3 \beta(t, t) - \lambda^2 \beta(t, t) \alpha(t, t)) \end{aligned}$$

также будет постоянной и равной трем, если  $\beta(t, t) \neq 0$ . Если вспомнить смысл  $\beta(t, s)$  (количество внешнего продукта, создаваемого в момент  $t$  одним элементом системы, созданным в момент  $s$ ), то выражение  $\beta(t, t) = 0$  означает, что все элементы системы, созданные в момент  $t$ , уже недееспособные, а это противоречит здравому смыслу. В реальной ситуации это эквивалентно

тому, что на предприятии было установлено неработающее оборудование, при операции был пересажен мертвый орган или на работу был принят человек, который заведомо не будет появляться на рабочем месте. Предположим, что в течение моделируемого периода таких внештатных ситуаций не возникает. Тогда задача (1.16), (1.23), (1.26) имеет единственное непрерывное решение.

Характеристикой сложности рассматриваемых задач является понятие индекса.

**Определение 1.4.1** [82]. *Минимальное число  $l$ , при котором существует дифференциальный оператор*

$$\Omega_l = \sum_{j=0}^l W_j(t) \left( \frac{d}{dt} \right)^j,$$

где  $W_j$  —  $(n \times n)$ -матрицы с непрерывными элементами, назовем индексом системы (1.12), если

$$\Omega_l \circ \left( A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds \right) = x(t) + \int_0^t \check{K}(t, s)x(s)ds,$$

где  $\check{K}(t, s)$  — некоторая матрица с непрерывными элементами.

В 1983 году А.С. Апарциным было введено понятие степени неустойчивости (степени некорректности) для интегральных уравнений (см. [5, 7]).

**Определение 1.4.2** [5, 7]. *Интегральное уравнение (1.7) принадлежит к типу  $V(\xi)$ ,  $\xi \in [0, \infty)$ , если справедливо представление*

$$V^{-1} = B\mathcal{D},$$

где  $B$  — некоторый взаимно однозначный ограниченный из  $C_{[t_0, T]}$  в  $C_{[t_0, T]}$  оператор,  $\mathcal{D}$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $\xi$ .

**Определение 1.4.3** [5,7]. Если интегральное уравнение (1.7) принадлежит к типу  $V(\xi)$ , то число  $\xi$  назовем степенью неустойчивости решения (1.7). Если два интегральных уравнения I рода принадлежат к типу  $V(\xi_1)$  и  $V(\xi_2)$  соответственно, то будем говорить, что неустойчивость решения первой задачи сильнее (слабее) неустойчивости решения второй, если  $\xi_1 > \xi_2$  ( $\xi_1 < \xi_2$ ). При  $\xi_1 = \xi_2$  обе задачи равносильны в смысле неустойчивости их решений.

Согласно определению 1.4.2, ИУВ I рода (1.4) с условиями  $K(t, t) \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , относится к типу  $V(1)$  [7]. Т.е. существует дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathcal{D} = \frac{1}{K(t, t)} \frac{d}{dt},$$

переводящий это уравнение в ИУВ II рода (1.5).

В этом смысле определения 1.4.1 и 1.4.2 для ИУВ I рода (1.4) эквивалентны.

**Лемма 1.4.1** [82]. Индекс ИАУ равен единице тогда и только тогда, когда пучок матриц  $\lambda A(t) + K(t, t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень».

Поскольку ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.27) при заданных стартовых значениях (1.28) могут быть представлены в виде

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds = f(t) - \int_{t-c}^0 K(t, s)x^0(s)ds, \quad 0 \leq s \leq t \leq c, \quad (1.41)$$

то при достаточно гладкой правой части

$$f(t) - \int_{t-c}^0 K(t, s)x^0(s)ds \in C^l_{[t-c, 0]}$$



определение 1.4.1 и лемма 1.4.1 справедливы и для ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.27).

Для иллюстрации определения 1.4.1 приведем пример, аналогичный примеру для ИАУ с постоянным нижним пределом интегрирования (1.12), (1.13) из [29].

**Пример 1.4.4.** Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-c}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, c],$$

$$u^0(t) = f_1(t), v^0(t) = 0, \quad t \in [-c, 0), \quad d \neq 1 - \text{const.}$$

При любых  $f_1(t) \in C^1_{[t-c, c]}$ ,  $f_2(t) \in C^2_{[t-c, c]}$  таких, что  $f_2(0) = cf_1(0)$ ,  $f_1(0) = -\frac{1}{1-d}f_2'(0)$  система имеет единственное решение.

Найдем его, представив уравнение в виде системы двух интегральных уравнений

$$u(t) + \int_0^t v(s)ds = f_1(t) - \int_{t-c}^0 v^0(s)ds,$$

$$\int_0^t u(s)ds + d \int_0^t (t-s)v(s)ds = f_2(t) - \int_{t-c}^0 u^0(s)ds - d \int_{t-c}^0 (t-c)v^0(s)ds.$$

Подставив значения  $u^0(t)$  и  $v^0(t)$  и дифференцируя второе уравнение по  $t$ , получим

$$u(t) = f_1(t) - \int_0^t v(s)ds,$$

$$u(t) = f_2'(t) + f_1(0) - d \int_0^t v(s)ds.$$

Дифференцируя разность последних уравнений, найдем

$$v(t) = \frac{1}{1-d}(f_1'(t) - f_2''(t)), \text{ тогда } u(t) = f_1(t) - \frac{1}{1-d}(f_1(t) - f_2'(t) - f_1(0)).$$

В качестве оператора  $\Omega_2$  можно взять

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^2.$$

Данный оператор переводит исходное ИАУ в СИУВ II рода

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5(1-d) \\ 1,5 & 0,5(d-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1-0,5d \\ 1 & d(t-s)+1,5d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(t) + 0,5(f_1'(t) - f_2'(t) - f_2''(t) - f_1'(t-c)) \\ f_2(t) + \int_0^{t-c} f_1(s)ds + 0,5(3f_2'(t) - f_1'(t) + 3f_1(t-c) + f_2''(t) + f_1'(t-c)) \end{pmatrix},$$

$$t \in [0, c].$$

Заметим, что рассматриваемые нами задачи имеют индекс «один», т.е. существует дифференциальный оператор

$$\Omega_1 = E + (E - A(t)A^+(t))\left(\frac{d}{dt}\right),$$

переводящий уравнение (1.41) в СИУВ II рода [26]. Здесь  $A^+(t)$ — псевдообратная матрица к  $A(t)$  (см. определение 1.1.4).

Способы построения оператора  $\Omega_l$  рассмотрены в [29, 82].

Особенностью рассматриваемых задач является их некорректность. То есть, если исходная задача (1.27), (1.28), (1.29) имеет единственное решение, то возмущенная задача

$$\tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \int_{t-c}^t \tilde{K}(t, s)\tilde{x}(s)ds = \tilde{f}(t), \quad t \in [0, T],$$

может не иметь решения или  $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \rightarrow \infty$  при  $\delta_i \rightarrow 0$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , где  $\|\tilde{A}(t) - A(t)\| \leq \delta_1$ ,  $\|\tilde{K}(t, s) - K(t, s)\| \leq \delta_2$ ,  $\|\tilde{f}(t) - f(t)\| \leq \delta_3$ , а

$$\|*\| = \max_{t \in [0, T]} |*(t)|.$$

Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 1.4.5.** Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$$u^0(t) = 0, \quad v^0(t) = 0, \quad t \in [-1, 0).$$

При  $d = 1$  данная система имеет семейство решений  $u(t) = \varphi(t)$ ,  $v(t) = -\varphi'(t)$ , где  $\varphi(t)$  — любая функция из класса  $C_{[0,1]}^1$ .

**Пример 1.4.6.** Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 2-t \\ \delta_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$$u^0(t) = 1, \quad v^0(t) = 0, \quad t \in [-1, 0).$$

При  $\delta_1(t) = \delta_2(t) \equiv 0$  данная система имеет единственное решение  $u(t) = e^{-t}$ ,  $v(t) = 0$ .

При  $\delta_1(t) = \delta_1 \neq 0$ ,  $\delta_2(t) = \delta_2 \neq 0$  система имеет решение

$$\tilde{u}(t) = e^{-t}, \quad \tilde{v}(t) = \frac{\delta_2}{\delta_1} e^{-\frac{t}{\delta_1}}.$$

Таким образом, если  $\delta_1 \rightarrow -0$ , то  $\|\tilde{v}(t)\|_C \rightarrow \infty$ .

Если  $\delta_1(t) \equiv 0$ ,  $\delta_2(t) = \delta \sin \frac{t}{\delta^2}$  ( $\|\delta_2\|_C = \delta$ ), то

$$\tilde{u}(t) = e^{-t}, \quad \tilde{v}(t) = \frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2},$$

т.е.  $\|\tilde{v}(t)\|_C \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**Пример 1.4.7.** Рассмотрим систему при  $t \in [0, 1]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} - \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \delta_4 + (t-1)^2 \\ (1+\delta_3)(t-1)^2 \end{pmatrix},$$

с известными значениями  $u^0(t) = v^0(t) = 2t$  на предыстории  $t \in [-1, 0)$ , где  $\delta_4$  и  $\delta_3$  — скалярные малые параметры.

При  $\delta_3 = \delta_4 \equiv 0$  данная система имеет только тривиальное решение, но если  $\delta_3 \neq 0, \delta_4 \neq 0$ , то решение данной системы примет вид:

$$\tilde{u}(t) = \delta_4 e^{-\frac{t}{\delta_3}}, \tilde{v}(t) = -\frac{\delta_4}{\delta_3} e^{-\frac{t}{\delta_3}}.$$

Пример 1.4.6 относится к классическим некорректно поставленным задачам: нахождение полуобратных матриц и восстановление производной. В примере 1.4.7 «хорошие» возмущения не меняют ранга матрицы  $A(t)$ , но меняют структуру матричного пучка:

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{vmatrix} = \lambda \delta_3 - 1.$$

Степень определителя пучка матриц зависит от значения  $\delta_3$ :

$$\deg(\lambda \delta_3 - 1) = \begin{cases} 1, & \delta_3 \neq 0, \\ 0, & \delta_3 = 0. \end{cases}$$

Здесь нарушается второе условие теоремы 1.4.1 — условие «ранг-степень», отвечающее за отсутствие сингулярных точек в решении. И решение возмущенной задачи (см. выше пример 1.4.7.) при  $\delta_3 \rightarrow 0$  не существует.

Далее сформулируем условия существования единственного непрерывного решения более общей задачи.

Рассмотрим задачу

$$A(t)x(t) + \sum_{j=1}^n \int_{t-c_j}^t K_j(t, s)x_j(s)ds = f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (1.42)$$

где  $A(t)$  — квадратная матрица размерности  $n$ , удовлетворяющая условию

$$(1.13), \quad K_j(t, s) = \begin{pmatrix} K_{1j}(t, s) \\ \dots \\ K_{nj}(t, s) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}, \quad f(t) \text{ — известная, а } x(t) \text{ — иско-$$

мая  $n$ -мерные вектор-функции,  $c_j$  — известные положительные постоянные величины. Для данного уравнения заданы стартовые значения

$$x(t) = x^0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \dots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\max_j c_j, 0), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.43)$$

Из столбцов  $K_j(t, s)$  образуем квадратную матрицу  $K(t, s) = (K_1(t, s), \dots, K_n(t, s))$  и сформулируем условия существования единственного непрерывного решения задачи (1.42), (1.43), (1.13).

### Теорема 1.4.2.

Пусть для задачи (1.42), (1.43), (1.13) выполнены условия:

1) элементы матриц  $A(t)$ ,  $K(t, s)$  и вектор-функции  $f(t)$  являются непрерывно-дифференцируемыми функциями;

2) пучок  $\lambda A(t) + K(t, t)$  удовлетворяет критерию «ранг-степень»;

3)  $W(0)f'(0) = W(0) [(K(0, 0) + A'(0))x^0(-0)] -$

$$-W(0) \sum_{j=1}^n K_j(0, -c_j)x_j^0(-c_j) + W(0) \sum_{j=1}^n \int_{-c}^0 (K_j(0, s))'_t x_j^0(s)ds,$$

где  $W(0) = E - A(0)A^{-}(0)$ ;

$$4) A(0)x^0(-0) = f(0) - \sum_{j=1}^n \int_{-c_j}^0 K_j(0, s)x_j^0(s)ds.$$

Тогда данная задача имеет единственное непрерывное решение.

*Доказательство.* Для простоты изложения положим  $c_1 = \min_j c_j$  и  $c_n = \max_j c_j, j = \overline{1, n}$ .

Расположим в порядке возрастания элементы  $pc_j, p = 1, 2, \dots, r$ , и получим некоторую числовую последовательность, которая в самом простом случае будет иметь следующий вид:

$$c_1 < c_2 < \dots < c_n < 2c_1 < 2c_2 < \dots < rc_n < T,$$

но последовательность может иметь и другой вид. Все зависит от конкретных значений  $c_j, j = \overline{1, n}$ .

Для простоты обозначим элементы последовательности  $\alpha_k = pc_j, k = \overline{1, g}, g = nr, p = \overline{1, r}, j = \overline{1, n}$  и  $\alpha_g = rc_n$ .

Обозначим  $\Omega_0 = [-c_n, 0), \Omega_1 = [0, \alpha_1), \Omega_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k), \Omega_{g+1} = [\alpha_g, T], \bigcup_{k=1}^{g+1} \Omega_k = [0, T]$ .

Пусть  $t \in \Omega_1 = [0, \alpha_1)$ . Тогда исходную систему (1.42) можно записать в виде

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t, s)x(s)ds = f(t) - \sum_{j=1}^n \int_{t-c_j}^0 K_j(t, s)x_j^0(s)ds. \quad (1.44)$$

Действуя на (1.44) дифференциальным оператором  $W \frac{d}{dt}$ , (в силу первого условия теоремы это возможно), где  $W$  — матрица из формулы (1.1), получим

$$W(t) (A'(t) + K(t, t)) x(t) + W(t) \int_0^t K'_t(t, s)x(s)ds =$$

$$= W(t) \left[ f'(t) + \sum_{j=1}^n \left( K_j(t, t - c_j) x_j^0(t - c_j) - \int_{t-c_j}^0 (K_j(t, s))'_t x_j^0(s) ds \right) \right]. \quad (1.45)$$

Складывая последнюю систему с (1.44), получим

$$\begin{aligned} [A(t) + W(t) (A'(t) + K(t, t))] x(t) + \int_0^t [W(t) K'_t(t, s) + K(t, s)] x(s) ds = f(t) + \\ + W(t) \left[ f'(t) + \sum_{j=1}^n K_j(t, t - c_j) x_j^0(t - c_j) \right] - \\ - \sum_{j=1}^n \int_{t-c_j}^0 [W(t) (K_j(t, s))'_t + K_j(t, s)] x_j^0(s) ds. \end{aligned} \quad (1.46)$$

В силу второго условия теоремы и леммы 1.1.1

$$\det[A(t) + W(t) (A'(t) + K(t, t))] \neq 0 \quad \forall t \in \Omega_1. \quad (1.47)$$

Уравнение (1.46) является ИУВ II рода, которое, в силу первого условия теоремы, имеет единственное непрерывное решение  $t \in \Omega_1$ , обозначаемое в дальнейшем  $x^1(t) = (x_1^1(t), \dots, x_n^1(t))^T$ . Итак, задача (1.42), (1.43), (1.13) имеет единственное непрерывное решение  $x^1(t)$  на  $\Omega_1$ .

Покажем, что вектор-функция  $x^1(t)$  непрерывно стыкуется со стартовым значением  $x^0(t)$  в начальной точке  $t = 0$ , то есть справедливо равенство

$$x^0(-0) = x^1(0). \quad (1.48)$$

Так как  $x^1(t)$  является решением уравнения (1.46), а значит и уравнения (1.45), то имеем

$$W(0) (A'(0) + K(0, 0)) x^1(0) =$$

$$= W(0) \left[ f'(0) + \sum_{j=1}^n \left( K_j(0, -c_j)x_j^0(-c_j) - \int_{-c_j}^0 (K_j(0, s))'_t x_j^0(s) ds \right) \right].$$

Воспользовавшись третьим условием теоремы, получаем

$$W(0) (A'(0) + K(0, 0)) x^1(0) = W(0) (A'(0) + K(0, 0)) x^0(-0). \quad (1.49)$$

Так как  $x^1(t)$  также является решением уравнения (1.44)  $\forall t \in \Omega_1$ , то имеем

$$A(0)x^1(0) = f(0) - \sum_{j=1}^n \int_{-c_j}^0 K_j(0, s)x_j^0(s) ds.$$

По четвертому условию теоремы легко заметить, что

$$A(0)x^1(0) = A(0)x^0(-0).$$

Складывая последнее равенство с (1.49) получим

$$[A(0) + W(0) (A'(0) + K(0, 0))] x^1(0) = [A(0) + W(0) (A'(0) + K(0, 0))] x^0(-0).$$

В силу второго условия теоремы и леммы 1.1.1, матрица  $[A(0) + W(0) (A'(0) + K(0, 0))]$  невырождена, следовательно равенство (1.48) справедливо.

Обозначим единственное непрерывное решение уравнения (1.42) на  $\Omega_0 \cup \Omega_1$

$$\tilde{x}^1(t) = \begin{cases} x^0(t), & t \in \Omega_0, \\ x^1(t), & t \in \Omega_1. \end{cases}$$

Верхний индекс  $x^j(t)$  означает, что  $t \in \Omega_j$ , а  $\tilde{x}^j(t)$ , что  $t \in \bigcup_{k=0}^j \Omega_k$ .



Пусть  $t \in \Omega_2 = [\alpha_1, \alpha_2)$ . По аналогии с предыдущим случаем уравнение (1.42) представим в виде

$$A(t)x(t) + \int_{c_1}^t K(t, s)x(s)ds = f(t) - \sum_{j=1}^n \int_{t-c_j}^{c_1} K_j(t, s)\tilde{x}_j^1(s)ds. \quad (1.50)$$

Действуя на (1.50) дифференциальным оператором  $(E + W \frac{d}{dt})$  (в силу первого условия теоремы это возможно), где  $E$  — единичный оператор (матрица), а  $W$  — матрица из формулы (1.1), получим

$$\begin{aligned} [A(t) + W(t)(A'(t) + K(t, t))]x(t) + \int_{c_1}^t [W(t)K'_t(t, s) + K(t, s)]x(s)ds = \\ f(t) + W(t) \left[ f'(t) + \sum_{j=1}^n K_j(t, t - c_j)\tilde{x}_j^1(t - c_j) \right] - \\ - \sum_{j=1}^n \int_{t-c_j}^{c_1} [W(t)(K_j(t, s))'_t + K_j(t, s)]\tilde{x}_j^1(s)ds. \end{aligned} \quad (1.51)$$

В силу второго условия теоремы и леммы 1.1.1

$\det[A(t) + W(t)(A'(t) + K(t, t))] \neq 0 \quad \forall t \in \Omega_2$ , то есть (1.51) является ИУВ II рода, которое, в силу первого условия теоремы, имеет единственное непрерывное решение  $t \in \Omega_2$ , обозначаемое в дальнейшем  $x^2(t) = (x_1^2(t), \dots, x_n^2(t))^T$ . А значит и исходная задача (1.42), (1.43), (1.13) имеет единственное непрерывное решение  $x^2(t)$  на  $\Omega_2$ .

Для доказательства непрерывности единственного решения задачи (1.42), (1.43) с условием (1.13) на  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  покажем, что

$$\tilde{x}^1(c_1 - 0) = x^2(c_1). \quad (1.52)$$

Из равенства (1.46) имеем

$$\begin{aligned}
& [A(c_1) + W(c_1) (A'(c_1) + K(c_1, c_1))] \tilde{x}^1(c_1 - 0) + \\
& + \int_0^{c_1} [W(c_1)K'_t(c_1, s) + K(c_1, s)] \tilde{x}^1(s) ds = \\
& = f(c_1) + W(c_1) \left[ f'(c_1) + \sum_{j=1}^n K_j(c_1, c_1 - c_j) \tilde{x}_j^1(c_1 - c_j) \right] - \\
& - \sum_{j=1}^n \int_{c_1 - c_j}^0 [W(c_1)(K_j(c_1, s))'_t + K_j(c_1, s)] \tilde{x}_j^1(s) ds.
\end{aligned}$$

Из равенства (1.51) имеем

$$\begin{aligned}
& [A(c_1) + W(c_1) (A'(c_1) + K(c_1, c_1))] x^2(c_1) = \\
& = f(c_1) + W(c_1) \left[ f'(c_1) + \sum_{j=1}^n K_j(c_1, c_1 - c_j) \tilde{x}_j^1(c_1 - c_j) \right] - \\
& - \sum_{j=1}^n \int_{c_1 - c_j}^{c_1} [W(c_1)(K_j(c_1, s))'_t + K_j(c_1, s)] \tilde{x}_j^1(s) ds.
\end{aligned}$$

Из последних двух формул и (1.48) легко заметить, что (1.52) верно.

Таким образом функции  $\tilde{x}_j^1(t)$  и  $\tilde{x}_j^2(t)$  непрерывно стыкуются в точке  $t = c_1$  и функция

$$\tilde{x}^2(t) = \begin{cases} x^0(t), & t \in \Omega_0, \\ x^1(t), & t \in \Omega_1, \\ x^2(t), & t \in \Omega_2, \end{cases}$$

является единственным непрерывным решением задачи (1.42), (1.43), (1.13) на интервале  $\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ .

Повторяя этот процесс  $g + 1$  раз, заметим, что решением рассматриваемой задачи (1.42), (1.43), (1.13) будет являться единственная непрерывная вектор-функция  $\tilde{x}^k(t)$ ,  $t \in \bigcup_{k=1}^{g+1} \Omega_k$ , причем непрерывность стыковки функций  $\tilde{x}^k(t)$  и  $x^{k+1}(t)$  в точке  $kt$ , где  $k = \overline{0, g + 1}$ , обеспечивается третьим и четвертым условиями теоремы. *Доказательство закончено.*

В следующем параграфе пойдет речь о характерных особенностях численного решения рассматриваемых уравнений и будут построены многошаговые методы, основанные на квадратурной формуле Адамса и на экстраполяционных формулах.

## 1.5 Численные методы решения интеграл-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования

Начнем параграф с описания общей схемы построения явных и неявных квадратурных формул Адамса.

Зададим на отрезке  $[0, 1]$  равномерную сетку  $t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N, h = \frac{1}{N}$ . Пусть известны значения  $g(t_i) = g_i$  некоторой функции  $g(t)$ , для которой

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{i+1}} g(\tau) d\tau &= \int_0^{t_{k+1}} g(\tau) d\tau + \sum_{j=k+1}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(\tau) d\tau \approx \\ &\int_0^{t_{k+1}} L_{k+1}^0(g_0, g_1, \dots, g_k, \tau) d\tau + \sum_{j=k+1}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \dots, g_j, \tau) d\tau = \\ &= h \sum_{l=0}^k \beta_l g_l + \sum_{j=k+1}^i h \sum_{l=0}^k \gamma_l g_{j-l} = h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1, l} g_l, \end{aligned} \quad (1.53)$$





где  $L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \dots, g_j, t)$  – интерполяционный полином степени  $k$ , проходящий через точки  $(g_{j-k}, t_{j-k}), (g_{j-k+1}, t_{j-k+1}), \dots, (g_j, t_j)$ ,  $j = \overline{k, i+1}$ .

Коэффициенты  $\omega_{i+1,l}$  в (1.56) являются линейными комбинациями коэффициентов  $\beta_l$  и  $\gamma_l$ . Приведем коэффициенты  $\omega_{i+1,l}$  для  $k = 1, 2$ .

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \omega_{i+1,l} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 & & & \\ 4 & 15 & 12 & 5 & & \\ 4 & 15 & 11 & 13 & 5 & \\ 4 & 15 & 11 & 12 & 13 & 5 \\ 4 & 15 & 11 & 12 & 12 & 13 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

При построении численных методов решения ИАУ необходимо учесть, что они включают в себя ИУВ как второго (1.5), так и первого рода (1.4) с условием  $\det K(t, t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$ .

В работах [2, 3, 109] показано, что методы, основанные на простейших квадратурных формулах прямоугольников (правых, средних, левых) и трапеций, являются сходящимися для (1.4), а использование формул более высокого порядка точности, например, Грегори или Симпсона, приводит к расходящимся процессам [109, стр.151].

Применим, например, метод, основанный на квадратурной формуле Грегори (см. [109]) четвертого порядка, к тестовому уравнению

$$\int_0^t z(s) ds = g(t), g(0) = 0, \quad (1.57)$$

с точным решением  $z(t) = g'(t)$ .

Получим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$h \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{i+1,l} z_l = g_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

где стартовые значения  $z_0, z_1, z_2$  считаются заранее вычисленными, а веса  $\omega_{i+1,j}$  определяются по формулам:

$$\omega_{i+1,0} = \omega_{i+1,i+1} = \frac{3}{8},$$

$$\omega_{i+1,1} = \omega_{i+1,i} = \frac{7}{6},$$

$$\omega_{i+1,2} = \omega_{i+1,i-1} = \frac{23}{24},$$

$$\omega_{i+1,l} = 1, \quad l = 3, 4, \dots, i - 2.$$

Разность  $(i + 1)$ -й и  $i$ -й строк:

$$\frac{3}{8}z_{i+1} + \frac{19}{24}z_i - \frac{5}{24}z_{i-1} + \frac{1}{24}z_{i-2} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\frac{3}{8}p^3 + \frac{19}{24}p^2 - \frac{5}{24}p + \frac{1}{24} = 0$$

и найдем его корни  $p_1 \approx -2,3658$ ,  $p_2 \approx 0,127340 + 0,175357i$ ,  $p_3 \approx 0,127340 - 0,175357i$ . Поскольку корень  $p_1$  по модулю превосходит единицу, метод является неустойчивым для данного уравнения.

Аналогичную картину мы получим, если попытаемся приметить многошаговые методы, основанные на формулах (1.56) (неявные методы типа Адамса). Например, для уравнения (1.57) при  $k = 2$  получим разностные соотношения

$$\frac{5}{12}z_{i+1} + \frac{8}{12}z_i - \frac{1}{12}z_{i-1} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h},$$

характеристическое уравнение которых

$$\frac{5}{12}p^2 + \frac{8}{12}p - \frac{1}{12} = 0$$

имеет корень  $p_2 = -1, 7$  по модулю большой единицы.

Отметим, что не все многошаговые методы высокого порядка точности приводят к расходящимся процессам.

Для численного решения ИУВ I (1.4) применяют  $k$ -шаговые методы, которые основаны на формуле (1.53) (см., например, [74, 109])

$$h \sum_{l=0}^i \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \quad i = k, k+1, \dots, N-1. \quad (1.58)$$

Предполагается, что начальные значения  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  заранее вычислены (например, методами типа Рунге-Кутты, см. [91]) с точностью

$$\|x_j - x(t_j)\| = O(h^{k+1}), \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Известно [74, 109], что методы (1.58) сходятся к точному решению задачи (1.4) с порядком  $O(h^{k+1})$  при  $k \leq 5$ , а при  $k > 5$  данные методы являются неустойчивыми. Это связано с тем, что корни характеристического уравнения

$$\sum_{j=0}^k \zeta_j p^{k-j} = 0$$

при  $k \leq 5$  лежат в единичном круге, а при  $k > 5$  по крайней мере один корень по модулю больше единицы. Алгоритмы, основанные на явных квадратурных формулах Адамса (1.56), для уравнений (1.57) ведут себя устойчиво и сходятся к точному решению со скоростью  $O(h^{k+1})$ ,  $k \leq 5$ , где  $k$  — число шагов.

Далее опишем численные методы решения ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.27).

Зададим на отрезке интегрирования  $[-c; T]$  равномерную сетку  $t_\nu = \nu h$ ,  $\nu = \overline{-N, [\frac{T-h}{h}] + 1}$ ,  $h = \frac{c}{N}$ ,  $N \geq k$  — натуральное число. Для некоторой известной на  $[-c, 0]$  функции  $\psi(t)$ , определенной на  $[-c, T]$ , в обозначениях



$\psi(t_i) = \psi_i$  будем иметь формулу явного метода Адамса

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-N+1}}^{t_{i+1}} \psi(s) ds &= \int_{t_{i-N+1}}^{t_{i-N+k+2}} \psi(s) ds + \sum_{j=i-N+k+2}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} \psi(s) ds \approx \\
&\approx \int_{t_{i-N+1}}^{t_{i-N+k+2}} L_{k+1}^0(\psi_{i-N+1}, \psi_{i-N+2}, \dots, \psi_{i-N+k+1}, s) ds + \\
&+ \sum_{j=i-N+k+2}^i \int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{k+1}^j(\psi_{j-k}, \psi_{j-k+1}, \dots, \psi_j, s) ds = \\
&= h \sum_{l=i-N+1}^{i-N+k+1} \beta_{l-i+N-1} \psi_l + \sum_{j=i-N+k+2}^i h \sum_{l=0}^k \gamma_l \psi_{j-l} = \\
&= h \sum_{l=i-N+1}^i \omega_{N-k+1, l} \psi_l, \quad i = 0, \quad \overline{\left[ \frac{T-h}{h} \right]}
\end{aligned} \tag{1.59}$$

где  $L_{k+1}^j(\psi_{j-k}, \psi_{j-k+1}, \dots, \psi_j, s)$  — интерполяционный полином степени  $k$ , проходящий через точки  $(\psi_{j-k}, t_{j-k}), (\psi_{j-k+1}, t_{j-k+1}), \dots, (\psi_j, t_j)$ ,  $j = \overline{i-N+k+2, i}$ .

Матрицы значений  $\omega_{N-k+1, l}$  для  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  совпадают с (1.54).

Отметим, что первый индекс весов  $\omega_{N-k+1, l}$  обозначает номер строки представленных матриц и не зависит от  $i$ . Таким образом, при счете используется лишь одна строка коэффициентов, ее выбор зависит от числа узлов сетки на предыстории  $[-c; 0)$ .

Введем обозначения  $A(t_{i+1}) = A_{i+1}$ ,  $K(t_{i+1}, t_l) = K_{i+1, l}$ ,  $f(t_{i+1}) = f_{i+1}$ ,  $x(t_l) = x_l$  при  $l \geq 0$ ,  $x^0(t_l) = x_l$  при  $l < 0$ .

Тогда для численного решения (1.27) общие многошаговые методы имеют вид

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i+1-j} + h \sum_{l=i-N+1}^{i+1} \omega_{N-k+1, l-i+N} K_{i+1, l} x_l = f_{i+1}, \quad (1.60)$$

$i = \overline{0, \left[ \frac{T-h}{h} + 1 \right] + 1}$ , где  $h \sum_{l=i-N+1}^{i+1} \omega_{N-k+1, l} K_{i+1, l} x_l$  — аппроксимация интегрального слагаемого,  $\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i+1-j}$  — аппроксимация  $x(t_{i+1})$ .

Формулы (1.60) могут быть явными при  $\alpha_0 \neq 0$ ,  $\omega_{i+1, l} = 0$  и неявными при  $\alpha_0 \neq 0$ ,  $\omega_{i+1, l-i+N} \neq 0$ .

ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.27) содержит в себе ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования, для которых неявные методы (1.60) приводят к расходящимся процессам, поэтому для решения задачи (1.27) применять неявные методы нельзя. Применение же явных методов, например, рассмотренных выше явных методов Адамса, устойчивых для ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования, приводит к необходимости решать вырожденные системы линейных алгебраических уравнений

$$A_{i+1} x_{i+1} = f_{i+1} - h \sum_{l=i-N+1}^i \omega_{N-k+1, l} K_{i+1, l} x_l,$$

$$i = 0, 1, \dots, \left[ \frac{T-h}{h} + 1 \right] + 1.$$

Чтобы избежать такого рода трудностей, будем придерживаться подхода, предложенного в [24]. Для вычисления интегрального слагаемого в (1.27) будем применять явные методы Адамса, а значение  $x_{i+1}$  в выражении  $A_{i+1} x_{i+1}$ , вычислять как значение в точке  $t = t_{i+1}$  интерполяционного полинома степе-

ни  $k$ , проходящего через точки  $(x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), \dots, (x_i, t_i)$ , то есть

$$x_{i+1} \approx L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, \dots, x_i, t_{i+1}) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j}.$$

Для численного решения задачи (1.27) получим многошаговые методы

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^k \alpha_j x_{i-j} + h \sum_{l=i-N+1}^i \omega_{N-k+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \quad (1.61)$$

$$i = 0, 1, \dots, \left[ \frac{T-h}{h} + 1 \right] + 1.$$

Выпишем в Таблице 1 коэффициенты  $\alpha_j$  для  $k = 1, 2, 3$ .

Таблица 1

$k$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
1	2	-1	—	—
2	3	-3	1	—
3	4	-6	4	-1

В следующем разделе приведем описание алгоритма численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования построенными многошаговыми методами.

## 1.6 Блок-схема алгоритма численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования многошаговыми методами

Алгоритм вычисления приближенного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.27) многошаговыми методами (1.61) реализован для  $k = 1, 2, 3$  в среде Maple 13 (лицензия № ID 436951 от 12.10.2009 г., бессрочная) с использованием встроенных пакетов linalg, SumTools, numtheory, plots, stats.

При решении ИАУ с переменными пределами интегрирования используется лишь одна строка соответствующей матрицы коэффициентов (1.54), выбор которой зависит от количества узлов интерполирования на предыстории.

Представим пошаговый алгоритм реализации метода (1.61).

**Шаг 1.** Ввод данных:  $h$  — шаг интегрирования,  $t_0, T$  — начало и конец отрезка интегрирования соответственно,  $c$  — положительная постоянная из нижнего предела интегрирования  $t - c$ . Элементы  $A$  — матрицы главной части,  $K$  — ядра уравнения,  $f$  — свободного члена,  $x^0$  — функции заданной на предыстории,  $x$  — точного решения (программа рассчитана на 2 компоненты,  $n = 2$ ).

**Шаг 2.** Определение числа точек на предыстории ( $N = \frac{c}{h}$ ).

**Шаг 3.** Проверка условия  $N \leq k$ ,  $k$  — шаг метода. Если условие выполнено, то необходимо уменьшить шаг. Если нет, переход к шагу 4.

**Шаг 4.** Расчет значений, необходимой строки матрицы весов. Если  $N = k + 1$ , то веса уже заданы, переходим к шагу 5. Если  $N > k + 1$ , то веса вычисляются средствами вложенных циклов по рекуррентным формулам для  $k = 1, 2, 3$  соответственно:

$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\omega_{u,u} = 3,$	$\omega_{u,u} = 23,$	$\omega_{u,u} = 55,$
$\omega_{u,u-1} = \omega_{u-1,u-1} - 1,$	$\omega_{u,u-1} = \omega_{u-1,u-1} - 16,$	$\omega_{u,u-1} = \omega_{u-1,u-1} - 59,$
	$\omega_{u,u-2} = \omega_{u-1,u-2} + 5,$	$\omega_{u,u-2} = \omega_{u-1,u-2} + 37,$
		$\omega_{u,u-3} = \omega_{u-1,u-3} - 9,$
$u = \overline{3, N},$	$u = \overline{4, N},$	$u = \overline{5, N},$
$\omega_{u,m} = \omega_{u-1,m},$	$\omega_{u,m} = \omega_{u-1,m},$	$\omega_{u,u-1} = \omega_{u-1,m},$
$m = \overline{1, u - 2};$	$m = \overline{1, u - 3};$	$m = \overline{1, u - 4}.$

**Шаг 5.** Вычисление приближений  $x_i, i = 0, \overline{\left[\frac{T-h}{h} + 1\right]} + 1$ , происходит в цикле: находим вспомогательные значения (коэффициентов при  $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$ ), затем получаем  $x_i$ , выводим погрешность по евклидовой норме и переходим к  $i = i + 1$ .

На Рисунке 1.3 представлена блок-схема описанного алгоритма.

## 1.7 Численные эксперименты

**Пример 1.7.1.** Рассмотрим ИАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} 1+t & e^{t+s} \\ 2t+s & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (2-t)e^{2t-1} + (t-1)e^{2t} + t^4 + 0, 5t^3 - 0, 5t^2 + 2, 75t + 1, 75 \\ (t^3 + t + 1)e^t + 3t^4 - 5t^3 + 4t^2 + 0, 5t + 0, 2 \end{pmatrix}, t \in [1, 4],$$

для которого заданы стартовые функции  $u^0(t) = t^3 + 1, v^0(t) = t, t \in [0, 1)$ . Данная задача удовлетворяет условиям существования единственного непрерывного решения. Точное решение:  $u(t) = t^3 + 1, v(t) = t$ . В Таблице 2 и далее используются обозначения  $err_k$  погрешности вычисления по евклидовой норме  $k$ -шаговых методов (1.61) при  $k = 1, 2, 3$  соответственно.

Таблица 2

$h$	0,1	0,05	0,025	0,0125
$err_1$	$0,224 \cdot 10^{-1}$	$0,623 \cdot 10^{-2}$	$0,173 \cdot 10^{-2}$	$0,502 \cdot 10^{-3}$
$err_2$	$0,210 \cdot 10^{-2}$	$0,311 \cdot 10^{-3}$	$0,448 \cdot 10^{-4}$	$0,664 \cdot 10^{-5}$
$err_3$	$0,186 \cdot 10^{-3}$	$0,146 \cdot 10^{-4}$	$0,102 \cdot 10^{-5}$	$0,690 \cdot 10^{-7}$

В Таблице 3 приведен анализ порядка точности методов при  $k = 1, 2, 3$  по формуле [43, с. 237]

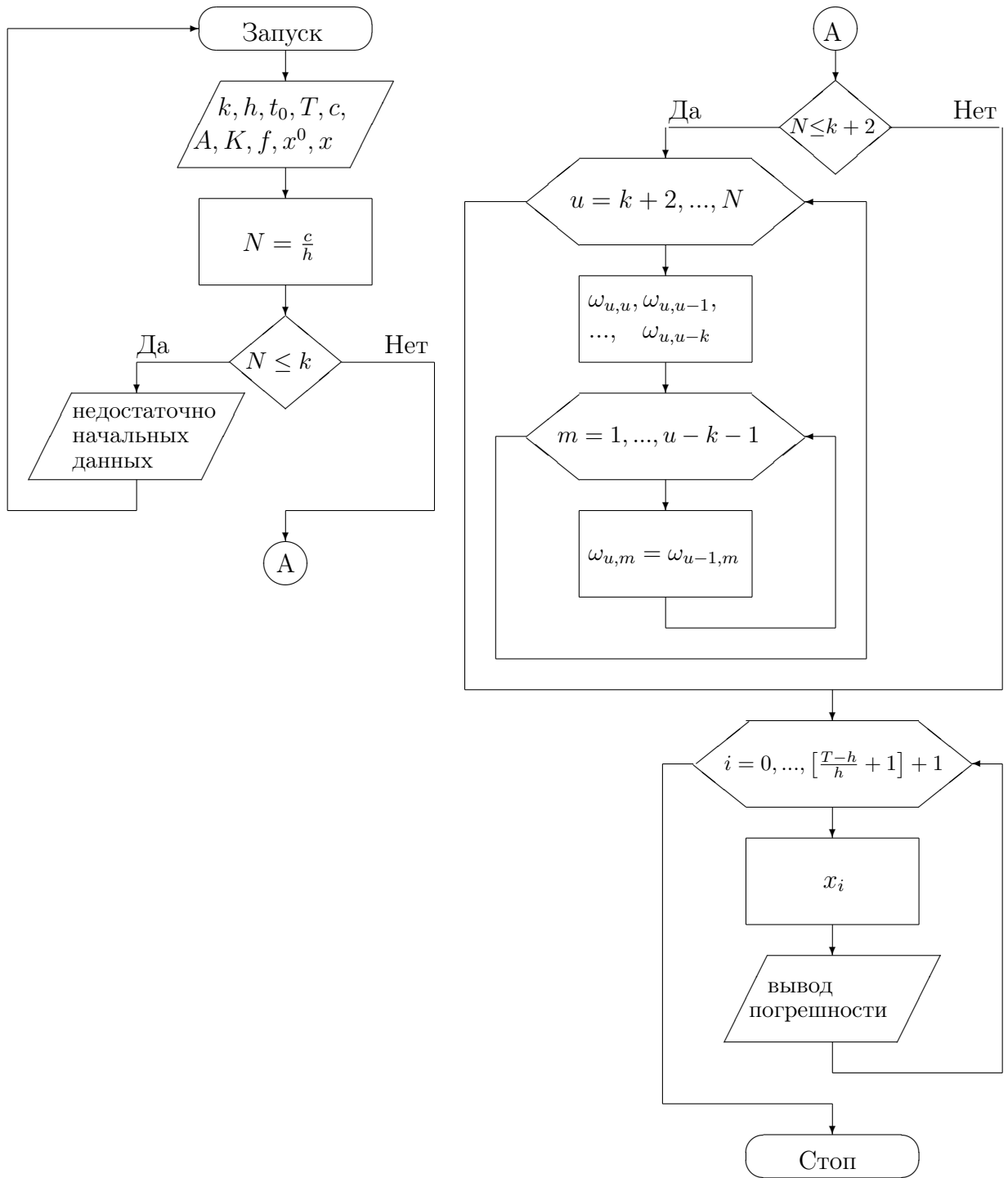


Рисунок 1.3 — Алгоритм численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования (1.27) многошаговыми методами (1.61)

$$P(err_k)(h) = \log_2 \frac{err_k(h)}{err_k(\frac{h}{2})}.$$

Таблица 3

$h$	0,1	0,05	0,025
$P(err_1)$	1,8	1,8	1,8
$P(err_2)$	2,8	2,8	2,8
$P(err_3)$	3,7	3,8	3,9

**Пример 1.7.2.** Рассмотрим ИАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_{t-1}^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ e^{t-2s} & e^{t+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2e^t + te^{-t} \\ (t+1)e^t + t^2e^{-t} + e - 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [1, 4],$$

для которого заданы стартовые функции  $u^0(t) = e^t$ ,  $v^0(t) = e^{-t}$ ,  $t \in [0, 1)$ . Данная задача удовлетворяет условиям существования единственного непрерывного решения. Точное решение:  $u(t) = e^t$ ,  $v(t) = e^{-t}$ . В Таблице 4 представлены погрешности.

Таблица 4

$h$	0,1	0,05	0,025	0,0125
$err_1$	0,249	$0,652 \cdot 10^{-1}$	$0,166 \cdot 10^{-1}$	$0,418 \cdot 10^{-2}$
$err_2$	$0,235 \cdot 10^{-1}$	$0,317 \cdot 10^{-2}$	$0,414 \cdot 10^{-3}$	$0,530 \cdot 10^{-4}$
$err_3$	$0,226 \cdot 10^{-2}$	$0,156 \cdot 10^{-3}$	$0,102 \cdot 10^{-4}$	$0,652 \cdot 10^{-6}$

Анализ порядка точности методов для  $k = 1, 2, 3$  представлен в Таблице 5.

Таблица 5

$h$	0,1	0,05	0,025
$P(err_1)$	1,9	2,0	2,0
$P(err_2)$	2,9	2,9	3,0
$P(err_3)$	3,8	3,9	4,0

Расчеты модельных примеров иллюстрируют, что для задачи (1.27)  $k$ -шаговые методы (1.61) сходятся с порядком точности  $k + 1$ .



## ГЛАВА 2

# ЖЕСТКИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА

### 2.1 Системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода

Будем рассматривать систему нелинейных ИУВ II рода

$$x(t) = \int_0^t K(t, s, x(s)) ds + f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad (2.1)$$

где  $K(t, s, x(s))$  и  $f(t)$  — заданные, достаточно гладкие  $n$ -мерные вектор-функции,  $x(t)$  — искомая  $n$ -мерная вектор-функция.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что система (2.1) имеет единственное непрерывное решение и входные данные обладают той степенью гладкости, которая необходима для дальнейших рассуждений.

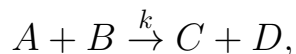
Рассмотрим известные примеры математических моделей, описанных жесткими системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и преобразуем их, представив в виде жестких систем нелинейных ИУВ II рода (2.1).

### 2.2 Модель колебаний концентрации озона в атмосфере, основанная на системе нелинейных ИУВ II рода

Высотный слой озона является для нас защитным барьером от вредоносного влияния солнечного ультрафиолетового излучения. Все чаще ученые склоняются к мнению, что многие виды деятельности человека техногенного

характера приводят к постоянным изменениям количества озона в атмосфере. Однако, большее влияние на изменение концентрации озона в атмосфере оказывает солнечный свет. Именно поэтому в течении суток концентрация озона в атмосфере меняется и повлиять на этот процесс человечество вряд ли сможет, но может изучить, в основном, посредством математического моделирования. В [52] описывается модель изменения концентрации озона в атмосфере под действием солнечного света .

Кратко изложим идею построения математической модели. В области химической кинетики бимолекулярная реакция записывается в виде



которая означает, что реагенты  $A$  и  $B$  порождают продукты реакции  $C$  и  $D$ , где  $k$  — коэффициент скорости реакции. Одна эта реакция приводит к четырем дифференциальным уравнениям (по одному на каждый реагент), причем концентрации  $[A]$  и  $[B]$  реагентов  $A$  и  $B$  убывают, а концентрации  $[C]$  и  $[D]$  продуктов  $C$  и  $D$  увеличиваются.

Концентрация каждого убывающего реагента находится как произведение концентраций двух (истощающихся) реагентов и константы скорости реакции со знаком минус, т.е. имеем

$$[A]' = \dots - k[A][B] + \dots,$$

$$[B]' = \dots - k[A][B] + \dots$$

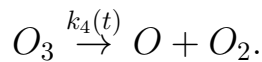
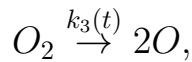
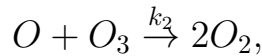
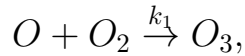
Увеличение концентрации каждого продукта находится как произведение концентраций двух (истощающихся) реагентов и константы скорости реакции со знаком плюс, т.е. имеем

$$[C]' = \dots + k[A][B] + \dots,$$

$$[D]' = \dots + k[A][B] + \dots$$

Если других реакций нет, то многочлен следует убрать.

Предположим, что атмосфера Земли представляет собой замкнутую систему с неизменными температурой и объемом, и рассмотрим одновременное взаимодействие трех реагентов: свободного кислорода  $O$ , молекулярного кислорода  $O_2$  и озона  $O_3$ , предполагая, что их концентрации  $y_1, y_2, y_3$  соответственно не зависят от высоты. Механизм реакций этих веществ следующий:



Значения коэффициентов скоростей:  $k_1 = 1,63 \cdot 10^{-16}$ ,  $k_2 = 4,66 \cdot 10^{-16}$ . Два других зависят от  $t$  и описываются формулами:

$$k_i(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-c_i}{\sin \omega t}\right), & \sin \omega t > 0, \\ 0, & \sin \omega t \leq 0, \end{cases} \quad i = 3, 4, \quad (2.2)$$

в которых  $\omega = \frac{\pi}{43200} \text{ с}^{-1}$ , ( $= \frac{\pi}{12} \text{ ч}^{-1}$ ),  $c_3 = 22,62$ ,  $c_4 = 7,601$ . Скорости соответствующих реакций изменяются под воздействием солнца в течение суток. Резко возрастают «на рассвете» при  $t = 0$ , достигают максимума «в полдень» ( $t = 6 \times 3600 \text{ с}$ ) и падают до нуля «на закате солнца» при  $t = 12 \times 3600 \text{ с}$ . Время  $t$  измеряется в секундах. Сутки условно разбиваются на «светлое время»  $t \in [0, 12 \times 3600)$  и «темное время»  $t \in [12 \times 3600, 24 \times 3600)$ .

Система соответствующих (2.2) ОДУ имеет вид:

$$\begin{aligned}y_1' &= -k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 + 2k_3(t) y_2 + k_4(t) y_3, \\y_2' &= -k_1 y_1 y_2 + k_2 y_1 y_3 - k_3(t) y_2 + k_4(t) y_3, \\y_3' &= k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 - k_4(t) y_3.\end{aligned}$$

Вторым уравнением данной системы пренебрегают, считая концентрацию  $y_2$  молекулярного кислорода постоянной величиной во времени, объясняя это тем, что значения концентраций  $y_1$  и  $y_3$  на много порядков ниже, чем  $y_2$ , и не оказывают на нее существенного влияния.

Таким образом, модель концентрации озона в атмосфере представлена в виде системы ОДУ

$$\begin{aligned}y_1' &= -k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 + 2k_3(t) y_2 + k_4(t) y_3, \\y_2' &= 0, \\y_3' &= k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 - k_4(t) y_3,\end{aligned}\tag{2.3}$$

с начальными значениями при  $t = 0$  «на рассвете»:  $y_1(0) = 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $y_2(0) = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $y_3(0) = 3,7 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Решение данной задачи претерпевает резкое изменение «в светлое время суток». Например, концентрация  $y_1$  изменяется от начального значения ( $10^6 \text{ см}^{-3}$ ) почти до нуля ( $10^{-30} \text{ см}^{-3}$ ), когда  $t$  достигает 60 с., а «к полудню» возрастает почти до  $10^{18} \text{ см}^{-3}$  и «к ночи» снова падает. «Ночью» обе концентрации  $y_1$  и  $y_3$ , по существу, постоянны.

Представим интегральный аналог модели (2.3) в виде системы нелинейных ИУВ II вида (2.1). Для этого проинтегрируем ОДУ в системе (2.3) в пределах

от 0 до  $t$  и получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_0^t (-k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 + 2k_3(t) y_2 + k_4(t) y_3) ds + 10^6, \\ y_2 &= 3,7 \cdot 10^{16}, \\ y_3 &= \int_0^t (k_1 y_1 y_2 - k_2 y_1 y_3 - k_4(t) y_3) ds + 10^{12} \end{aligned}$$

или, подставив все известные значения, получим модель

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_0^t (-6,031 y_1 - 4,66 \cdot 10^{-16} y_1 y_3 + 7,4 \cdot 10^{16} k_3(t) + k_4(t) y_3) ds + 10^6, \\ y_3 &= \int_0^t (6,031 y_1 - 4,66 \cdot 10^{-16} y_1 y_3 - k_4(t) y_3) ds + 10^{12}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $k_3(t), k_4(t)$  заданы (2.2).

Кроме приведенной модели (2.4) может быть построен ряд других моделей. Таким образом было продемонстрировано, что класс рассматриваемых задач не является пустым, и может использоваться для моделирования.

### 2.3 Особенности поведения численных методов решения систем нелинейных ИУВ II рода

К настоящему времени разработана достаточно полная теория численных методов решения задачи (2.1): одношаговые методы типа Рунге-Кутты и их модификация (Бельтюкова-Вольтерра-Рунге-Кутта, Пузе-Вольтерра-Рунге-Кутта, коллокационные), многошаговые, общие многошаговые методы, блочные методы и др. Достаточно полная библиография по таким методам приведена в монографиях [94, 109].

Формально все эти методы можно разделить на явные и неявные. При реализации явных методов на каждом шаге интегрирования приближенное решение находят из рекуррентных соотношений. Реализация неявных методов требует значительно больших вычислительных затрат: на каждом шаге интегрирования приходится решать системы нелинейных уравнений (или линейных, если  $K(t, s, x(s)) = K(t, s)x(s)$ , где  $K(t, s)$  —  $(n \times n)$ -матрица) размерности  $(np \times np)$ , где  $p$  — число стадий. Как правило, такие системы решают методом Ньютона или его модификациями. При этом возникают следующие проблемы: выбор начального приближения для запуска итерационного процесса, выбор числа итераций и критерия остановки счета. В следующем параграфе будет построен алгоритм, при реализации которого на каждом шаге интегрирования требуется решать линейные уравнения.

На протяжении многих десятилетий для предсказания свойств численных методов решения задачи (2.1) используют тестовое уравнение [105]

$$x(t) = \int_0^t (\lambda + \mu(t-s)) x(s) ds + a_1 + a_2 t, \quad (2.5)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — вещественные числа и  $\lambda \ll 0$ ,  $\mu \leq 0$ .

Уравнение (2.5) эквивалентно ОДУ второго порядка

$$x''(t) = \lambda x'(t) + \mu x(t), \quad x(0) = a_1, \quad x'(t)|_{t=0} = \lambda a_1 + a_2 \quad (2.6)$$

при  $\mu \neq 0$  и ОДУ первого порядка

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = a_1 \quad (2.7)$$

при  $\mu = 0$ ,  $a_2 = 0$ .

Введем на отрезке  $[0, 1]$  равномерную сетку  $t_l = lh, l = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $h = 1/N$ , и обозначим  $f_{l+1} = f(t_{l+1}), x_{l+1} = x(t_{l+1})$ ,

$$z = \lambda h, r = \mu h^2. \quad (2.8)$$

Любой одношаговый метод для уравнения (2.7) можно представить в виде  $x_{i+1} = R(z)x_i$ , где  $R(z)$  принято называть функцией устойчивости [43] (полином или дробно-рациональная функция). Если  $|R(z)| < 1$  при  $z < 0$ , то метод называется  $A$ -устойчивым, а если при этом  $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$ , то метод называется  $L$ -устойчивым.

Остановимся на одном семействе одношаговых методов, а именно, на  $\theta$ -методах, которые для задачи (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} x_{l+1} = & h [\theta K(t_{l+1}, 0, x_0) + (1 - \theta)K(t_{l+1}, t_{l+1}, x_{l+1})] + \\ & + h \sum_{p=0}^l K(t_{l+1}, t_p, x_p) + f_{l+1}, \quad x_0 = x(0) = f(0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где скалярный параметр  $\theta: \theta \in [0, 1]$ .

При  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1$ ,  $\theta = \frac{1}{2}$  получим методы, основанные на квадратурных формулах правых прямоугольников, левых прямоугольников и трапеций соответственно.

Учитывая обозначения (2.8), для тестового примера (2.5) данные методы дают рекуррентные соотношения:

$$x_{l+1} - 2x_l + x_{l-1} = z(x_{l+1} - x_l) + rx_l, \quad \theta = 1, \quad (2.10)$$

$$x_{l+1} - 2x_l + x_{l-1} = z(x_l - x_{l-1}) + rx_{l-1}, \quad \theta = 0, \quad (2.11)$$

$$x_{l+1} - 2x_l + x_{l-1} = \frac{z}{2}(x_{l+1} - x_{l-1}) + rx_l, \quad \theta = \frac{1}{2}. \quad (2.12)$$

В дальнейших рассуждениях нам потребуются

**Определение 2.3.1** [91]. Областью устойчивости методов (2.10) – (2.12) назовем те вещественные значения  $z$  и  $r$ , при которых корни  $\rho$  характеристических уравнений

$$(1 - z)\rho^2 - 2\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{r}{2}\right)\rho + 1 = 0, \quad (2.13)$$

$$\rho^2 - 2\left(1 + \frac{z}{2}\right)\rho + (1 + z - r) = 0, \quad (2.14)$$

$$\left(1 - \frac{z}{2}\right)\rho^2 - 2\left(1 + \frac{r}{2}\right)\rho + \left(1 + \frac{z}{2}\right) = 0 \quad (2.15)$$

лежат в единичном круге.

Если в уравнении (2.5)  $\mu = 0$ , то  $\theta$ -методы при  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1$ ,  $\theta = \frac{1}{2}$  совпадают с неявным методом Эйлера, явным методом Эйлера и методом трапеций для ОДУ (2.7). Функция устойчивости в этом случае имеет вид  $R(z) = \frac{1 + \theta z}{1 - (1 - \theta)z}$ , то есть  $\theta$ -методы будут  $A$ -устойчивыми при  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  и  $L$ -устойчивыми при  $\theta = 0$ .

Таким образом, для численного решения задачи (2.1), содержащей жесткие и быстро осциллирующие компоненты, явные методы не эффективны, т.к. требуют «малого» шага интегрирования. Как уже говорилось, реализация неявных методов требует решения систем нелинейных уравнений, что влечет за собой целый ряд дополнительных проблем: выбор подходящего итерационного метода, начального приближения и критерия останова итерационного процесса.

Ниже предложен безытерационный алгоритм, который объединяет «хорошие» качества метода, основанного на квадратурной формуле правых прямоугольников ( $L$ -устойчивость), и метода, основанного на квадратурной формуле трапеции (второй порядок). Отметим, что для жестких ОДУ такие методы были предложены в [32, 35].



## 2.4 Численные алгоритмы

Выпишем для задачи (2.1) простейший метод, основанный на квадратурной формуле левых прямоугольников ( $\theta = 1$ ):

$$x_{i+1} = h \sum_{j=0}^i K(t_{i+1}, t_j, x_j) + f_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (2.16)$$

$$x_0 = f(0),$$

и линеаризованный неявный метод, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников ( $\theta = 0$ ):

$$(E - hJ(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i)) x_{i+1} = h \left[ \sum_{j=1}^i K(t_{i+1}, t_j, x_j) + K(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i) - J(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i)x_i + f_{i+1} \right], \quad (2.17)$$

где  $J = \frac{\partial K(t, s, x)}{\partial x}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ .

Объединяя соотношения (2.16) и (2.17) в переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $x_{i+1}$ , получим

$$\begin{pmatrix} E \\ E - hJ(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i) \end{pmatrix} x_{i+1} = \begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \sum_{j=0}^i K(t_{i+1}, t_j, x_j) \\ h \left[ \sum_{j=1}^i K(t_{i+1}, t_j, x_j) + K(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i) - J(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i)x_i \right] \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$i = \overline{0, N-1}.$$

СЛАУ (2.18) в общем случае не имеет решения. Найдём её «решение» следующим образом. Умножим обе части (2.18) слева на матрицу  $(A|B)$  раз-

мерности  $(n \times 2n)$  такую, чтобы матрица  $A + B(E - hJ(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i))$  была неособенной. Если  $(A|B) = (E|E - hJ(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i))$ , то имеем

$$(E + (E - Q_i)^2) x_{i+1} = (2E - Q_i) \left( h \sum_{j=1}^i K(t_{i+1}, t_j, x_j) + f_{i+1} \right) + h [K(t_{i+1}, t_0, x_0) + (E - Q_i)(K(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i) - Q_i x_i)], \quad (2.19)$$

где  $Q_i = hJ(t_{i+1}, t_{i+1}, x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Если  $(A|B) = (E|E)$ , то получим линейризованный метод трапеций.

Метод (2.19) и линейризованный метод трапеций имеют второй порядок точности.

В заключение данного раздела приведем характеристическое уравнение метода (2.19)

$$(2 - 2z + z^2)\rho^2 + ((z - 2)(2 + r - z) - 2z)\rho + 2 = 0$$

и область устойчивости на Рисунке 2.1 метода (2.19) для модельного примера (2.5) (см. определение 2.3.1).

## 2.5 Численные эксперименты

Предлагаемые методы численного решения (2.19) были протестированы на ряде задач. Приведем результаты расчетов для некоторых примеров.

**Пример 2.5.1.** Рассмотрим систему ИУВ II рода

$$x(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} a(t)u(t, s) + b^2(t)v(t, s) & b(t)d(t)(30 + 127(t - s)) \\ c(t)b(t)(10 + 75(t - s)) & b^2(t)u(t, s) + a(t)v(t, s) \end{pmatrix} \frac{x(s)}{g(t)} ds + f(t),$$

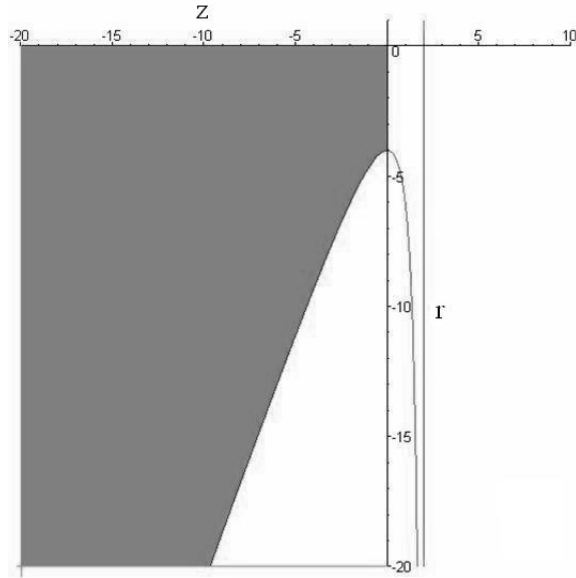


Рисунок 2.1 — Область устойчивости метода (2.19) для модельного примера (2.5) (заштрихована)

где  $t \in [0, 1]$ ,  $g(t) = 200 + 20(\cos \frac{t}{200} + \sin \frac{t}{200})$ ,  $a(t) = ((10 + \cos \frac{t}{200})^2 - 1)$ ,  
 $b(t) = 10 + \sin \frac{t}{200}$ ,  $c(t) = 9 + \cos \frac{t}{200}$ ,  $d(t) = 11 + \cos \frac{t}{200}$ ,  
 $u(t, s) = -20 - 101(t - s)$ ,  $v(t, s) = -10 - 26(t - s)$ ,  
 $f(t) = \begin{pmatrix} -d(t)(t + 1) + b(t) \\ b(t)(t + 1) + c(t) \end{pmatrix}$ .

Точное решение:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} b(t)e^{-5t}(\cos t - 5 \sin t) - d(t)e^{-10t}(\cos t - 9 \sin t) \\ b(t)e^{-10t}(\cos t - 9 \sin t) + c(t)e^{-5t}(\cos t - 5 \sin t) \end{pmatrix}.$$

В Таблице 6 приведены евклидовы нормы погрешности с шагом интегрирования  $h$ .

Таблица 6

$h$	0,1	0,05	0,025
$er_1$	0,3459	0,1471	0,0558
$er_2$	0,0587	0,0147	0,0032
$er_3$	0,0499	0,0124	0,0028

Здесь и в дальнейших расчетах принято обозначение:

$er_1$  — евклидова норма погрешности метода, основанного на квадратурной формуле правых прямоугольников с дальнейшей линеаризацией;

$er_2$  — евклидова норма погрешности метода, основанного на квадратурной формуле трапеций с последующей линеаризацией;

$er_3$  — евклидова норма погрешности метода (2.19).

**Пример 2.5.2.** Рассмотрим нелинейное ИУВ II рода [91, с. 127]

$$x(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{s-t}[x(s) + e^{-x(s)}]ds, \quad t \in [0, 6].$$

Точное решение  $\bar{x}(t) = \ln(t + e)$ .

В Таблице 7 приведем результаты численных расчетов на отрезке интегрирования  $[0; 6]$ .

Таблица 7

$h$	0,25	0,125	0,0625
$er_1$	1,9491	0,6816	0,2946
$er_2$	0,0310	0,0077	0,0019
$er_3$	0,0742	0,0176	0,0042

**Пример 2.5.3.** Рассмотрим задачу [91, с. 467]

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\lambda(1 - e^{-t^2}) - \lambda \int_0^t (t - s)e^{-(t-s)^2} x(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Точное решение  $\bar{x}(t) = 1$ .

В Таблице 8 приведены результаты расчетов для случая  $\lambda = 1000$ ,  $T = 20$ .

Таблица 8

$h$	0,1	0,05	0,025
$er_1$	*	*	0,870
$er_2$	*	0,041	0,020
$er_3$	*	0,126	0,035

Символ \* означает, что норма погрешности больше 100.

В [91, с. 467] приведены результаты применения методов, основанных на явных квадратурных формулах Грегори [91, с. 75] и формуле дифференцирования назад. Все эти методы неустойчивы при  $h = 0,1$  и  $h = 0,05$ .

Из приведенных расчетов видно, что метод (2.19) и метод, основанный на квадратурной формуле трапеций, дают приблизительно одинаковые результаты.

Следующие примеры содержат жесткие и осциллирующие компоненты.

**Пример 2.5.4.** Рассмотрим систему ИУВ II рода, аналог системы жестких ОДУ [69, с. 9]

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} -101x_1(s) - 100x_2(s) \\ x_1(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} -101 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Точное решение:  $\bar{x}_1(t) = -e^{-t} - 100e^{-100t}$ ,  $\bar{x}_2(t) = e^{-t} + e^{-100t}$ .

В Таблице 9 приведены результаты численных расчетов.

Таблица 9

$h$	0,2	0,1
$er_1$	0,0340	0,0180
$er_2$	0,0970	0,0270
$er_3$	0,0020	0,0005

**Пример 2.5.5.** Рассмотрим жесткое нелинейное ИУВ II рода [91, с. 465]

$$x(t) = -\lambda \int_0^t \frac{1+t}{1+s} x^2(s) ds + g_0(t),$$

где  $g_0(t) = \sqrt{1 + (1+t)e^{-\mu t}} + \lambda(1+t) \left[ \ln(1+t) - \frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \frac{1}{\mu} \right]$ .

Точное решение  $\bar{x}(t) = \sqrt{1 + (1+t)e^{-\mu t}}$  не зависит от  $\lambda$ .

Стоит отметить, что в [91, с. 466] приведены результаты применения модифицированных методов дифференцирования назад и явных квадратурных методов Грегори [91, с. 75]. Для данного примера в случае  $\lambda = 1000$ ,  $\mu = 1$ ,  $T = 192h$  многие из них оказываются неустойчивыми. Методы, основанные на квадратурной формуле правых прямоугольников и трапеций с дальнейшей линейризацией, а также метод (2.19) при таких параметрах неустойчивы.

В Таблице 10 приведем результаты для менее жесткого случая  $\lambda = 100$ ,  $\mu = 1$ ,  $T = 192h$ .

Таблица 10

$h$	0,125	0,0625
$er_1$	0,00246	0,00117
$er_2$	0,04000	0,00485
$er_3$	0,00900	0,00067

**Пример 2.5.6.** Рассмотрим ИУВ II рода

$$x(t) = \int_0^t (-\lambda - \mu(t-s))x(s)ds + f(t), t \in [0, T],$$

аналог дифференциального уравнения

$$x''(t) + \lambda x'(t) + \mu x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0,$$

где  $\lambda \gg 0, \mu \geq 0$ .

В качестве точного решения была взята функция  $x(t) = e^{q_1 t} + e^{q_2 t}$ , где  $q_1, q_2$  — корни характеристического уравнения  $q^2 + \lambda q + \mu = 0$ .

Были проведены многочисленные расчеты с различными значениями  $\lambda$  и  $\mu$ . Данные расчеты подтвердили, что при реализации метода (2.19) можно брать значительно больший шаг интегрирования, чем в  $\theta$ -методах, особенно при больших значениях  $\lambda$ .

## ГЛАВА 3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ В ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

### 3.1 Модель долгосрочной стратегии развития системы ЭЭС, описанная ИАУ с переменными пределами ин- тегрирования

Как уже отмечалось ранее, интегральные уравнения с переменными пределами интегрирования широко используются для моделирования развивающихся систем в различных областях, в том числе и в энергетике. В [1–4] подробно описано построение модели ввода различных генерирующих мощностей ЭЭС из трех типов неатомных и трех типов атомных электростанций на достаточно длительный период, которая учитывает ограничения на топливо и капиталовложения, сроки жизни электростанций и замену устаревших технологий новыми. Модель представлена в виде системы шести уравнений, среди которых неклассические интегральные уравнения Вольтерра первого и второго родов и алгебраические уравнения. Представим ее в виде неклассического ИАУ (1.27) и проведем анализ.

Пусть  $\varphi_i(t) \geq 0$  — вводимая в момент времени  $t$  мощность электростанций  $i$ -го типа,  $i = \overline{1,6}$ ;  $t \in [0, T]$ , 0 и  $T$  — начало и конец прогнозируемого периода соответственно.

Для каждого типа станций известны следующие технико-экономические характеристики:

- 1)  $m_i(t)$  (руб./МВт) — удельные капиталовложения в момент времени  $t$ ;
- 2)  $b_i(t)$  (кг у.т./МВт·ч) — удельный расход топлива в момент времени  $t$ ;



3)  $c_i$  — срок жизни электростанции (будем предполагать, что для каждого типа электростанции это одна и та же постоянная величина  $c_i = c$ );

4)  $\beta_i(t - s)$  — скорость создания новых мощностей в момент времени  $t$  в расчете на единицу мощности, введенной ранее в момент времени  $s$ .

На предыстории  $t \in [-c, 0)$  известны функции

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^0(t), \quad i = \overline{1, 6}. \quad (3.1)$$

Задана динамика потребления необходимых ресурсов:  $F(t)$  — динамика электропотребления;  $M(t)$  — динамика капиталовложений на развитие ЭЭС;  $B(t)$  (кг у.т.) — суммарный расход ограниченного топлива для неатомных станций;  $B_u(t)$  — динамика использования природного урана  $t \in [0, T]$ .

Также считаются известными значения некоторых параметров:

—  $\gamma(t)$  — доля маневренных мощностей от суммы всех введенных к моменту  $t$ ;

—  $q_i \neq 0, i = \overline{4, 6}$ , — удельная критическая нагрузка (кг у.т./кВт) ядерным топливом, необходимая для первоначального запуска АЭС соответствующего типа;

—  $\alpha_i, i = \overline{4, 6}$ , — удельная выгрузка вторичного ядерного топлива из АЭС соответствующего типа;

—  $\mu$  и  $\nu$  — доли вторичного ядерного топлива, поступающего из АЭС типов 4 и 5, 6 соответственно, идущие на склад плутония после химической переработки.

Упрощенная схема ядерного топливного цикла приведена в [7, с. 119].

Предполагаем, что все электростанции используются на полную мощность в течение всего срока жизни.

С учетом обозначений, модель ввода различных генерирующих мощностей ЭЭС можно представить в виде (1.27), где

$$\begin{aligned}
A(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1(t) & m_2(t) & m_3(t) & m_4(t) & m_5(t) & m_6(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & q_6 \end{pmatrix}, \\
K(t, s) &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu\alpha_4\beta_4 & (b_5(t) - \nu\alpha_5)\beta_5 & (b_6(t) - \nu\alpha_6)\beta_6 \end{pmatrix}, \\
&\quad \eta_i = b_i(t)\beta_i(t-s), \quad \beta_i = \beta_i(t-s), \quad i = \overline{1, 6}, \\
x(t) &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) & \varphi_4(t) & \varphi_5(t) & \varphi_6(t) \end{pmatrix}^T, \\
f(t) &= \begin{pmatrix} F(t) & \gamma(t)F(t) & M(t) & B(t) & B_u(t) & 0 \end{pmatrix}^T,
\end{aligned}$$

функции (3.1) являются стартовыми. Таким образом, задача (1.27), (1.28) с вышеприведенными входными данными будет иметь единственное непрерывное решение при выполнении условий теоремы 1.4.1. Будем предполагать, что функции  $m_i(t)$ ,  $F(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $M(t)$ ,  $B(t)$ ,  $B_u(t)$ ,  $\beta_i(t-s)$ ,  $b_i(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $t \in [0, T]$ . Проверим выполнение второго условия теоремы 1.4.1.

Учитывая смысл величин  $q_4$ ,  $q_5$  и  $q_6$ , матрица  $A(t)$  имеет, как минимум, две ненулевые строки при любых значениях функций  $m_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ . Ранг матрицы  $A(t)$  не превышает трех, и равен трем только при выполнении одного из условий:

- 1)  $m_1(t) + m_2(t) + m_3(t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$ ;
- 2)  $m_5(t)q_6 - m_6(t)q_5 \neq 0 \forall t \in [0, T]$ .

Для выполнения критерия «ранг-степень» следует определить условия, при которых степень характеристического многочлена пучка матриц  $\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = \lambda^3 a_0(t) + \lambda^2 a_1(t) + \lambda a_2(t) + a_3(t)$  также будет равна трем, то есть  $a_0(t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$ .

Значение коэффициента

$$a_0(t) = \beta_3(0)q_4 \begin{vmatrix} \beta_1(0) & \beta_2(0) & \beta_5(0) & \beta_6(0) \\ m_1(t) & m_2(t) & m_5(t) & m_6(t) \\ b_1(t)\beta_1(0) & b_2(t)\beta_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & q_6 \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

не обратится в ноль, если  $\beta_3(0) \neq 0 \forall t \in [0, T]$ , и определитель в (3.2) не равен нулю при всех значениях  $t \in [0, T]$ .

Таким образом, построенная задача определения прогнозов вводов генерирующих мощностей ЭЭС имеет единственное непрерывное решение.

Рассмотрим другую модель в области электроэнергетики.

### 3.2 Односекторная интегральная модель долгосрочной стратегии ввода генерирующих мощностей ЭЭС России

В пункте 1.3. была приведена двухсекторная модель РС (1.25). Ее односекторный вариант, то есть случай, когда отсутствует подсистема  $\mathcal{A}$  (см. стр. 39), сводится к решению ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования (1.14) с заданной «предысторией» (1.17) (если  $a(0) < 0$ ) и применяется, в частности, в электроэнергетике для определения долгосрочных стратегий развития ЭЭС (см., например, [4, 8–11, 51, 59, 62]). При этом в (1.14) ядро  $K(t, s)$  — коэффициент эффективности использования в момент времени  $t$

введенной ранее в момент  $s$  генерирующей мощности  $x(s)$ ;  $t - a(t)$  — средний срок службы элементов системы;  $f(t)$  — экспертно задаваемая располагаемая мощность ЭЭС.

В [10] рассматривается проблема построения интегральной модели РС с учетом старения ее элементов применительно к задаче исследования долгосрочных стратегий развития ЭЭС России на базе ИУВ I рода вида

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.3)$$

где  $a_i(0) = 0$ ,  $a_0(t) \equiv t$ ,  $a_n(t) \equiv 0$ . Уравнение (3.3) можно рассматривать как обобщение уравнения (1.14)((3.3) переходит в (1.14) при  $n = 1$ ).

В зависимости от предположений о механизме старения элементов системы можно получить различные типы моделей. Остановимся лишь на модели, описанной в [10, 11], как модель первого типа.

Разобьем временной отрезок моделирования РС  $[0, T]$  в соответствии с (3.3) на отрезки  $\Omega_i = [T_{i-1}, T_i)$ ,  $T_i = t - a_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , которые определяют  $n$  возрастных групп  $M_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , элементов развивающейся системы. Считаем, что  $x(s) \in M_i$ , если  $t - s \in \Omega_i$ . Будем полагать, что в пределах одной возрастной группы коэффициент эффективности от  $s$  не зависит, и  $K_i(t, s) \equiv \beta_i(t) > 0$ , причем  $\beta_i(t) \geq \beta_{i+1}(t)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Пусть  $T^*$  — средний срок жизни элементов системы,  $T^* \ll T$ . Модель первого типа [10, 11] характеризуется тем, что с момента возникновения системы до некоторого  $T_1 < T^*$  все элементы функционируют максимально эффективно и принадлежат группе  $M_1$ ,  $\Omega_1 = [0, T_1)$ , а остальные группы

пусты, т.е.  $a_i(t) = 0$ ,  $t \in \Omega_1, i = \overline{1, n}$ . Тогда уравнение (3.3) принимает вид:

$$\beta_1(t) \int_0^t x(s) ds = f(t), \quad t \in \Omega_1.$$

Поскольку границы временных отрезков  $\Omega_i$  полагаются не зависящими от  $t$  и  $a_i(T_i) = 0$ , то

$$a_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_i), \\ t - T_i, & t \in \Omega_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1},$$

и рассматривают совокупность  $n$  уравнений [10, 11]:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i(t) \int_{t-T_i}^{t-T_{i-1}} x(s) ds + \beta_k(t) \int_0^{t-T_{k-1}} x(s) ds = f(t), \quad t \in \Omega_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.4)$$

В работе [10] приведено доказательство теоремы о существовании кусочно-непрерывного решения (3.4) на  $[0, T] = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k$ .

**Теорема 3.2.1.** [10] Пусть в (3.4)  $n = 4$ ,  $f(t)$  и  $\beta_i(t)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , непрерывно дифференцируемы на  $[0, T]$ ,  $\beta_4(t) \equiv 0$  и  $f(0) = 0$ . Пусть также  $T_3 < T \leq 2T_3$ ,  $l_1 > l_2 > l_3$  и  $l_1 > l_2 + l_3$ ,  $l_k = T_k - T_{k-1}$   $k = \overline{1, n-1}$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T_n = T$ . Тогда решение (3.4) существует и единственно в классе кусочно-непрерывных функций, причем число точек разрыва не более 10.

При применении односекторной интегральной модели описанного типа (3.4) для анализа развития современной ЭЭС России с учетом старения оборудования электростанций количественные характеристики интерпретируются следующим образом [10, 11]:  $x(t)$  – генерирующая мощность, введенная в момент  $t$ ;  $\beta_i(t)$  – коэффициент эффективности использования в момент  $t$

генерирующих мощностей  $x(t)$  возрастной группы  $M_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $f(t)$  — экспертно задаваемая располагаемая мощность ЭЭС.

За ноль можно принять 1950 год, в котором наблюдался резкий рост, относительно предыдущих годов, введенных мощностей. Возрастные группы  $M_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , генерирующих мощностей  $x(t)$  разделяются границами  $T_1 = 30$ ,  $T_2 = 50$ ,  $T_3 = 60$ ,  $T = 100$  (лет). Коэффициенты эффективности считаются постоянными и методом экспертных оценок выбраны значения  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0,97$ ,  $\beta_3 = 0,9$ . Элементы системы, чей возраст превышает 60 лет, считаются неэффективными и выводятся из эксплуатации без возможности возврата.

Тогда уравнение

$$\int_{t-30}^t x(s)ds + 0,97 \int_{t-50}^{t-30} x(s)ds + 0,9 \int_{t-60}^{t-50} x(s)ds = f(t), \quad t \in [60, 100], \quad (3.5)$$

позволит определить стратегию ввода новых мощностей, начиная с 2010 и до 2050 г. включительно, которая обеспечит заданные темпы роста располагаемой мощности  $f(t)$  при известных данных о вводах мощностей по годам в период с 1950 по 2009 г. включительно.

### 3.3 Алгоритм численного решения задачи прогноза развития ЭЭС России и его реализация

Алгоритм построения прогноза развития ЭЭС заключается в последовательном вычислении значений генерирующих мощностей, которые необходимо вводить в ЭЭС России для достижения ежегодного заданного темпа роста располагаемой мощности. Он реализован в среде Maple 13 (лицензия № ID 436951 от 12.10.2009 г., бессрочная) с использованием встроенных пакетов linalg, SumTools, numtheory, plots, stats.

Работа метода организована в два последовательных цикла. Первый осуществляет подсчет весов (используя одношаговые методы для основной части и двухшаговые для предыстории), необходимых для запуска итерационного процесса, который реализуется вторым циклом. Осуществляется контроль знака получаемых мощностей, каждое отрицательное значение заменяется нулевым. Это означает, что нет необходимости ввода новых мощностей в определенные года (следует заметить, что при построении прогнозов отрицательных значений не возникало, значит при данных входных условиях необходима ежегодная непрерывная модернизация ЭЭС России).

Для облегчения понимания принципа вычисления приведем иллюстрацию, основанную на геометрическом смысле определенного интеграла.

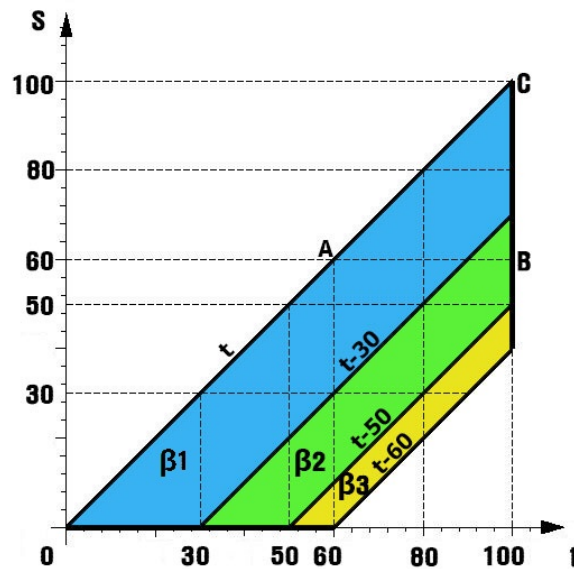


Рисунок 3.1

На Рисунке 3.1 верхняя часть заштрихованной фигуры представляет возрастную группу  $M_1$  – самые новые мощности; средняя часть заштрихованной фигуры –  $M_2$ , поэтому интегралы соответствующие этой части фигуры будут умножаться на соответствующий коэффициент эффективности  $\beta_2 = 0,97$ ; аналогично интегралы, соответствующие нижней части заштрихованной фигуры, будут вычисляться с коэффициентом эффективности  $\beta_3 = 0,9$ . Пло-

щадь треугольника, расположенного под заштрихованной фигурой не рассчитывается, т.к. представляет устаревшие мощности, которые были выведены из эксплуатации.

Станем последовательно рассматривать временные промежутки, начиная с  $\Omega_1 = [0, 30)$ . В этот период времени все функционирующие мощности являются новыми и содержатся в группе  $M_1$ . При этом система моделируется ИУВ I рода

$$\int_0^t x(s)ds = f(t), \quad t \in \Omega_1.$$

Но значения мощностей введенных во временном промежутке  $\Omega_1$  нам известны, они содержатся в предыстории. Условно обозначим множество этих значений за  $x^1$ . По той же причине, нас не будет интересовать рассмотрение временных интервалов  $\Omega_2 = [30, 50)$  и  $\Omega_3 = [50, 60)$ . Упорядоченные множества введенных в эти промежутки мощностей условно обозначим за  $x^2$  и  $x^3$  соответственно.

Для аппроксимации интегралов в уравнении (3.5) на основном отрезке  $[60, 80]$  и затем  $[81, 100]$  применим одношаговые, а на предыстории — двушаговые явные методы Адамса с шагом  $h = 1$  (год).

На Рисунке 3.2. приведена блок-схема алгоритма реализации многошаговых методов для численного решения задачи (3.5), который сводится к выполнению следующих пунктов:

1. Ввод исходных данных: присваиваем  $x_i$ ,  $i = \overline{1, 60}$ , значения вводимых генерирующих мощностей по годам, начиная с 1950 г., желаемый темп роста располагаемой мощности  $r$  (например:  $r := 1,01$  или  $r := 1,02$ , что означает ежегодный рост в 1% и 2% соответственно).

2. Вычисление располагаемой мощности в 2009 г. средствами встроенных функций `evalf(Sum(f, x=a..b))` пакета `SumTools` по формуле:



$$f_1 = \sum_{i=31}^{60} x_i + 0,97 \sum_{i=11}^{30} x_i + 0,9 \sum_{i=1}^{10} x_i.$$

3. Расчет необходимых для запуска итерационного процесса весов многошаговых методов организован двумя вложенными циклами по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \omega_{u,u} &= 23, \\ \omega_{u,u-1} &= \omega_{u-1,u-1} - 16, \\ \omega_{u,u-2} &= \omega_{u-1,u-2} + 5, \quad u = \overline{4, 29}, \\ \omega_{u,m} &= \omega_{u-1,m}, \quad m = \overline{1, u-3}. \end{aligned}$$

4. Запуск цикла при  $i = \overline{1, 41}$  вычисляются:

- желаемые располагаемые мощности  $f_{i+1} = f_i \cdot r$ ;
- значения необходимых генерирующих мощностей средствами встроенных функций `evalf(Sum(f, x=a..b))` пакета `SumTools` по формуле:

$$\begin{aligned} x_{i+60} &= \frac{2}{v_{i+1,i+1}} \left( f_{i+1} - \sum_{l=1}^i v_{i+1,l} x_{l+59} - 0,9 \sum_{l=1}^{10} \omega_{10,l} x_{l+i} - \right. \\ &\left. - 0,97 \sum_{l=1}^{20} \omega_{20,l} x_{l+10+i} - \frac{1}{12} \sum_{l=1}^{30-i} \omega_{30-i,l} x_{i+30+l} \right), \quad i = \overline{1, 41}, \end{aligned}$$

где веса

$$\nu_{i+1,l} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \omega_{i+1,l} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 \\ 9 & 5 & 11 & 23 \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

если  $x_i < 0$ , то присваивается  $x_i = 0$ .

## 6. Вывод диаграммы генерирующих мощностей ЭЭС России по годам.

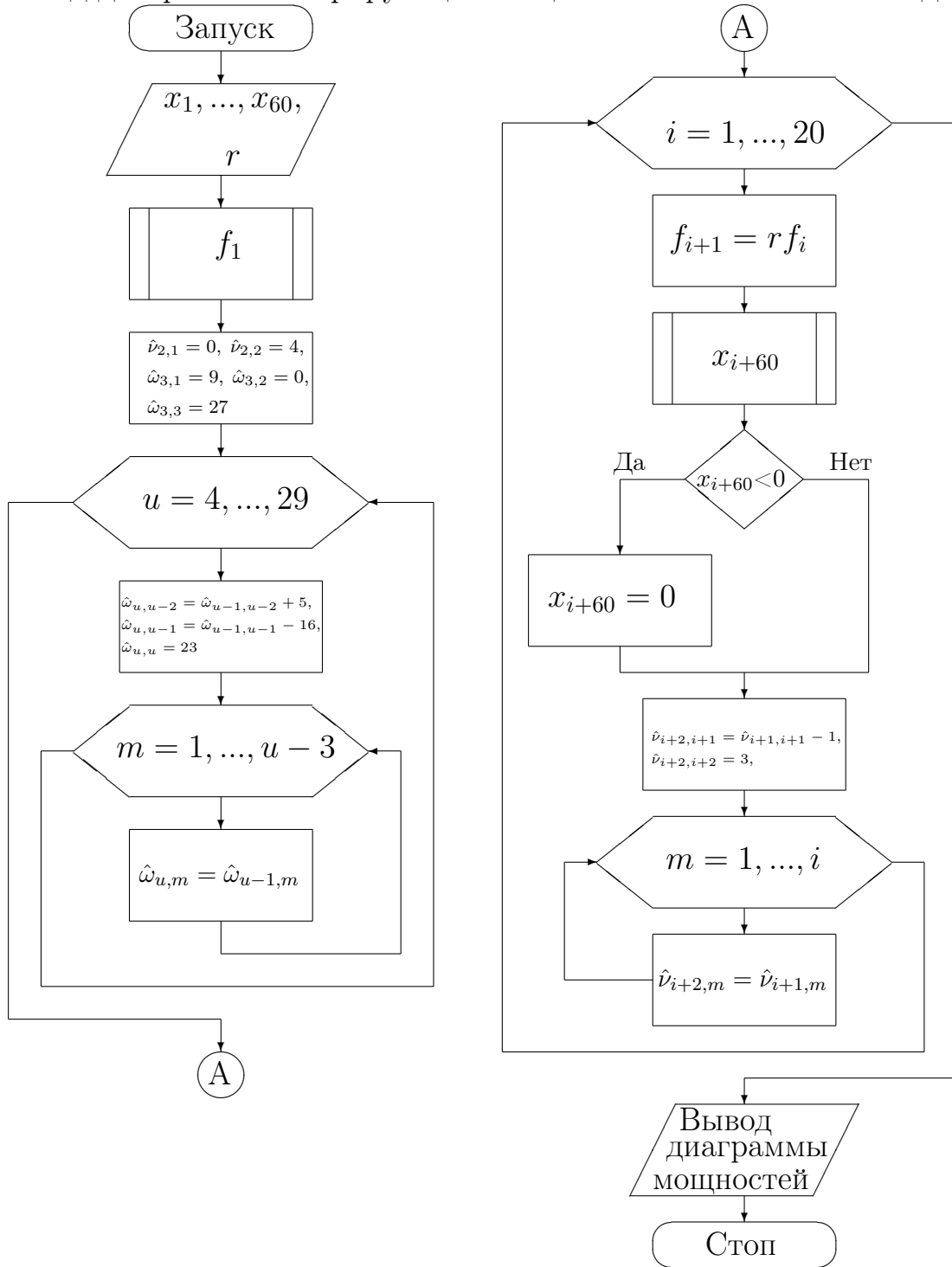


Рисунок 3.2 — Блок схема алгоритма построения прогноза развития ЭЭС России

На Рисунке 3.3 приведен полученный прогноз ввода генерирующих мощностей на период с 2010 по 2050 г., обеспечивающий ежегодный прирост располагаемых мощностей на 2%, который можно сравнить с результатами, полученными в [10] в 2013 г.

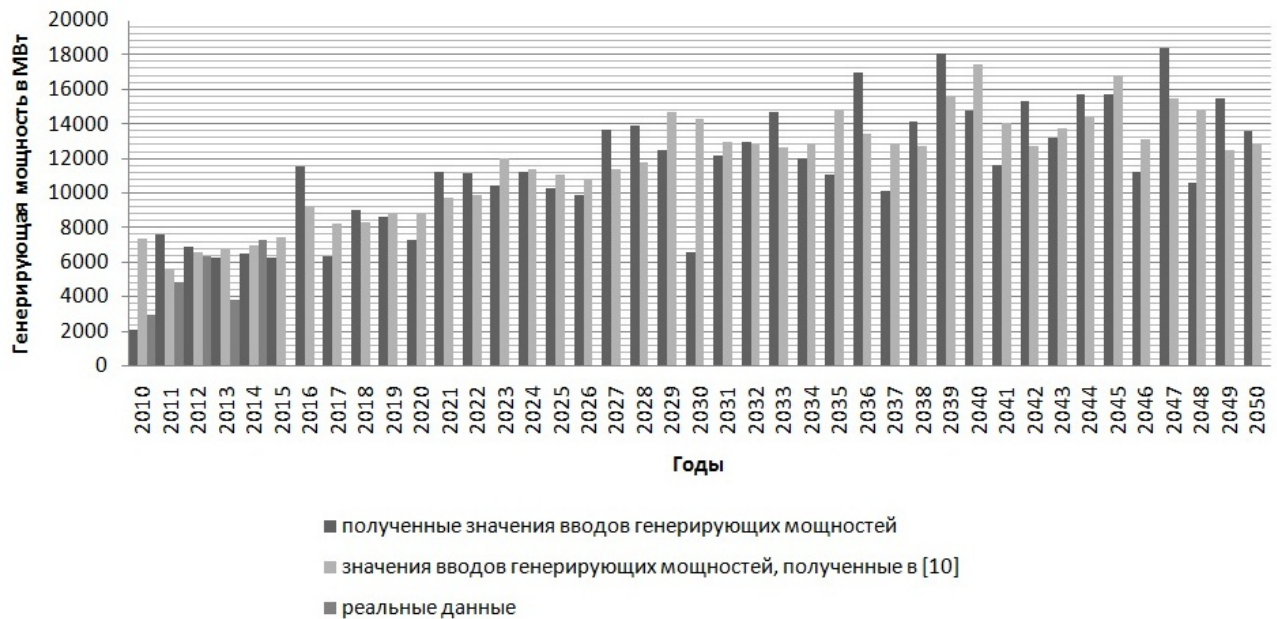


Рисунок 3.3 — Сравнение прогнозов ввода генерирующих мощностей с 2010 по 2050 г., темп роста располагаемой мощности — 2 % ежегодно

В [10] указано, что расчеты по модели (3.5) показали необходимость суммарного ввода на период с 2010 по 2020 г. 76,6 гигаватт генерации, что хорошо согласуется с планами министерства энергетики РФ — 76,1 гигаватт. Расчет по предложенному выше алгоритму при аналогичных параметрах дает в результате 75,8 гигаватт, что несколько ближе к плану министерства. Такой результат подтверждает адекватность модели (3.5) и эффективность предлагаемого численного метода.

На Рисунках 3.4 и 3.5 приведен прогноз ввода генерирующих мощностей на период с 2016 до 2056 г. с ежегодным ростом располагаемых мощностей в 1% и 2% соответственно.

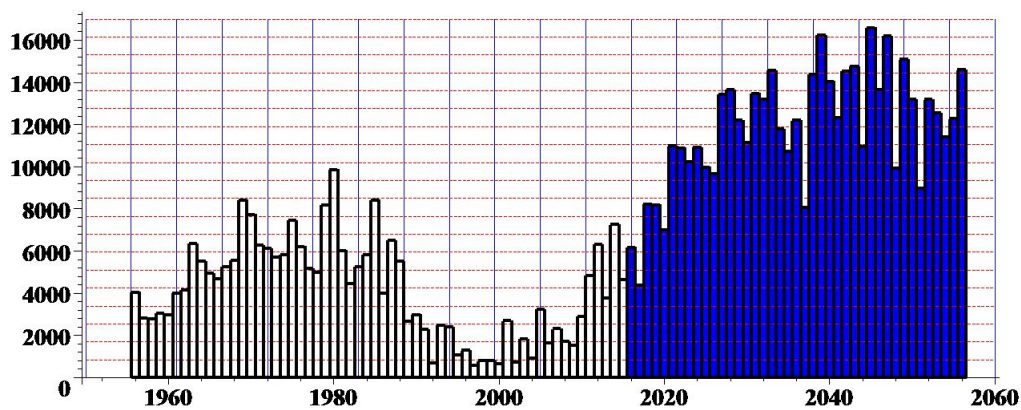


Рисунок 3.4 — Данные ввода генерирующих мощностей с 1956 по 2015 г. и стратегия вводов с 2016 по 2056 г. с ежегодным ростом располагаемой мощности на 2%, МВт

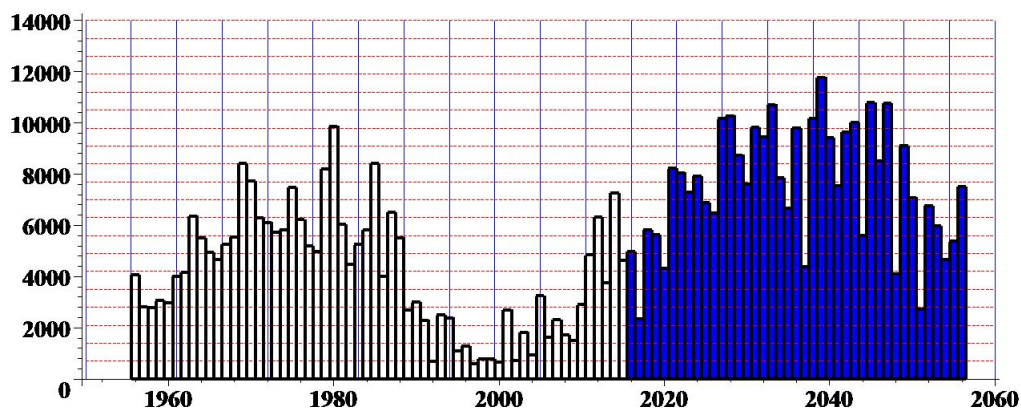


Рисунок 3.5 — Данные ввода генерирующих мощностей с 1956 по 2015 г. и стратегия вводов с 2016 по 2056 г. с ежегодным ростом располагаемой мощности на 1%, МВт

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена моделированию развивающихся систем на основе нового класса задач ИАУ с переменными пределами интегрирования.

В диссертационной работе получены следующие **основные результаты**:

1. Модель развивающихся систем представлена в виде ИАУ с переменными пределами интегрирования.
2. Получены условия существования единственного непрерывного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования. С ее помощью исследованы модели ЭЭС на предмет существования единственного непрерывного решения.
3. Построены и программно реализованы (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614303)  $k$ -шаговые методы для численного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования. Проведены численные эксперименты, подтверждающие, что данные методы сходятся к точному решению с порядком  $k + 1$ .
4. Построены и программно реализованы (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615853)  $L$ -устойчивые безытерационные методы численного решения систем нелинейных ИУВ II рода. Построена их область устойчивости.
5. Проведен сравнительный анализ предложенных методов для численного решения ИУВ II рода с ранее известными в вычислительных экспериментах, демонстрирующих вычислительную эффективность их применения.
6. Разработан алгоритм применения одношагового метода для численного решения ИУВ I рода с переменными пределами интегрирования (3.5),

с помощью которого получена стратегия ввода генерирующих мощностей ЭЭС России для достижения заданного уровня роста располагаемой мощности.

Результаты включены в программу курса по выбору «Численные методы решения интегральных уравнений» ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» и могут быть рекомендованы для применения в ФГБУН Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, ФГБУН Институт вычислительного моделирования СО РАН, ФГБУН Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН.

## Список литературы

- [1] Анциферов, Е. Г. Математические задачи энергетики (модели, методы, решения): Науч. отчет. / Е. Г. Анциферов, А. С. Апарцин, Л. Т. Ащепков, В. П. Булатов. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1987. – 286 с.
- [2] Апарцин, А. С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра 1 рода методом квадратур / А. С. Апарцин, А. Б. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: ИГУ, 1972. – Вып. 1. – С. 248–258.
- [3] Апарцин, А. С. О применении различных квадратурных формул для приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / А. С. Апарцин // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: ИГУ, 1973. – Вып. 2. – С. 107–116.
- [4] Апарцин, А. С. Применение моделей В.М. Глушкова для моделирования долгосрочных стратегий развития ЕЭЭС / А. С. Апарцин, А. М. Тришечкин // Тез. докл. Всесоюз. конф. «Курс-4». – Рига, 1986. – С. 17–19.
- [5] Апарцин, А. С. Дискретизационные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений I рода / А. С. Апарцин // Методы численного анализа и оптимизации. – Новосибирск: Наука, Сиб. отделение. – 1987. – С. 263–297.
- [6] Апарцин, А. С. Об интегральных уравнениях Вольтерра I рода в теории развивающихся систем / А. С. Апарцин // Численные методы оптимизации и анализа. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. – 1992. – С. 58–67.
- [7] Апарцин, А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А. С. Апарцин. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. – 193 с.

- [8] Апарцин, А. С. Интегральные модели развития электроэнергетических систем / А. С. Апарцин, Е. В. Маркова, В. В. Труфанов. – Препринт № 1 – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2002. – 36 с.
- [9] Апарцин, А. С. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики / А. С. Апарцин, И. В. Караулова, Е. В. Маркова, В. В. Труфанов // Электричество. – 2005. – № 10. – С. 69–75.
- [10] Апарцин, А. С. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем / А. С. Апарцин, И. В. Сидлер // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 6. – С. 3–16.
- [11] Апарцин, А. С. Интегральные модели развития систем электроэнергетики с учетом старения оборудования электростанций / А. С. Апарцин, И. В. Сидлер // Электронное моделирование. – 2014. – Т. 36. – № 4. – С. 81–88.
- [12] Апарцин, А. С. К теории интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами / А. С. Апарцин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56. – № 5. – С. 824–839.
- [13] Балакина, Е. А. Решение систем дифференциально-алгебраических уравнений высоких индексов / Е. А. Балакина, Е. Б. Кузнецов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40. – № 2. – С. 199–206.
- [14] Ботороева, М. Н. О линейных неклассических интегро-алгебраических уравнениях и их численном решении / М. Н. Ботороева // III Российско-Монгольская конференция молодых ученых по математическому моде-



лированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2015. – С. 21.

- [15] Ботороева, М. Н. Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Ботороева, М. В. Булатов // Тезисы докладов международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. – М.: РУДН, 2015. – С. 37–38.
- [16] Ботороева, М. Н. О численном решении интегро-алгебраических уравнений / М. Н. Ботороева, О. С. Будникова // IX Всероссийская научно-практическая конференция учителей и преподавателей математики «Современные проблемы обучения математике». – Иркутск: ООО «Издательство Оттиск», 2016. – С. 126–132.
- [17] Ботороева, М. Н. Численное решение интегро-алгебраических уравнений блочными методами / М. Н. Ботороева, М. В. Булатов // Восьмая международная молодежная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск: ИВМиМТ СО РАН, 2016. – С. 35.
- [18] Ботороева, М. Н. Численное решение интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования многошаговыми методами / М. Н. Ботороева, М. В. Булатов // Восьмая международная молодежная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». – Новосибирск: ИВМиМТ СО РАН, 2016. – С. 36.
- [19] Ботороева, М. Н. Многошаговые методы и их модификация для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными преде-

- лами интегрирования / М. Н. Ботороева, О. С. Будникова // X Всероссийская научно-практическая конференция, посвященная 90-летию со дня рождения профессора Б. А. Бельтюкова, «Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании». – Иркутск: ООО «Издательство Оттиск», 2017. – С. 167–172.
- [20] Ботороева, М. Н. Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Ботороева, М. В. Булатов // Известия иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2017. – Т. 20. – С. 3–16.
- [21] Ботороева, М. Н. Численное решение интегро-алгебраических уравнений блочными методами / М. Н. Ботороева, М. В. Булатов // Межд. конф., посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева, «Математика в современном мире» (Новосибирск, 14-19 августа 2017г.): Тез. докладов / под ред. Г. В. Демиденко. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. – С. 385.
- [22] Ботороева, М. Н. Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами / М. Н. Ботороева, О. С. Будникова // VIII Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докладов. – Якутск: Изд-во Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, 2017. – С. 74.
- [23] Бояринцев, Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.

- [24] Будникова, О. С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / О. С. Будникова, М. В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52. – № 5. – С. 829–839.
- [25] Будникова, О. С. Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений индекса два / О. С. Будникова, М. Н. Ботороева // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2019. – № 2. – С. 3–15.
- [26] Булатов, М. В. О вырожденных системах интегральных уравнений типа Вольтерра / М. В. Булатов // Интегральные уравнения и краевые задачи мат. физики. Тр. Всесоюз. конференции. Ч.2. – Владивосток. – 1992. – С. 18–22.
- [27] Булатов, М. В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнения / М. В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34. – №3 – С. 360–372.
- [28] Булатов, М. В. О нелинейных системах интегральных уравнений четвертого рода / М. В. Булатов // Тр. XI Междунар. Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1998. – Т. 4. – С. 68–71.
- [29] Булатов, М. В. О преобразовании вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра / М. В. Булатов // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5. – № 4. – С. 22–30.
- [30] Булатов, М. В. Методы решения дифференциально-алгебраических и вырожденных интегральных систем : дис. ... докт. физ. мат. наук / М. В. Булатов. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2002. – 244 с.

- [31] Булатов, М. В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М. В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42. – № 3. – С. 330–335.
- [32] Булатов, М. В. О построении неклассических разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Булатов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 4. – С. 546–557.
- [33] Булатов, М. В. Об одном классе интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. В. Булатов, М. Н. Мачхина // Журнал Средне-Волжского математического общества. – 2010. – Т. 12. – № 2. – С. 40–45.
- [34] Булатов, М. В. Об одном методе решения интегральных уравнений Вольтерра II рода / М. В. Булатов, М. Н. Мачхина // Тезисы докладов II Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2013. – С. 18.
- [35] Булатов, М. В. Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Булатов, А. В. Тыглиян, С. С. Филиппов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51. – № 7. – С. 1251–1265.
- [36] Булатов, М. В. Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений / М. В. Булатов, О. С. Будникова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6. – № 4. – С. 5–14.

- [37] Булатов, М. В. Некоторые особенности поведения численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра II рода / М. В. Булатов, М. Н. Мачхина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 3. – С. 496–502.
- [38] Ваарман, О. Обобщенные обратные отображения / О. Ваарман. – Таллинн: Валгус, 1988. – 120 с.
- [39] Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, решения / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 543 с.
- [40] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1986. – 576 с.
- [41] Глушков, В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей / В. М. Глушков // Управляющие системы и машины. – 1977. – № 2. – С. 3–6.
- [42] Глушков, В. М. Моделирование развивающихся систем / В. М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 350 с.
- [43] Деккер, К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М.: Мир. – 1988. – 334 с.
- [44] Денисов, А. М. Интегро-функциональные уравнения для решения обратной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения / А. М. Денисов // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 9. – С. 1203–1209.

- [45] Дмитриев, С. С. Численное решение систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом / С. С. Дмитриев, Е. Б. Кузнецов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 3. – С. 430–444.
- [46] Каракеев, Т. Т. Численное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода / Т. Т. Каракеев // Вестник СГТУ (Самарский государственный технический университет). Естествен.-техн. науки. – Самара: СГТУ, 2004. – Вып. 30. – С. 73–76.
- [47] Караулова, И. В. О моделировании развития электроэнергетических систем с помощью интегральных моделей / И. В. Караулова, Е. В. Маркова, В. В. Труфанов, О. В. Хамисов // Методы исследования и моделирования технических, социальных и природных систем: Сб. науч. тр. – Новосибирск : Наука, 2003. – С. 85–100.
- [48] Караулова, И. В. Об интегральной модели развития электроэнергетических систем / И. В. Караулова, Е. В. Маркова // Труды Байкальской всероссийской конференции «Информационные и математические технологии». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2004. – С. 90–96.
- [49] Караулова, И. В. Численное решение неклассического интегрального уравнения Вольтерра I рода / И. В. Караулова, Е. В. Маркова // Труды Международной конференции по вычислительной математике МКВМ-04. Ч. II. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2004. – С. 498–502.
- [50] Караулова, И. В. Численные методы решения уравнения Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования / И. В. Караулова // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – Т. 3. – С. 129–134.

- [51] Караулова, И. В. Задача оптимального управления развитием энергетической системы / И. В. Караулова, Е. В. Маркова // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 101–108.
- [52] Каханер, Д. Численные методы и программное обеспечение: пер. с англ. / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
- [53] Краснов, М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
- [54] Кузнецов, Е. Б. Решение дифференциально-алгебраических уравнений с выбором наилучшего аргумента / Е. Б. Кузнецов, В. И. Шалашилин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1997. – Т. 37. – № 6. – С. 711–722.
- [55] Кузнецов, Е. Б. Решение дифференциально-алгебраических уравнений методом продолжения по наилучшему параметру / Е. Б. Кузнецов, В. И. Шалашилин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 3. – С. 379–387.
- [56] Кузнецов, Е. Б. Численное интегрирование системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом / Е. Б. Кузнецов, В. Н. Микрюков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47. – № 1. – С. 83–95.
- [57] Лаврентьев, М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, С. Я. Савельев. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999. – 702 с.
- [58] Магницкий, Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н. А. Магницкий // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19. – №4 – С. 970–989.

- [59] Маркова, Е. В. О численных методах решения интегральных уравнений Вольтерра I рода в моделях развивающихся систем / Е. В. Маркова // Proceedings of the International Workshop «Tools for Mathematical Modelling», SPb, Dec. 3-6, 1997. – СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. – С. 171–175.
- [60] Маркова, Е. В. Об особенностях численного решения уравнения Вольтерра I рода с переменным нижним пределом / Е. В. Маркова // Труды XI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1998. – Т. 4. – С. 134–137.
- [61] Маркова, Е. В. Численные методы решения неклассических линейных уравнений Вольтерра I рода и их приложения: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Е. В. Маркова. – Иркутск: ИГУ, 1999. – 100 с.
- [62] Маркова, Е. В. О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике / Е. В. Маркова, И. В. Сидлер, В. В. Труфанов // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 20–28.
- [63] Мачхина, М. Н. Численное решение интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Мачхина // Современные проблемы обучения математике и информатике. Часть I. Современные проблемы обучения математике: материалы V Всероссийской научно-практической конференции учителей и преподавателей математики и информатики, посвященной памяти И.Г. Пудалова. – Иркутск: Вост.-Сиб. Гос. академ. образов., 2012. – С. 133–138.
- [64] Мачхина, М. Н. Численное решение интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. Н. Мачхина // Анали-



тическая механика, устойчивость и управление: Труды X Международной Четаевской конференции. Т.1. Секция 1. Аналитическая механика. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – С. 340–345.

- [65] Мачхина, М. Н. О существовании и единственности решения интегро-алгебраических уравнений с многими переменными пределами интегрирования / М. Н. Мачхина // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2013. – С. 40.
- [66] Мышкис, А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
- [67] Михлин, С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
- [68] Презентация к докладу министра энергетики РФ А.В. Новака на совещании у председателя Правительства РФ Д.А. Медведева «Об основных мероприятиях модернизации российской электроэнергетики до 2020 года» [Электронный ресурс], Минэнерго РФ. — 2012. — Режим доступа: [http://www.bigpowernews.ru/photos/0/0\\_oi3e1VIOOENxOy068D3YnuDiqY5MjO0x.pdf](http://www.bigpowernews.ru/photos/0/0_oi3e1VIOOENxOy068D3YnuDiqY5MjO0x.pdf) (дата обращения: 16.09.2019).
- [69] Ракитский, Ю. В. Численные методы решения жестких систем / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Чернорудский. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
- [70] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017614303. Программа численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования многошаговыми методами / М.Н. Ботороева ; заявитель и правообладатель ФГБОУ

ВО «Иркутский государственный университет». - № 2017611570 ; заявл. 27.02.2017 ; зарегистр. 11.04.2017. - 1 с.

- [71] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017615853. Неявный безытерационный метод численного решения жестких нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода / М.Н. Ботороева ; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет». - № 2017612716 ; заявл. 31.03.2017 ; зарегистр. 25.05.2017. - 1 с.
- [72] Сидоров, Н. А. Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 308–318.
- [73] Сидоров, Н. А. О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Математические заметки. – 2014. – Т. 96. – № 5. – С. 773–789.
- [74] Тен Мен Ян Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода: дис. . . . канд. физ. мат. наук / Тен Мен Ян. – Иркутск, 1985. – 215 с.
- [75] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
- [76] Тихонов, А. Н. Нелинейные некорректные задачи / А. Н. Тихонов, А. Г. Ягола. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 312 с.
- [77] Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы высоких порядков в банаховых пространствах и их приложения

ния / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 10. – С. 68–79.

- [78] Федоров, В. Е. Линейные уравнения соболевского типа с интегральным оператором запаздывания / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 1. – С. 71–81.
- [79] Федоров, В. Е. О локальном существовании решений уравнений с памятью, не разрешимых относительно производной по времени / В. Е. Федоров, О. А. Стахеева // Математические заметки. – 2015. – Т. 98. – № 3. – С. 414–426.
- [80] Федоров, В. Е. Исследование вырожденных эволюционных уравнений с памятью методами теории полугрупп операторов / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Сиб. матем. журнал. – 2016. – Т. 57. – № 4. – С. 899–912.
- [81] Чистяков, В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В. Ф. Чистяков // Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231–239.
- [82] Чистяков, В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
- [83] Яценко, Ю. П. Интегральные модели систем с управляемой памятью / Ю. П. Яценко. – Киев: Наукова думка, 1991. – 220 с.
- [84] Aparicio, R. Well-posedness of degenerate differential equations in function space / R. Aparicio, V. Keyantuo // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018. – № 79. – P. 1–31.

- [85] Baker, C.T.H. Analysis via integral equations of an identification problem for delay differential equations / C.T.H. Baker, E. I. Parmuzin // Journal of Integral Equations and Applications. – 2004. – Vol. 16. – № 2. – P. 111–135.
- [86] Balachandran, K. Nonlinear integrodifferential equation of Sobolev type with nonlocal conditions in Banach Spaces / K. Balachandran, D. G. Park, Y. C. Kwun // Comm. Korean Math. Soc. – 1999. – Vol. 14. – № 1. – P. 223–231.
- [87] Botoroeva, M. N. Multistep methods for solving nonclassical integro-algebraic equations / M. N. Botoroeva // Abstracts of Second Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations (July 1-7, 2017), Olkhon Island, Lake Baikal. – Irkutsk: ISU Publ., 2017. – P. 16.
- [88] Brauer, F. A class of Volterra integral equations arising in delayed-recruitment population models / F. Brauer // Natural Resource Modelling. – 1987. – Vol. 2. № 2. – P. 259–278.
- [89] Brunner, H. Discretization of Volterra Integral Equations of the first kind (I) / H. Brunner // Math. Comput. – 1977. – Vol. 31. – P. 708–716.
- [90] Brunner, H. Discretization of Volterra Integral Equations of the first kind (II) / H. Brunner // Numer. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 117–136.
- [91] Brunner, H. The numerical solution of Volterra equations / H. Brunner, P. J. van der Houwen. – Amsterdam: North-Holland, CWI Monographs 3, 1986. – 588 p.
- [92] Brunner, H. 1896-1996: One hundred years of Volterra integral equations of the first kind / H. Brunner // Applied Numerical Mathematics. – 1997. – Vol. 24. – P. 83–93.

- [93] Brunner, H. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels / H. Brunner, M. V. Bulatov // Proceeding of the 11-th Baikal International School-Seminar «Optimization Methods and their Applications». – Irkutsk: ESI SB RAS, 1998. – Vol. 4. – P. 64–67.
- [94] Brunner, H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations / H. Brunner. – University Press, Cambridge, 2004. – 612 p.
- [95] Brunner, H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications / H. Brunner. – Cambridge University Press, Cambridge, 2017. – 402 p.
- [96] Bu, S. Q. Solutions of second order degenerate integro-differential equations in vector-valued function spaces / S. Q. Bu, G. Cai // Sci. China Math. – 2013. – Vol. 56. – № 5. – P. 1059–1072.
- [97] Bulatov, M. V. The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs / M. V. Bulatov, V. F. Chistyakov. – Preprint, Memorial University of Newfoundland, 1997. – 35 p.
- [98] Bulatov, M. V. Existence and uniqueness of solutions to integral-algebraic equations with variable limits of integrations / M. V. Bulatov, M. N. Machkhina, V. N. Phat // Communications on Applied Nonlinear Analysis. – 2014. – Vol. 21. – No. 1. – P. 65–76.
- [99] Bulatov, M. V. Multistep methods for numerical solution of integral-algebraic equations with variable limits of interation / M. V. Bulatov, M. N. Machkhina // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. – Bishkek: Matimatical Sociaty of Kyrgyz, 2014. – P. 101.

- [100] Chen, Y. Legendre spectral-collocation method for Volterra integral differential equations with nonvanishing delay / Y. Chen, Z. Gu // Commun. Appl. Math. Comput. Sci. – 2013. – Vol. 8. – № 1. – P. 67–98.
- [101] Favini, A. Singular integro-differential equations of parabolic type / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // Adv. Diff. Eqs. – 2002. – Vol. 7. – P. 769–798.
- [102] Hadizadeh, M. Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2 / M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, S. Pishbin // Appl. Numer. Math. – 2011. – Vol. 61. – № 1. – P. 131–148.
- [103] Gear, C. W. Differential-algebraic equations, indices, and integral algebraic equations / C. W. Gear // SIAM J. on Numer. Anal. – 1990. – Vol. 27. – № 6. – P. 1527–1534.
- [104] Kauthen, J. P. The numerical solution of integral-algebraic equations of index-1 by polynomial spline collocation methods / J. P. Kauthen // Math. Comp. – 2000. – Vol. 236. – P. 1503–1514.
- [105] Kershaw, D. Volterra equations of the second kind, in: Delves & Walsh, 1974. – P. 140–161.
- [106] Kopachevsky, N. D. Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // Eurasian Math. J. – 2013. – Vol. 4. – № 4. – P. 64–87.
- [107] Kostić, M. Perturbation results for abstract degenerate Volterra integro-differential equations / M. Kostić // J. Fract. Calc. Appl. – 2018. – Vol. 9. – № 1. – P. 137–152.

- [108] Linz, P. Numerical Methods for Volterra Integral Equations of the First Kind / P. Linz // *Comput. J.* – 1969. – Vol. 12. – P. 393–397.
- [109] Linz, P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations / P. Linz. – SIAM, Philadelphia, 1985. – 227 p.
- [110] Lizama, C. Maximal regularity for degenerate differential equations with infinite delay in periodic vector-valued function spaces / C. Lizama, R. Ponce // *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.* – 2013. – Vol. 56. – № 3. – P. 853–871.
- [111] Machkhina, M. N. Non-classical method for stiff Volterra integral equations of the second kind / M. N. Machkhina // Abstracts of International seminar «Numerical solution of integral and differential equations». – Irkutsk-Baikal, 2014. – P. 9.
- [112] Morozov, V. A. Methods of solution of ill-posed problems: algorithmic aspect / V. A. Morozov, A. I. Grebennikov. – M.: Moscow University Press., 2005. – 326 p.
- [113] Messina, E. Convergence of solutions for two delays Volterra integral equations in the critical case / E. Messina, Y. Muroyab, E. Russo, A. Vecchio // *Applied Mathematics Letters.* – 2010. – Vol. 23. – № 10. – P. 1162–1165.
- [114] Pishbin, S. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments / S. Pishbin, F. Ghoreishi, M. Hadizadeh // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2013. – Vol. 245. – № 1. – P. 121–132.

- [115] Sidorov, D. N. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 87 / D. N. Sidorov. – Singapore: World Sc. Publ., 2015. – 260 p.
- [116] Volterra, V. Sulle inversione degli integrali definiti / V. Volterra // Nota I, Atti R. Accad. Sci. Torino. – 1896. – № 31. – P. 311–323.