

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГБОУ ВПО «Восточно-Сибирский государственный университет  
технологий и управления»

На правах рукописи

Итигилов Гарма Борисович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННЫХ ГИРОТРОПНЫХ  
ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Д.Ш. Ширапов  
Научный консультант:  
доктор физико-математических наук,  
доцент В.И. Сажин

Улан-Удэ  
2014

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
ГЛАВА 1. МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.....	16
1.1. Инварианты ограниченной области с обобщенно-ортогональным поперечным сечением и тензорным заполнением.....	17
1.1.1. Конические сечения.....	17
1.1.2. Тензоры в ортогональных криволинейных системах координат. Коэффициенты Ламэ. Символы Кристоффеля.....	22
1.1.3. Тензорные характеристики феррита для различных случаев намагничивания.....	31
1.2. Описание и применение метода .....	40
1.2.1. Пространственные дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных системах координат с учетом коэффициентов Ламэ и символов Кристоффеля.....	41
1.2.2. Общие формулы для получения уравнений Гельмгольца для НЕ и ЕН волн.....	45
1.2.3. Уравнения Гельмгольца НЕ и ЕН волн в ограниченных гиротропных областях с различными ортогональными формами поперечного сечения при продольном намагничивании.....	50
1.3. Выводы по главе.....	56
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ТЕНЗОРНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ.....	57
2.1. Общие уравнения электромагнитных волн в ограниченной области с обобщенно-ортогональным поперечным сечением и тензорным заполнением .....	57

2.1.1. Поперечные компоненты электромагнитного поля при произвольном намагничивании.....	58
2.1.2. Поперечные компоненты электромагнитного поля для различных случаев намагничивания.....	66
2.2. Граничные условия.....	71
2.3. Формулировка краевой задачи.....	76
2.4. Выводы по главе .....	77
<b>ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ГИРОТРОПНОЙ</b>	
<b>ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ.....</b>	
3.1. Характеристики эллиптической системы координат.....	78
3.2. Собственные функции эллиптического цилиндра. Функции Матье.....	80
3.3. Уравнения электромагнитного поля в ограниченной гиротропной эллиптической области.....	86
3.3.1. Поперечные компоненты электромагнитного поля для различных случаев намагничивания .....	86
3.3.2. Уравнения Гельмгольца при продольном намагничивании.....	91
3.4. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.....	92
3.4.1. Решения уравнений Гельмгольца гибридных EH и HE волн.....	93
3.4.2. Компоненты электромагнитного поля.....	98
3.5. Дисперсионные уравнения электромагнитных волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.....	100
3.6. Выводы по главе .....	103
<b>ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДЛЯ</b>	
<b>ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРОДОЛЬНО-НАМАГНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ..</b>	
4.1. Предельные переходы из гиротропной ограниченной области	

эллиптической формы в изотропный и цилиндрический для изотропного и гиротропного случаев.....	105
4.1.1.Преобразования уравнений Гельмгольца из эллиптических координат в цилиндрические для изотропного и гиротропного случаев.....	105
4.1.2.Вырождение обыкновенных и модифицированных функций Матье. Предельный переход дисперсионного уравнения.....	112
4.1.3. Преобразования уравнений Гельмгольца в эллиптических координатах из гиротропного в изотропный.....	118
4.2. Расчет дисперсии четных и нечетных EH и HE- волн в гиротропных эллиптических направляющих системах с продольно-намагниченным ферритом .....	119
4.3. Выводы по главе .....	132
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	133
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	135

## ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию распространения электромагнитных волн (ЭМВ) в регулярных ограниченных гиротропных областях с произвольной ортогональной формой поперечного сечения. На основе полученной обобщенной модели осуществлен анализ в ограниченных эллиптических гиротропных областях при продольном намагничивании.

**Актуальность темы.** Во многих областях физики и техники представляет важное научное и прикладное значение распространение электромагнитных волн (ЭМВ) в различных по форме и содержанию (воздух, диэлектрик, ферриты) ограниченных областях. Если содержанием являются ферриты, то ограниченные области будут гиротропными.

Известно, что характеристики электромагнитных волн в ограниченных гиротропных областях зависят от величины напряженности внешнего магнитного поля и его направления относительно направления распространения волны. Эта особенность ограниченных гиротропных областей представляет большой практический интерес с точки зрения различных технических приложений, так как она предоставляет более широкие возможности. Использование ферритов позволяет создать элементы электрической цепи, не удовлетворяющие принципу взаимности, но обладающие высокой скоростью управления режимом цепи: фазовращатели, быстродействующие переключатели, циркуляторы, модуляторы, перестраиваемые по частоте фильтры, ослабители, смесители, генераторы, преобразователи частоты, параметрические усилители [1, 2].

При распространении в регулярной эллиптической ограниченной области ЭМВ имеет меньшее затухание, чем в прямоугольной и круглой при равных периметрах поперечного сечения [3]. Кроме того, эллиптическая форма поперечного сечения позволяет сохранять положение плоскости поляризации волны по отношению к

сечению в отличие от круглой, у которой плоскость поляризации волны неустойчива и зависит от распределения деформации ее сечения по длине [3].

Впервые классическое изложение теории распространения электромагнитных волн в гиротропных средах было опубликовано в 1955 году в монографии Сула Г. и Уокера Л. [4], в которой моделировались волновые процессы в гиротропной ограниченной области с круглой формой поперечного сечения. Позднее, в 1965 году, в монографии Лакса Б. и Баттона К. [1] были обобщены результаты и выводы большого количества работ по теории распространения электромагнитных волн в ограниченной области с прямоугольной и круглой формами поперечного сечения, частично или полностью заполненных гиротропной средой. Там же описаны как точные, так и приближенные методы решения уравнений Гельмгольца, возникающих краевых задач. Огромный вклад в теорию моделирования волновых процессов в гиротропных средах внесли такие выдающиеся советские и российские ученые как Микаэлян А.Л. [2], Гуревич А.Г. [5], Вамберский М.В. [6], Федоров Ф.И. [7], Курушин Е.П. [8], Нефедов Е.И. [9] и другие.

Заметим, что основные вопросы описания распространения ЭМВ в ограниченных гиротропных средах регулярной формы решены, и результаты их решения успешно применяются в различных технических устройствах. Однако остается еще в этой области ряд нерешенных частных вопросов, важных для практических приложений, по решению которых ведутся исследования, как в России [10, 11], так и за рубежом [12, 13]. К их числу относится описание распространения ЭМВ в эллиптической ограниченной гиротропной области при продольном намагничивании. Решению этой актуальной задачи и посвящена, в частности, настоящая работа.

Отметим, что в исследованиях и трудах других авторов, моделирование волновых процессов в ограниченных гиротропных областях различной формы проводилось и проводится по традиционной схеме, которая позволяет на основе

системы дифференциальных уравнений Максвелла (СДУМ) получить и решить *частные* уравнения Гельмгольца, удовлетворяющие только конкретной форме ограниченной гиротропной области:

1. В зависимости от формы ограниченной гиротропной области выбирается система координат (для прямоугольной – декартовая, для круглой – цилиндрическая);

2. В выбранной системе координат из СДУМ получают уравнения Гельмгольца, соответствующие только этой форме (прямоугольной, круглой) ограниченной гиротропной области;

3. Решается краевая задача для соответствующих уравнений Гельмгольца с целью получения дисперсионного уравнения;

4. Решается дисперсионное уравнение;

5. Проводится анализ решений дисперсионного уравнения для исследования распространения ЭМВ в соответствующей области.

В рамках традиционной схемы до сих пор не решены, как уже указывалось выше, уравнения Гельмгольца для ограниченной гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.

В диссертации ставится и решается более широкая задача разработки математической модели распространения ЭМВ в ограниченных гиротропных областях с произвольными ортогональными формами поперечного сечения и на ее основе исследования распространения ЭМВ в этих областях путем математического моделирования и, в том числе, в ограниченной гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.

При решении поставленной задачи предлагается другой подход (отличный от традиционного) получения обобщенных уравнений Гельмгольца. *Впервые* полученные обобщенные уравнения Гельмгольца позволяют легко перейти к частным уравнениям Гельмгольца, соответствующим конкретным формам поперечного сечения и

моделировать процессы распространения ЭМВ в ограниченных гиротропных областях с различными формами (прямоугольной, круглой и т.д.). Кроме того, такой подход позволяет *впервые* выполнить моделирование распространения ЭМВ в ограниченной гиротропной области эллиптической формы при продольном намагничивании.

**Целью диссертационной работы** является разработка общей математической модели распространения электромагнитных волн в ограниченной продольно-намагниченной гиротропной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения и ее численно-программная реализация для моделирования общих закономерностей распространения ЭМВ в данной области.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **следующие задачи:**

1. Разработка обобщенных пространственных дифференциальных операторов I и II порядка для анализа свойств обобщенных изотропных и гиротропных ограниченных областей, учитывающих геометрию и тензорные свойства среды заполнения;
2. Разработка метода, позволяющего получить на основе СДУМ обобщенные уравнения Гельмгольца для ограниченных гиротропных областей с произвольными ортогональными формами поперечного сечения;
3. Разработка математической модели распространения электромагнитных волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании с получением и решением соответствующих уравнений Гельмгольца;
4. Развитие методов решения краевых задач, применяемых для изотропных ограниченных областей, на случай гиротропных областей;
5. Численный анализ и математическое моделирование дисперсионных характеристик с применением модифицированных пакетов программ Maple.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач используются методы тензорного анализа, методы укорочения исходного дифференциального уравнения [4, 10] и разделения переменных для решения краевых задач.



**Научную новизну** диссертации представляют следующие результаты:

– разработан метод инвариантных преобразований (МИП), позволяющий получить обобщенные уравнения Гельмгольца электромагнитного поля для ограниченной гиротропной области произвольной ортогональной формы;

– впервые получены обобщенные уравнения поперечных компонент электромагнитного поля для гиротропной эллиптической области для различных случаев намагничивания;

– впервые получены и решены краевые задачи и дисперсионные уравнения для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.

**Соответствие диссертации паспорту специальности.** Диссертация соответствует паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и ее областям: пункты 1, 2 и 6.

**Теоретическую и практическую ценность** представляют следующие результаты:

– разработанный метод инвариантных преобразований позволяет получить обобщенные уравнения Гельмгольца электромагнитного поля для ограниченных гиротропных областей произвольной ортогональной формы при различных случаях намагничивания. Эти уравнения могут быть также использованы при описании распространения ЭМВ в переходных участках, соединяющих области регулярной пространственной формы. Кроме того, они могут быть использованы для развития методов учета неоднородностей формы ограниченных областей;

– полученные и решенные уравнения Гельмгольца электромагнитного поля для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании позволяют исследовать особенности распространения электромагнитных волн в ней и промоделировать условия их распространения;

– полученные результаты могут быть использованы при решении различных задач на практике, в частности, могут применяться при разработке устройств

сверхвысокочастотного диапазона на основе гиротропных эллиптических направляющих систем.

**Достоверность результатов исследований** обеспечивается строгим аналитическим решением исходных уравнений Максвелла. Тестирование полученных решений уравнения Гельмгольца электромагнитного поля для эллиптической области выполнено посредством рассмотрения предельных переходов к известным решениям для случаев более простых изотропной и гиротропной областей круглой формы. Численное моделирование, использованное в работе, проведено в рамках известных, хорошо апробированных пакетов прикладных программ.

**Реализация результатов.** Исследования по теме диссертации проведены в рамках плановых госбюджетных тем (номера государственной регистрации: 01970005062, 01.2007.10054, 01201355800) кафедры «Электронные вычислительные системы» ФГБОУ ВПО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления» и научно-исследовательских работ развития ФГБОУ ВПО «Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления» на 2011-2015 годы.

**Апробация работы.**

Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались:

- на I Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование», г. Улан-Удэ, 2002;
- на V Всероссийской научно-практической конференции «Теоретические и прикладные вопросы современных информационных технологий», г. Улан-Удэ, 2004;
- на XIV Международном симпозиуме «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы», г. Улан-Удэ, 2007;
- на Международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии», г. Улан-Удэ, 2009;

- на VI Международной научно-практической конференции «Электронные средства и системы управления», Томск, 2010;

- на VI Международном научном семинаре «Обобщенные постановки и решения задач управления». Геленджик, Краснодарский край, 2012;

- на Международной научно-практической конференции «Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты», г. Тамбов, 31 мая 2014 г.;

- на VI Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире», г. С-Петербург, 17 июня 2014 г.;

- на V Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование», г. Улан-Удэ, 23-28 июня 2014 г.;

- на XIV Международной научно-практической конференции «Теория и практика современной науки», Москва, 2-3 июля 2014 г.

**Публикации.** По результатам исследований, выполненных в рамках диссертационной работы, опубликовано 17 статей, из них 5 входит в перечень рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК РФ.

**Основные научные результаты:**

1. Разработан метод инвариантных преобразований, с помощью которого впервые получены обобщенные уравнения Гельмгольца гибридных волн в гиротропной продольно-намагниченной ограниченной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения;

2. Разработана общая математическая модель распространения электромагнитных волн в ограниченной гиротропной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании, позволяющая моделировать общие закономерности распространения ЭМВ в этой области;

3. Решены краевые задачи для уравнений Гельмгольца электромагнитного поля для ограниченной гиротропной эллиптической области при продольном намагничива-

нии;

4. Получены новые дисперсионные уравнения электромагнитных волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании, с использованием которых численно исследованы связи между основными параметрами ЭМВ: соотношения скоростей распространения, длин волн, критической длины волн и критической частоты для гибридных волн.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка используемой литературы из 104 наименований. Объем работы составляет 146 страницы, из них 18 рисунков, 1 таблица.

**Во введении** обосновывается актуальность темы и цель диссертационной работы. Отмечается новизна и практическая ценность полученных результатов. Описывается краткое содержание диссертации.

**В первой главе** описан метод инвариантных преобразований, позволяющий на основе СДУМ получить общие аналитические выражения, из которых можно определить уравнения Гельмгольца НЕ- и ЕН- волн в гиротропных ограниченных областях с произвольными ортогональными формами поперечного сечения для различных случаев намагничивания.

Основу МИП составляет аппарат тензорного исчисления, позволяющий провести анализ распространения электромагнитных волн в ограниченной области с гиротропным заполнением, намагниченной вдоль одной из координатных осей. Удобство применения МИП для математического анализа ограниченных областей с произвольной обобщенно-ортогональной формой поперечного сечения является то, что метод обладает свойством инвариантности относительно преобразования системы координат.

Проведен анализ конических сечений, позволяющий сделать вывод об инвариантности наиболее часто встречающихся на практике формах поперечного сечения ограниченной области: прямоугольного, круглого, эллиптического.

Рассмотрены особенности дифференцирование тензоров по координатам в случае криволинейной системы координат, связанных с переменностью не только компонент, но и базисных векторов с помощью ковариантного дифференцирования.

На основе МИП получены обобщенные уравнения Гельмгольца гибридных HE и EH волн в гиротропной продольно-намагниченной ограниченной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения (волна распространяется вдоль продольной координаты  $Z$ ). Используя дифференциальные операторы II-го порядка, осуществлен переход к конкретным ограниченным областям: прямоугольным, круглым, эллиптическим. Проведено тестирование полученных новых обобщенных уравнений Гельмгольца путем предельного перехода к известным частным уравнениям Гельмгольца для указанных ограниченных изотропных областей [14, 15].

**Вторая глава** посвящена разработке математической модели распространения ЭМВ в ограниченной продольно-намагниченной гиротропной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения, которая определяется краевыми задачами Дирихле и Неймана для обобщенных уравнений Гельмгольца.

Получены поперечные компоненты ЭМВ в обобщенной ограниченной гиротропной области с ортогональными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании.

Поставленные краевые задачи Дирихле и Неймана для обобщенных уравнений Гельмгольца ЭМВ в гиротропной продольно-намагниченной ограниченной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения (волна распространяется вдоль продольной координаты  $Z$ ) и определение дифференциальных операторов I, II-го порядков с учетом коэффициентов Ламэ и символов Кристоффеля позволяет построить

на единой базе математическую модель распространения ЭМВ. Такой подход дает возможность промоделировать общие закономерности поведения ЭМВ в гиротропной ограниченной области с разными ортогональными формами поперечного сечения.

Показан способ перехода от ограниченной гиротропной области с произвольной формой поперечного сечения к наиболее часто встречающимся на практике областям (прямоугольной, круглой, эллиптической) при продольном намагничивании.

**В третьей главе** развивается методика решения краевых задач, применяемых для изотропных областей, на мало исследованный случай гиротропной эллиптической области. Методика включает в себя следующие этапы:

1) переход от гиротропных обобщенно-криволинейных ортогональных ограниченных областей к гиротропной эллиптической области при различных случаях намагничивания;

2) определение всех характеристик эллиптической системы координат: коэффициентов Ламэ, символов Кристоффеля, метрики пространства;

3) применение метода [4], впоследствии названного «методом укорочения исходных дифференциальных уравнений» для совместного решения уравнений Гельмгольца.

МИП позволяет легко осуществить переход к гиротропной эллиптической области, также как к любой другой ограниченной области с криволинейной ортогональной формой поперечного сечения и продольно-регулярной осью.

Показано, что когда ограниченная область имеет эллиптическую форму, собственными функциям являются четные и нечетные обыкновенные и модифицированные функции Матье.

В результате решения уравнений Гельмгольца с краевыми задачами Дирихле и Неймана были получены все шесть поперечных компонент гибридных волн при продольном намагничивании.

**Четвертая глава** посвящена проверке впервые полученных уравнений Гельмгольца и дисперсионных уравнений для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании. Проведен численный анализ полученных оригинальных дисперсионных уравнений.

Корректность уравнений Гельмгольца и дисперсионных уравнений проверялась путем предельных переходов и сравнения с известными уравнениями следующим образом:

- 1) эллиптическая гиротропная область при продольном намагничивании путем предельного перехода сводилась к круглой. При этом уравнения Гельмгольца и дисперсионные уравнения совпадают с известными [2, 5] уравнениями Гельмгольца и дисперсионным уравнением для гиротропной круглой области при продольном намагничивании;
- 2) эллиптическая гиротропная область при продольном намагничивании путем предельного перехода сводилась к эллиптической изотропной. При этом уравнения Гельмгольца и дисперсионные уравнения совпадают с известными [14] уравнениями Гельмгольца и дисперсионным уравнением для изотропной эллиптической области.

Так как полученные дисперсионные уравнения не решаются аналитически, то их анализ проводился численно. Для этого был составлен комплекс программ на основе программного пакета Maple.

Результаты численного решения новых дисперсионных уравнений позволяют проводить численный анализ распространения ЭМВ для различных сечений ограниченной эллиптической области и степени гиротропии заполнения;

**В заключении** приведены основные результаты диссертационной работы.

## ГЛАВА 1

### МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Заметим, что во всех исследованиях математического моделирования волновых процессов в ограниченных изотропных, анизотропных и гиротропных областях различной формы проводились и проводятся по традиционной схеме, описанной во введении [3, 14-23]. Отметим, что за рубежом вопросы распространения ЭМВ в ограниченной эллиптической области с изотропным или диэлектрическим заполнением достаточно хорошо изучены и анализ также проводится по традиционной схеме [24-43]. В работах [25-27] для анализа ЭМВ применяются методы коллокаций и двусторонней оценки азимутальных чисел.

В главе описан метод (метод инвариантных преобразований) решения СДУМ для получения обобщенных уравнений Гельмгольца. Метод инвариантных преобразований представляет собой развитие метода получения уравнений Гельмгольца для изотропного случая на гиротропный случай, когда среда заполнения является тензорной. При разработке метода используется тензорное исчисление, позволяющее значительно упростить изучение кристаллических сред (в большинстве своем анизотропных), определяя для кристаллов данного типа независимые постоянные, знания которых достаточно для получения всех необходимых данных о свойствах изучаемого явления [48]. Анизотропия - это зависимость свойств вещества (или тела) от углов между направлениями, в которых прикладываются внешние поля, и некоторыми выделенными направлениями, которые задаются, например, структурой вещества или формой тела. Одним из отдельных видов анизотропии является гиротропия [5].

Если через вещество, помещенное в постоянное магнитное поле, пропустить в направлении поля поляризованный свет, то плоскость поляризации световой волны повернется на некоторый угол, зависящий от напряженности магнитного поля (эффект Фарадея). Среда, в которой имеет место эффект Фарадея, обычно называют



гиротропными [2]. Типичным примером гиротропной среды является феррит. Криволинейный контур поперечного сечения ограниченной области, в котором распространяются электромагнитные волны, требуют учета изменения кривизны выбранного локального базиса. Это производится с использованием аппарата ковариантного дифференцирования. Данное обстоятельство и то, что магнитная проницаемость феррита описывается тензором второго порядка, делает необходимым использование тензорной алгебры при изучении свойств закрытых ограниченных областей с ферритовым, т.е. с анизотропным (гиротропным), заполнением. В противном случае приходится использовать громоздкий математический аппарат. Методы же тензорной алгебры значительно упрощают исследование.

### **1.1. Инварианты ограниченной области с обобщенно-ортогональным поперечным сечением и тензорным заполнением**

В параграфе описываются инварианты, которые необходимы для получения общего решения системы дифференциальных уравнений Максвелла для ограниченной гиротропной области произвольной формы.

#### **1.1.1. Конические сечения**

Анализ конических сечений позволяет сделать вывод об инвариантности наиболее часто встречающихся на практике формах поперечного сечения ограниченной области: прямоугольной, круглой, эллиптической.

Конические сечения представляют собой плоские кривые, которые получаются пересечением прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину (рис. 1) [49-51]. С точки зрения аналитической геометрии коническое сечение представляет собой геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению второго порядка. Конические сечения могут быть трёх типов [49-51]:

1) секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полусферы; линия пересечения есть замкнутая овальная кривая - эллипс; окружность как част-

ный случай эллипса получается, когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса (рис.1а);

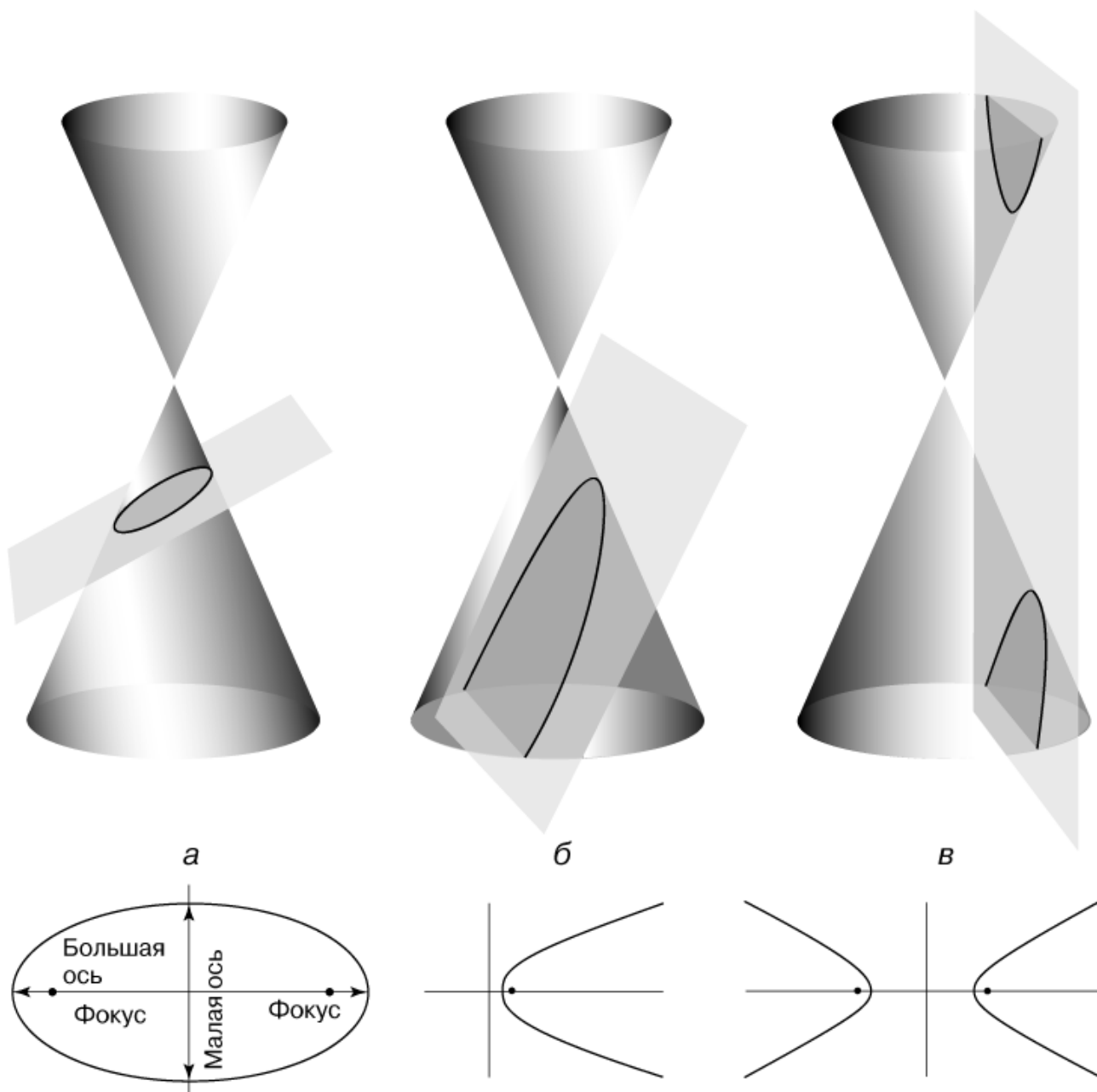


Рисунок – 1.1. Конические сечения как результат пересечения плоскости с конусом.

Три основных типа конических сечений: а) эллипс; б) парабола; в) гипербола.

2) секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса; в сечении получается незамкнутая, уходящая в бесконечность кривая - парабола, целиком

лежащая на одной полости;

3) секущая плоскость пересекает обе полости конуса; линия пересечения - гипербола - состоит из двух одинаковых незамкнутых, простирающихся в бесконечность частей (ветвей гиперболы), лежащих на обеих полостях конуса.

Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то получаются распадающиеся конические сечения. Параллельные прямые получаются, если конус вырождается в цилиндр (вершина конуса уходит в бесконечность).

Существуют вырожденные случаи конических сечений: две пересекающиеся прямые образуют вырожденную гиперболу (рис. 2а); два вырожденных эллипса (рис. 2б) возникают, когда конус пересекается с плоскостью, параллельной его основанию (рис. 2б).

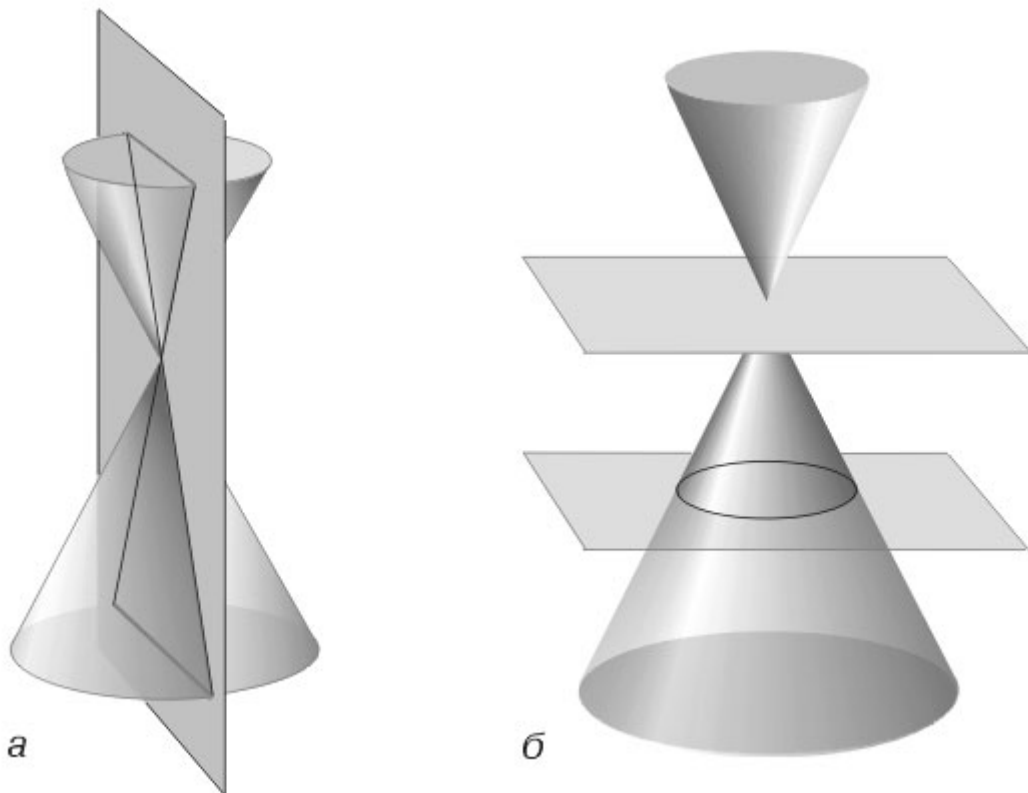


Рисунок – 1.2. Вырожденные конические сечения.

В алгебраических терминах конические сечения можно определить как плоские кривые, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют уравне-

нию второй степени. Иначе говоря, уравнение всех конических сечений (кривых второго порядка) можно записать в общем виде как [49-51]:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ \text{или} \\ (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $a_{ik} = a_{ki}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ).

Для любого уравнения (1.1) следующие величины являются инвариантами относительно переноса и поворота осей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2; \quad I = a_{11} + a_{22}, \quad \text{где } (a_{ij} = a_{ji}).$$

Эти инварианты определяют свойства конических сечений, не зависящие от ее положения на плоскости.

Свойства конических сечений определяются при помощи характеристической квадратичной формы [49-52]:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = F_0(x, y). \quad (1.2)$$

Конкретный вид кривой второго порядка зависит от функции  $F_0(x, y)$ , что устанавливается по корням ее характеристического уравнения [49-52]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + I\lambda + D = 0, \quad (1.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – собственные значения действительной симметричной матрицы  $[a_{ik}]$ .

Инварианты  $I$  и  $D$  конических сечений могут быть выражены через корни характеристического уравнения (1.3) [20-23]:

$$I = \lambda_1 + \lambda_2, \quad D = \lambda_1\lambda_2 \quad (1.4)$$

В случае центральных кривых (существует центр симметрии, т.е.  $D \neq 0$ ) при преобразовании к главным осям (повороте), матрица  $[a_{ik}]$  характеристической квадратичной

формы (1.2.) приобретает диагональный вид. Тогда общее уравнение конических сечений в каноническом виде примет вид:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + g = 0, \quad (1.5)$$

где  $\lambda_1 > 0$  (данное условие всегда может быть достигнуто заменой переменных или умножением обеих частей на -1).

В случае нецентральных кривых (нет центра симметрии) одно из собственных значений  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  равно нулю и, в соответствии с (1.4), инвариант  $D = 0$ . Тогда общее уравнение конических сечений в каноническом виде примет вид (с  $\lambda_1 > 0$ ) [49-52]:

$$\lambda_1 x^2 + 2hy + k = 0. \quad (1.6)$$

Таблица 1. Классификация конических сечений [49-52].

Центральные кривые		
$\lambda_2$	$g$	Вид кривой
$>0$	$<0$	Эллипс (рис. 1а)
$>0$	$>0$	В действительных числах уравнение не имеет решения (мнимый эллипс)
$>0$	$0$	Одна точка (0,0) (пара мнимых пересекающихся прямых или вырожденный эллипс)
$<0$	$\neq 0$	Гипербола (рис. 1в)
Нецентральные кривые		
$h$	$k$	Вид кривой
$\neq 0$	Любое	Парабола (рис. 1б)
$0$	$<0$	Пара прямых, параллельных оси $y$
$0$	$0$	Двойная прямая (ось $y$ )
$0$	$>0$	Пара мнимых параллельных прямых

### 1.1.2. Тензоры в ортогональных криволинейных системах координат.

#### Коэффициенты Ламэ. Символы Кристоффеля

Математической основой построения обобщенной теоретической модели распространения электромагнитных волн в ограниченной области с ортогональной формой поперечного сечения является тензорное исчисление, описывающее инвариантность уравнений электромагнитного поля для различных систем координат.

К числу характеристик произвольной системы координат в точке пространства относятся совокупность трех векторов, образующих основной базис, совокупность трех векторов, образующих взаимный базис, а также метрические матрицы основного и взаимного базисов.

Задание криволинейной системы координат означает задание правила, по которому каждой точке пространства сопоставляется три числа. В каждой точке пространства можно построить базис касательного векторного пространства, называемый касательным базисом. В общем случае векторы этого базиса могут быть не взаимно-ортогональны, не единичные и по-разному ориентированные для каждой точки пространства. Криволинейные координаты называются ортогональными, если в любой точке  $M$  касательные к координатным линиям образуют прямоугольный трехгранник [53-57].

Определение метрики пространства, т.е. квадрата расстояния между двумя сколь угодно близкими точками пространства, является важнейшей операцией при определении характеристик системы координат. Метрика пространства в общем случае криволинейных систем координат (косоугольных) имеет вид [48]:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & (e_1)^2 (dx^1)(dx^1) + (e_2)^2 (dx^2)(dx^2) + (e_3)^2 (dx^3)(dx^3) + e_1 e_2 \cos(\bar{e}_1, \bar{e}_2)(dx^1)(dx^2) + \\
 & + e_1 e_3 \cos(\bar{e}_1, \bar{e}_3)(dx^1)(dx^3) + e_2 e_3 \cos(\bar{e}_2, \bar{e}_3)(dx^2)(dx^3) + e_2 e_1 \cos(\bar{e}_2, \bar{e}_1)(dx^2)(dx^1) + \\
 & + e_3 e_2 \cos(\bar{e}_3, \bar{e}_2)(dx^3)(dx^2) + e_3 e_1 \cos(\bar{e}_3, \bar{e}_1)(dx^3)(dx^1), \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

где  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  - базисные векторы;  $e_1, e_2, e_3$  - соответствующие единицы длины;  $dx^1, dx^2, dx^3$  - бесконечно малые приращения по осям косоугольной системы координат.

В более общем виде:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k, \quad (1.8)$$

где

$$g_{ik} = g_{ki} = e_i e_k \cos(\bar{e}_i, \bar{e}_k) \quad (1.9)$$

Тензор  $(g_{ik})$  называется фундаментальным метрическим тензором. Метрические коэффициенты могут быть также выражены через вектора взаимного базиса, определяемые скалярным произведением базисных векторов:

$$g^{ij} = e^i \cdot e^j, \quad (1.10)$$

где  $e^i, e^j$  - вектора взаимного базиса.

Как известно, вектора основного и взаимного базисов связаны соотношением:

$$e_i \cdot e^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}, \quad (1.11)$$

где  $\delta_i^k$  - символы Кронекера.

Между метрическими коэффициентами основного и взаимного базисов существует взаимосвязь:

$$g_{ij} = \frac{1}{g^{ij}} \quad (1.12)$$

Существует еще один тип метрических коэффициентов - метрические коэффициенты смешанного типа  $g_i^j$ , определяемые как скалярные произведения векторов основного и взаимного базисов [55]. Из этого следует, что  $g_i^j = \delta_i^j$ .

В ортогональных системах координат в любой точке пространства базисные вектора взаимно перпендикулярны. Поэтому из (1.9), (1.10) и (1.12) следует, что в ортогональных базисах матрица метрического тензора является диагональной:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} g^{11} & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

В формулах (1.13) и (1.14) введены коэффициенты Ламэ, обозначенные как  $h_i$  :

$$|e_i| = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i}\right)^2} \equiv h_i, \quad (1.15)$$

где  $x, y, z$  - декартовы координаты;  $x^i$  - ортогональные криволинейные координаты.

Специфика дифференцирование тензоров по координатам в случае криволинейной системы координат связана с переменностью не только компонент, но и базисных векторов. В декартовых же координатах (и только в декартовых координатах) векторный базис одинаков для всех точек пространства, поэтому для любого базисного вектора дифференцирование по координатам дает нулевой результат. Напротив, в любой системе криволинейных координат векторный базис  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  является локальным, так что каждый базисный вектор является вектор-функцией обобщённых координат  $x^1, x^2, x^3$ . Именно это обстоятельство и определяет особенности дифференцирования тензоров по координатам. Зависимость векторов основного и взаимного базисов от координат примет вид:

$$e_i = e_i(x^1, x^2, x^3); \quad e^i = e^i(x^1, x^2, x^3) \quad (1.16)$$

Пусть задан вектор  $\bar{a}$  со своими контрвариантными и ковариантными компонентами, т.е.  $\bar{a} = a^i e_i$  и  $\bar{a} = a_i e^i$ . Зависимость от координат и времени компоненты тензора обозначим как  $a^i = a^i(x^1, x^2, x^3, t)$  и  $a_i = a_i(x^1, x^2, x^3, t)$ . В случае



криволинейной системы координат (в частности ортогональной), зависимость базисных векторов от координат обозначим как  $e_i = e_i(x^1, x^2, x^3)$  и  $e^i = e^i(x^1, x^2, x^3)$ . Тогда получим выражение для частной производной тензора  $\bar{a}$  по любой координате  $x^j$ :

$$\frac{\partial a}{\partial x^j} = \begin{cases} \frac{\partial(a^i e_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial(a^i)}{\partial x^j} e_i + a^i \frac{\partial(e_i)}{\partial x^j} \\ \frac{\partial(a_i e^i)}{\partial x^j} = \frac{\partial(a_i)}{\partial x^j} e^i + a_i \frac{\partial(e^i)}{\partial x^j} \end{cases} \quad (1.17)$$

Компоненты (ко- и контрвариантные) этих векторов  $\frac{\partial a}{\partial x^j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) образуют девять величин, совокупность которых называют ковариантной (абсолютной) производной (ковариантного или контрвариантного) вектора.

Продифференцируем выражением  $e_i \cdot e^k = \delta_i^k$ , связывающее соотношения основного и взаимного базисов, по координате  $x^j$ . При этом учитываем, что символы Кронекера  $\delta_i^k$ , принимающие значения 0 (при  $k \neq i$ ) и 1 (при  $k = i$ ) для такой операции являются константами:

$$\frac{\partial(e^k \cdot e_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial e^k}{\partial x^j} e_i + e^k \frac{\partial e_i}{\partial x^j} = 0. \quad (1.18)$$

В соответствии с (1.18) получаем:

$$\frac{\partial e^k}{\partial x^j} e_i = -e^k \frac{\partial e_i}{\partial x^j}. \quad (1.19)$$

Введем обозначение символов Кристоффеля второго рода  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$e^k \frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k. \quad (1.20)$$

Для ортонормированных криволинейных систем координат векторы основного базиса  $(e_1, e_2, e_3)$  и векторы ковариантного базиса  $(e^1, e^2, e^3)$  совпадают по направлению, но различаются по модулю. Из определения ковариантного базиса (1.11) и условия параллельности векторов  $e_k$  и  $e^k$  следует равенство:

$$|e^k| = \frac{1}{|e_k|}. \quad (1.21)$$

Тогда производная базисного вектора  $e_i$  по координате  $x^j$  (1.20) в разложении по векторам основного базиса с учетом (1.21) примет вид:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\Gamma_{ij}^k}{e^k} = \Gamma_{ij}^k \cdot e_k. \quad (1.22)$$

Из (1.22) следует, что символы Кристоффеля второго рода являются коэффициентами разложения векторов  $\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$  по векторам основного базиса  $e_k$ .

Очевидно, что вектора  $\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$  также могут быть разложены по векторам взаимного базиса. Тогда по аналогии с (1.22) получим:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ijk} \cdot e^k, \quad (1.23)$$

где  $\Gamma_{ijk}$  - символы Кристоффеля первого рода, представляющие собой коэффициенты разложения векторов  $\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$  по векторам взаимного базиса.

Из (1.22) и (1.23) имеем:

$$\Gamma_{ij}^k \cdot e_k = \Gamma_{ijk} \cdot e^k. \quad (1.24)$$

С учетом символов Кристоффеля второго рода выражение для производной тензора первого ранга, заданного контрвариантными компонентами по координате  $j$  примет вид:

$$\frac{\partial a}{\partial x^j} = \frac{\partial(a^i e_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial(a^i)}{\partial x^j} e_i + a^i \frac{\partial(e_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial(a^i)}{\partial x^j} e_i + a^i \Gamma_{ij}^k \cdot e_k \quad (1.25)$$

Заменим в (1.25)  $i$  на  $k$  и  $k$  на  $i$ . Такая операция допустима, т.к. индекс суммирования может обозначаться любой буквой, только существенно лишь его двукратное повторение в выражении: один раз сверху, другой - внизу. Поэтому с точки

зрения соглашения о суммировании выражения  $a^i \Gamma_{ij}^k \cdot e_k$  и  $a^k \Gamma_{kj}^i \cdot e_i$  совершенно равны.

С учетом изменения обозначения индексов суммирования:

$$\frac{\partial a}{\partial x^j} = \frac{\partial(a^i)}{\partial x^j} e_i + a^k \Gamma_{kj}^i \cdot e_i = \left( \frac{\partial(a^i)}{\partial x^j} + a^k \Gamma_{kj}^i \right) \cdot e_i = \nabla_j a^i e_i. \quad (1.26)$$

Из (1.26) следует, что производной тензора первого ранга, заданного контрвариантными компонентами, является вектор, компоненты которого имеют специальное обозначение:

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial(a^i)}{\partial x^j} + a^k \Gamma_{kj}^i. \quad (1.27)$$

Выражение (1.27) называется абсолютной (ковариантной) производной от контрвариантных компонент тензора первого ранга. Такая производная отличается от обычной частной производной дополнительными членами  $a^k \Gamma_{kj}^i$ , связанными с переменностью базисных векторов по координатам

Поступая аналогично ко второму уравнению (1.17) получаем:

$$\frac{\partial a}{\partial x^j} = \left( \frac{\partial(a_i)}{\partial x^j} - a_k \Gamma_{ij}^k \right) \cdot e^i = \nabla_j a_i e^i, \quad (1.28)$$

$$\text{где } \nabla_j a_i = \frac{\partial(a_i)}{\partial x^j} - a_k \Gamma_{ij}^k. \quad (1.29)$$

Выражение (1.29) называется абсолютной (ковариантной) производной от ковариантных компонент тензора первого ранга.

Все абсолютные производные (1.27) и (1.29) отличаются от обычных частных производных дополнительными членами  $a^k \Gamma_{kj}^i$  ( $a_k \Gamma_{ij}^k$ ), связанными с переменностью базисных векторов  $e_i$  по координате. Соответственно символы Кристоффеля первого и второго рода характеризуют искривленность координатных линий системы координат («криволинейность» системы координат) и являются характеристиками системы координат наряду с фундаментальным метрическим тензором и коэффициентами Ламэ.

Символы Кристоффеля первого рода вычисляются через метрические коэффициенты  $g_{ik}$  основного базиса системы координат [56, 57]:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (1.30)$$

Связь символов Кристоффеля первого и второго рода осуществляется следующим образом [28]:

$$\Gamma_{ij}^l = g^{kl} \Gamma_{ijk}. \quad (1.31)$$

В ортогональных криволинейных системах координат вычисление символов Кристоффеля упрощается и их однозначно можно выразить через коэффициенты Ламэ. При этом учитываем, что в таких (ортогональных) системах:

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (\text{при } i \neq j \neq k). \quad (1.32)$$

Символы Кристоффеля первого рода симметричны по двум последним индексам, а символы второго рода - симметричны по нижним индексам [57]:

$$\begin{cases} \Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} \\ \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \end{cases}. \quad (1.33)$$

Выражение (1.32) вытекает из того обстоятельства, что в формуле (1.30) метрические коэффициенты  $g_{jk}, g_{ik}, g_{ij} = 0$ , если  $i \neq j \neq k$  (в ортогональных системах  $\bar{e}_i \perp \bar{e}_j \perp \bar{e}_k$ )

Определим коэффициенты Ламэ второго рода из выражения (1.31) с учетом (1.30). При этом в формуле (1.31) коэффициенты  $g^{kl} = (\bar{e}^k \cdot \bar{e}^l)$  должны быть равны (пусть  $k = l$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= g^{kk} \Gamma_{ijk} = \frac{g^{kk}}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2 \cdot g^{kk}} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot (e_k \cdot e_k)} \cdot \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_k^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

В формуле (1.34) возможны следующие случаи:

1) при  $k = j$  выражение (1.34) примет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2 \cdot h_j^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_j^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_j^2} \cdot \frac{\partial(e_j e_j)}{\partial x^i} = \frac{1}{2 \cdot h_j^2} \cdot \frac{\partial(h_j^2)}{\partial x^i} = \\ &= \frac{2 \cdot h_j}{2 \cdot h_j^2} \cdot \frac{\partial(h_j)}{\partial x^i} = \frac{1}{h_j} \cdot \frac{\partial(h_j)}{\partial x^i}; \end{aligned} \quad (1.35)$$

2) при  $k = i$  выражение (1.34) примет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(e_i e_i)}{\partial x^j} = \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_i^2)}{\partial x^j} = \\ &= \frac{2 \cdot h_i}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^j} = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^j}; \end{aligned} \quad (1.36)$$

3) при  $k = i = j$  выражение (1.34) примет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(e_i e_i)}{\partial x^i} = \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_i^2)}{\partial x^i} = \\ &= \frac{2 \cdot h_i}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^i} = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^i}; \end{aligned} \quad (1.37)$$

4) при  $i = j$  выражение (1.34) примет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2 \cdot h_k^2} \cdot \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_k^2} \cdot \left( -\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \left( -\frac{\partial(e_j e_j)}{\partial x^k} \right) = \\ &= -\frac{1}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_j^2)}{\partial x^k} = -\frac{2 \cdot h_j}{2 \cdot h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_j)}{\partial x^k} = -\frac{h_j}{h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_j)}{\partial x^k}; \end{aligned} \quad (1.38)$$

Объединяя выражения (1.35)-(1.38), и, преобразовав для удобства символы Кристоффеля таким образом, чтобы верхние индексы были обозначены одним одинаковым индексом, например, через  $i$  получаем общие формулы:

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^i}; \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial(h_i)}{\partial x^j}; \quad \Gamma_{ij}^i = -\frac{h_j}{h_i^2} \cdot \frac{\partial(h_j)}{\partial x^i}; \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i; \quad \Gamma_{jk}^i = 0 \quad (i \neq j \neq k). \quad (1.39)$$

Формулы (1.39) позволяют выразить символы Кристоффеля второго рода в криволинейных ортогональных системах координат через коэффициенты Ламэ. Символы Кристоффеля второго рода (их всего 27) в общем виде можно представить в виде следующей матрицы:

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^k & \Gamma_{12}^k & \Gamma_{13}^k \\ \Gamma_{21}^k & \Gamma_{22}^k & \Gamma_{23}^k \\ \Gamma_{31}^k & \Gamma_{32}^k & \Gamma_{33}^k \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Используя (1.39) можно выразить символы Кристоффеля второго рода в более развернутом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ij}^1 = \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} & \frac{\partial h_1}{\partial x^2} & \frac{\partial h_1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x^2} & -\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x^3} & 0 & -\frac{h_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \end{bmatrix}; \\ \Gamma_{ij}^2 = \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} -\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} & \frac{\partial h_2}{\partial x^1} & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x^1} & \frac{\partial h_2}{\partial x^2} & \frac{\partial h_2}{\partial x^3} \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x^3} & -\frac{h_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \end{bmatrix}; \\ \Gamma_{ij}^3 = \frac{1}{h_3} \begin{bmatrix} -\frac{h_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x^3} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x^1} \\ 0 & -\frac{h_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x^3} & \frac{\partial h_3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x^1} & \frac{\partial h_3}{\partial x^2} & \frac{\partial h_3}{\partial x^3} \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

В ограниченной области с криволинейной ортогональной формой поперечного сечения с продольной осью, совпадающей с осью  $z$  декартовой системы координат, символы Кристоффеля второго рода определяются из формулы (1.41):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ij}^1 = \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} & \frac{\partial h_1}{\partial x^2} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x^2} & -\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \Gamma_{ij}^2 = \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} -\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} & \frac{\partial h_2}{\partial x^1} & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x^1} & \frac{\partial h_2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{array} \right. \quad (1.42)$$

где

$$\begin{aligned} x^3 = z; \quad h_3 = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h_3}{\partial x^1} = \frac{\partial h_3}{\partial x^2} = 0; \quad \Gamma_{ij}^3 = 0; \\ \frac{\partial h_1}{\partial x^3} = \frac{\partial h_2}{\partial x^3} = \frac{\partial h_1}{\partial z} = \frac{\partial h_2}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

В последнем выражении коэффициенты Ламэ  $h_1, h_2$  не являются функциями продольной декартовой координаты  $z$ , т.к. соответствующие базисные вектора  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  перпендикулярны оси  $z$  в любой точке. Поэтому  $\frac{\partial h_1}{\partial z} = \frac{\partial h_2}{\partial z} = 0$ .

### 1.1.3. Тензорные характеристики феррита для различных случаев намагничивания

Феррит одновременно обладает магнитными и электрическими свойствами. Намагниченный феррит является анизотропной средой для распространяющихся в нем электромагнитных волн. Эти обстоятельства позволяют использовать намагниченные ферриты в различных приложениях техники.

Каждый электрон обладает спиновым (внутренним) механическим моментом количества движения  $\bar{p}$  и магнитным моментом  $\bar{m}$ . Сила, действующая на магнитный диполь со стороны магнитного поля, аналогична силе тяжести, действующий на магнитный волчок. Высокочастотное магнитное поле, приложенное перпендикулярно по-

стоянному полю, вызывает боковые толчки, т.е. создает переменный момент вращения [58].

У ферритов имеются некомпенсированные магнитные моменты. Существование у такого электрона одновременно механического и магнитного спиновых моментов приводит к тому, что во внешнем постоянном магнитном поле  $\vec{H}$ , действующем на феррит, электрон ведет себя также как волчок в поле силы тяжести.

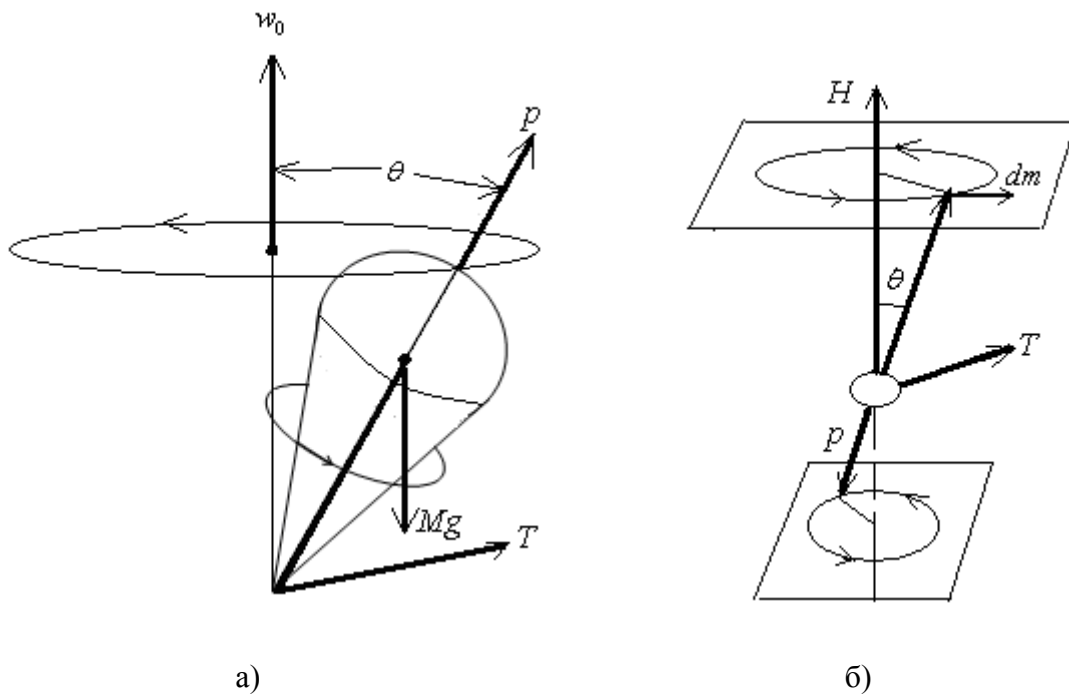


Рисунок – 1.3. Прецессия волчка в гравитационном поле а) и прецессия электрона в магнитном поле б).

Частота прецессии  $w_0$  зависит от момента вращения волчка относительно собственной оси и силы тяжести  $F_t = Mg$ , приложенной в центре тяжести волчка.

Если на волчок действует вращающий момент  $T$ , который обусловлен силой тяжести и стремится положить волчок, то на электрон действует вращающий момент:

$$\vec{T} = \mu_0 [\vec{m}, \vec{H}], \quad (1.44)$$



где  $\mu_0 = 12.56 \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$  - магнитная постоянная,  $\bar{m}$  - магнитный момент, который обусловлен внешним магнитным полем  $\bar{H}$  и стремится ориентировать  $\bar{m}$  по  $\bar{H}$ . Так как и волчок, и электрон обладают механическим моментом  $\bar{p}$ , то согласно законам механики вращающий момент  $\bar{T}$  вызывает изменение механического момента  $\bar{p}$  в соответствии с уравнением:

$$\bar{T} = \frac{d\bar{p}}{dt}. \quad (1.45)$$

Так как механический момент  $\bar{p}$  электрона не параллелен постоянному полю  $\bar{H}$ , то из (1.44) следует прецессионное движение  $\bar{p}$  и соответственно  $\bar{m}$  вокруг  $\bar{H}$ .

Связь между магнитным и механическими моментами равен [2]:

$$\bar{m} = -\frac{|e|\bar{p}}{m_0}, \quad (1.46)$$

где  $e = -1,6 \cdot 10^{19} Кл$  - заряд электрона;  $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} Кг$  - масса электрона,  $\bar{p}$  - механический момент количества движения.

Из (1.46) выразим механический момент количества движения:

$$\bar{p} = -\frac{\bar{m}m_0}{e}. \quad (1.47)$$

Подставив (1.47) в (1.45) получим:

$$\bar{T} = \frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{d(\bar{m} \cdot m_0)}{e \cdot d(t)} = -\frac{m_0 d(\bar{m})}{e \cdot d(t)}. \quad (1.48)$$

Приравняв (1.44) и (1.48):

$$\mu_0 [\bar{m}, \bar{H}] = -\frac{m_0}{e} \frac{d(\bar{m})}{d(t)} \Rightarrow \frac{d(\bar{m})}{d(t)} = \frac{e}{m_0} \mu_0 [\bar{m}, \bar{H}] = -Y \cdot \mu_0 [\bar{m}, \bar{H}] = Y \cdot \mu_0 [\bar{H}, \bar{m}]$$

Получили:

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = Y \cdot \mu_0 [\bar{H}, \bar{m}], \quad (1.49)$$

где  $Y = \frac{e}{m_0} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{Кл}{кг}$  - гиромагнитное отношение.

Из (1.49) выразим  $d\bar{m}$  :

$$d\bar{m} = Y \cdot \mu_0 [\bar{H}, \bar{m}] dt. \quad (1.50)$$

Согласно векторному анализу, вектор  $d\bar{m}$  перпендикулярен плоскости, где лежат вектора  $\bar{H}$  и  $\bar{m}$ . Следовательно, магнитный момент  $\bar{m}$  поворачивается вокруг  $\bar{H}$ , описывая своим концом окружность, и образует с вектором  $\bar{H}$  правовинтовую систему. При этом вращении конец вектора  $\bar{m}$  движется с линейной скоростью согласно формуле (1.49):

$$v = \frac{d\bar{m}}{dt} = Y \cdot \mu_0 \cdot H \cdot m \cdot \sin(\theta), \quad (1.51)$$

где  $\theta$  - угол между  $\bar{H}$  и  $\bar{m}$ .

В общем случае линейная скорость равна:

$$v = w_0 R, \quad (1.52)$$

где  $w_0$  - угловая частота,  $R$  - радиус окружности.

Так как радиус окружности, описываемый концом вектора  $\bar{m}$  равен  $R = m \sin(\theta)$ , то из формул (1.51) и (1.52) следует, что угловая частота свободной прецессии магнитного момента  $\bar{m}$  вокруг  $\bar{H}$  равна:

$$w_0 = \frac{v}{R} = Y \mu_0 H. \quad (1.53)$$

Все некомпенсированные спиновые магнитные моменты одинаковым образом прецессируют вокруг внешнего магнитного поля  $\bar{H}$ . Поэтому суммарная намагниченность системы магнитоупорядоченных спинов, или магнитный момент на единицу объема равен:

$$M = N \cdot m, \quad (1.54)$$

где  $N$  - число электронов с некомпенсированными магнитными моментами.

Тогда с учетом (1.54) получим уравнение движения намагниченного феррита  $\bar{M}$  в магнитном поле  $\bar{H}$ :

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = \gamma \cdot \mu_0 [\bar{H}, \bar{M}]. \quad (1.55)$$

Пусть феррит намагничен до насыщения, при котором магнитные моменты всех атомов ориентированы по направлению постоянного магнитного поля  $\bar{H}_0$ . Тогда и вектор намагниченности  $\bar{M} = \bar{M}_0$  направлен по полю  $\bar{H}_0$ .

Если на феррит воздействовать слабым высокочастотным полем  $\bar{H}_\sim$  частоты  $\omega$ , перпендикулярным  $\bar{H}_0$  ( $|\bar{H}_\sim| \ll \bar{H}_0$ ), то оно вызовет появление небольшой высокочастотной составляющей намагниченности  $\bar{M}_\sim$  ( $|\bar{M}_\sim| \ll \bar{M}_0$ ), которая также перпендикулярна  $\bar{M}_0$ . В соответствие с этим имеем:

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{H}_\sim \\ \bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{M}_\sim \\ \bar{M}_0 \perp \bar{M}_\sim; \bar{H}_0 \perp \bar{M}_0; \bar{H}_0 \parallel \bar{M}_0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Подставив (1.56) в (1.55) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{M} + \bar{M}_\sim)}{dt} &= \gamma \cdot \mu_0 [(\bar{H}_0 + \bar{H}_\sim), (\bar{M}_0 + \bar{M}_\sim)] = \\ &= \gamma \cdot \mu_0 \{ [\bar{H}_0, \bar{M}_0] + [\bar{H}_0, \bar{M}_\sim] + [\bar{H}_\sim, \bar{M}_0] + [\bar{H}_\sim, \bar{M}_\sim] \} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Так как  $\bar{M}_0 = const$ , т.е. это постоянная составляющая намагниченности, то  $\frac{d\bar{M}_0}{dt} = 0$  и векторное произведение  $[\bar{H}_0, \bar{M}_0] = 0$ , т.к.  $\bar{H}_0 \parallel \bar{M}_0$ . Тогда

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = \gamma \cdot \mu_0 \{ [\bar{H}_0, \bar{M}_\sim] + [\bar{H}_\sim, \bar{M}_0] + [\bar{H}_\sim, \bar{M}_\sim] \}. \quad (1.58)$$

Вследствие того, что  $|\bar{H}_0| \gg |\bar{H}_\sim|$  и  $|\bar{M}_0| \gg |\bar{M}_\sim|$ , то можем пренебречь  $[\bar{H}_\sim, \bar{M}_\sim]$ .

Тогда, переходя к уравнению для комплексных амплитуд (учитывая временную зависимость  $e^{j\omega t}$ ) имеем:

$$j\omega \bar{M}_{\sim} = Y \cdot \mu_0 \left\{ [\bar{H}_0, \bar{M}_{\sim}] + [\bar{H}_{\sim}, \bar{M}_0] \right\}. \quad (1.59)$$

Пусть электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $Z$ . Направим постоянное магнитное поле  $\bar{H}_0$  вдоль оси  $Z$ , т.е. рассмотрим случай продольного намагничивания. Переменные составляющие векторов намагниченности  $\bar{M}_{\sim}$  и магнитного поля  $\bar{H}_{\sim}$  распишутся в виде:

$$\begin{cases} \bar{M}_{\sim} = M_x \cdot \bar{1}_x + M_y \cdot \bar{1}_y + M_z \cdot \bar{1}_z, \\ \bar{H}_{\sim} = H_x \cdot \bar{1}_x + H_y \cdot \bar{1}_y + H_z \cdot \bar{1}_z, \end{cases} \quad (1.60)$$

где  $\bar{1}_x, \bar{1}_y, \bar{1}_z$  - орты декартовой системы координат.

Выражение (1.59) с учетом (1.60) примет вид:

$$\begin{aligned} j\omega (M_x \cdot \bar{1}_x + M_y \cdot \bar{1}_y + M_z \cdot \bar{1}_z) = \\ = Y \cdot \mu_0 \left\{ [\bar{H}_0, (M_x \cdot \bar{1}_x + M_y \cdot \bar{1}_y + M_z \cdot \bar{1}_z)] + [(M_x \cdot \bar{1}_x + M_y \cdot \bar{1}_y + M_z \cdot \bar{1}_z), \bar{M}_0] \right\}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Так как постоянное магнитное поле  $\bar{H}_0$  и намагниченность  $\bar{M}_0$  направлены вдоль координаты  $Z$ , т.е.  $\bar{H}_0$  и  $\bar{M}_0$  параллельны оси  $Z$ , то векторное произведение:

$$\begin{cases} [\bar{H}_0, M_z \cdot \bar{1}_z] = 0, \\ [\bar{H}_z \cdot \bar{1}_z, \bar{M}_0] = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Перепишем (1.61), учитывая (1.62):

$$\begin{aligned} j\omega (M_x \cdot \bar{1}_x + M_y \cdot \bar{1}_y + M_z \cdot \bar{1}_z) = \\ = Y \cdot \mu_0 \left\{ [\bar{H}_0, (M_x \cdot \bar{1}_x + M_y \cdot \bar{1}_y)_z] + [(M_x \cdot \bar{1}_x + M_y \cdot \bar{1}_y), \bar{M}_0] \right\}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Разложим уравнение (1.63) по координатным осям. При этом согласно (1.58), вектор

изменения скорости переменной составляющей намагниченности  $\frac{d(\bar{M}_{\sim})}{dt}$  и соответ-

ственно, если перейти к комплексным амплитудам, то и вектор  $j\omega \bar{M}_{\sim}$ , исходя из вектор-

ного умножения векторов, перпендикулярен плоскости, где лежат вектора  $\bar{H}_0, \bar{M}_{\sim}$  и

$\vec{H}_\sim, \vec{M}_0$ . Поэтому вектор  $j\omega\vec{M}_\sim$  будет перпендикулярен векторам  $\vec{M}_\sim$  и  $\vec{H}_\sim$ , которые параллельны между собой. Получаем

$$\begin{cases} j\omega M_x = -Y\mu_0 H_0 M_y + Y\mu_0 H_y M_0, \\ j\omega M_y = Y\mu_0 H_0 M_x - Y\mu_0 H_x M_0. \end{cases} \quad (1.64)$$

Так как  $w_0 = Y\mu_0 H_0$ , то выражение (1.64) можно записать:

$$\begin{cases} j\omega M_x = -w_0 M_y + Y\mu_0 H_y M_0, \\ j\omega M_y = w_0 M_x - Y\mu_0 H_x M_0. \end{cases} \quad (1.65)$$

Выразим  $M_x$  из второго уравнения (1.65):

$$M_x = \frac{j\omega M_y}{w_0} + \frac{Y\mu_0 H_x M_0}{w_0}. \quad (1.66)$$

Выразим  $M_y$ , подставив (1.66) в первое уравнение (1.65) и после преобразований:

$$M_y = \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - \omega^2} (-j\omega H_x + w_0 H_y). \quad (1.67)$$

Теперь выразим  $M_y$  из первого уравнения (1.65):

$$M_y = -\frac{j\omega M_x}{w_0} + \frac{Y\mu_0 H_y M_0}{w_0}. \quad (1.88)$$

Подставим (1.68) во второе уравнение (1.65) и после преобразований:

$$M_x = \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - \omega^2} (j\omega H_y + w_0 H_x). \quad (1.69)$$

Для составляющей  $M_z$  из выражений (1.62) следует:

$$j\omega M_z = 0. \quad (1.70)$$

Объединив (1.67), (1.69), (1.70) получаем выражения для переменных составляющих вектора намагниченности по осям:

$$\begin{cases} M_x = \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} (jwH_y + w_0H_x), \\ M_y = \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} (-jwH_x + w_0H_y), \\ M_z = 0, \end{cases} \quad (1.71)$$

где  $w_0 = Y\mu_0 H_0$  - круговая частота свободной прецессии,  $w$  - круговая частота приложенного высокочастотного магнитного поля,  $M_0$  - постоянная составляющая намагниченности.

Известно, что магнитная индукция  $\bar{B}$ , намагниченность  $\bar{M}$  и напряженность магнитного поля связаны соотношением:

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}). \quad (1.72)$$

Поэтому амплитуда магнитной индукции монохроматического поля в феррите с учетом (1.72):

$$\bar{B}_\sim = \mu_0 (\bar{H}_\sim + \bar{M}_\sim). \quad (1.73)$$

Разложив (1.73) по осям и, учитывая (1.71), получим:

$$\begin{cases} B_x = \mu_0 (H_x + M_x) = \mu_0 \left\{ H_x + \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} (jwH_y + w_0H_x) \right\} = \mu_0 \left\{ H_x + \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} w_0 H_x + \frac{jwY\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} H_y \right\}, \\ B_y = \mu_0 (H_y + M_y) = \mu_0 \left\{ H_y + \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} (-jwH_x + w_0H_y) \right\} = \mu_0 \left\{ H_y + \frac{Y\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} w_0 H_y - \frac{jwY\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} H_x \right\}, \\ B_z = \mu_0 (H_z + M_z) = \mu_0 H_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = \mu_0 (H_x + M_x) = \mu_0 \left\{ H_x \left( 1 + \frac{Y\mu_0 M_0 w_0}{w_0^2 - w^2} \right) + \frac{jwY\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} H_y \right\}, \\ B_y = \mu_0 (H_y + M_y) = \mu_0 \left\{ H_y \left( 1 + \frac{Y\mu_0 M_0 w_0}{w_0^2 - w^2} \right) - \frac{jwY\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2} H_x \right\}, \\ B_z = \mu_0 H_z. \end{cases} \quad (1.74)$$

Выражение (1.74) запишем в сокращенном виде:

$$\begin{cases} B_x = \mu_0(\mu H_x + jkH_y), \\ B_y = \mu_0(-jkH_x + \mu H_y), \\ B_z = \mu_0\mu_{\parallel}H_z, \end{cases} \quad (1.75)$$

где  $\mu = 1 + \frac{Y\mu_0 M_0 w_0}{w_0^2 - w^2}$ ;  $k = \frac{wY\mu_0 M_0}{w_0^2 - w^2}$ ;  $\mu_{\parallel} = 1$ .

Из (1.71) и (1.75) следует, что в намагниченном до насыщения феррите слабое высокочастотное поле  $\bar{H}_z$ , параллельное постоянному полю  $\bar{H}_0$  не оказывает влияния на ориентацию некомпенсированных магнитных моментов, направленных по  $\bar{H}_0$  и поэтому  $M_z = 0$ , т.е. для этого поля феррит является изотропной средой. Если слабое высокочастотное поле имеет компоненту  $\bar{H}_x$ , перпендикулярное  $\bar{H}_0$ , то оно вызывает отклонение магнитных моментов от направления  $\bar{H}_0$  и появляется переменная намагниченность  $\bar{M}_{\sim}$ , т.е.  $\bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{M}_{\sim}$ . Вследствие этого возникает прецессия намагниченности  $\bar{M}$  вокруг постоянного поля  $\bar{H}_0$ , образуя правовинтовую систему. Вследствие прецессии  $\bar{M}_{\sim}$  магнитная индукция  $\bar{B}_{\sim}$  не совпадает по направлению  $\bar{H}_x$  и имеет составляющие как по оси x, так по оси y. То же самое происходит, если имеется  $\bar{H}_{\sim} = \bar{H}_y$ . Если существуют, все три компоненты монохроматического высокочастотного поля ( $\bar{H}_{\sim} = \bar{H}_x + \bar{H}_y + \bar{H}_z$ ), имеет место выражения (1.71) и (1.75). Анизотропия в намагниченном феррите приводит к тому, что постоянное поле  $\bar{H}_0$  задает направление, вокруг которого происходит прецессия намагниченности  $\bar{M}$ .

Уравнение (1.75) удобно представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}. \quad (1.76)$$

При продольном намагничивании, т.е. когда постоянное намагничивающее поле  $\bar{H}_0$  совпадает с осью  $\bar{z}$ , вдоль которого в феррите распространяется электромагнитная волна, то тензор магнитной проницаемости как следует из выражения (1.76) имеет вид [9]:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (1.77)$$

Если постоянное магнитное поле  $\bar{H}_0$  направлено вдоль оси  $\bar{x}$  ( $\xi$  в случае эллиптической системы координат), то аналогичным образом можно показать, что тензор магнитной проницаемости примет вид (касательное намагничивание) [9]:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & jm \\ 0 & -jm & \mu \end{bmatrix}. \quad (1.78)$$

Также можно показать, что когда магнитное поле  $\bar{H}_0$  направлено вдоль оси  $\bar{y}$  ( $\varphi$  в эллиптической системе координат), то получим (нормальное намагничивание) [9]:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu_{\parallel} & 0 & jl \\ 0 & \mu & 0 \\ -jl & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (1.79)$$

## 1.2. Описание и применение метода

В этом параграфе описывается «Метод инвариантных преобразований (МИП)», позволяющий получить обобщенные уравнения Гельмгольца из СДУМ на основе которых разработана математическая модель распространения ЭМВ в ограниченной гиротропной области произвольной формы.



### 1.2.1. Пространственные дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных системах координат с учетом коэффициентов Ламэ и символов Кристоффеля

Пусть ЭМВ распространяется вдоль продольной координаты, совпадающей с осью  $Z$  декартовой системы координат. Данное обстоятельство и то, что форма поперечного сечения имеет криволинейный вид по обеим координатным осям, означает:

$$h_1 \neq 1; \quad h_2 \neq 1; \quad h_3 = 1, \quad (1.80)$$

где  $h_1, h_2$  - коэффициенты Ламэ поперечных координатных осей,  $h_3$  - продольной.

Так как ограниченная область является регулярной, то должно выполняться условие:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.81)$$

Будем рассматривать устоявшийся во времени процесс без наведенных токов и зарядов. В этом случае уравнения Максвелла принимают вид [2]:

$$\begin{cases} \text{Rot} \bar{H} = j\omega \varepsilon \bar{E}; \\ \text{Rot} \bar{E} = -j\omega \bar{B}; \\ \text{Div} \bar{B} = 0; \\ \text{Div} \bar{D} = 0, \end{cases} \quad (1.82)$$

где  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$  - напряженности магнитного и электрического полей,  $\bar{B} = \tilde{\mu} \bar{H}$  и  $\bar{D}$  - магнитная и электрическая индукции,  $j$  - мнимая единица;  $\varepsilon$  - абсолютная диэлектри-

ческая проницаемость феррита,  $\omega$  - циклическая частота,  $\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix}$  - тен-

зор магнитной проницаемости феррита.

В общем случае для произвольных ортогональных криволинейных систем координат  $\text{Rot}$  определяется выражением [59]:

$$\begin{aligned}
Rot\bar{F} = \nabla_x\bar{F} &= \frac{1}{h_2h_3} \left[ \frac{\partial(h_3F_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2F_2)}{\partial x^3} \right] \bar{e}_1 - \frac{1}{h_3h_1} \left[ \frac{\partial(h_3F_3)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1F_1)}{\partial x^3} \right] \bar{e}_2 + \\
&\quad \frac{1}{h_1h_2} \left[ \frac{\partial(h_2F_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1F_1)}{\partial x^2} \right] \bar{e}_3 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ h_2h_3 & h_3h_1 & h_1h_2 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}, \tag{1.83}
\end{aligned}$$

где  $x^1, x^2$  - криволинейные координаты поперечной плоскости ( $\perp$ ),  $x^3$  - продольная ось,  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  - базисные вектора,  $F_1, F_2, F_3$  - проекции вектора  $\bar{F}$  на координатные линии  $x^1, x^2, x^3$  соответственно.

Для криволинейных ортогональных систем координат с продольно-регулярной осью имеем:  $x^3 = z$  - продольно-регулярная ось. Тогда  $h_3 = 1, F_3 = F_z = F_\perp e^{-jz}$  - функция по продольной оси  $Z$  ( $F_\perp$  - зависимость по  $x^1, x^2$ ),  $\gamma$  - постоянная распространения,  $F_\perp \neq F_\perp(z)$ . В соответствии с последними замечаниями формула (1.83) примет вид:

$$\begin{aligned}
Rot\bar{F} &= \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial(h_2F_2)}{\partial z} \right) \bar{e}_1 - \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1F_1)}{\partial z} \right) \bar{e}_2 + \frac{1}{h_1h_2} \left( \frac{\partial(h_2F_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1F_1)}{\partial x^2} \right) \bar{e}_3 = \\
&= \frac{1}{h_2} \left[ \frac{\partial F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial h_2}{\partial z} F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial x^3} h_2 \right] \bar{e}_1 - \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\partial F_z}{\partial x^1} - \frac{\partial h_1}{\partial z} F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial z} h_1 \right] \bar{e}_2 + \\
&\quad + \frac{1}{h_1h_2} \left[ \left( \frac{\partial F_2}{\partial x^1} h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x^1} F_2 \right) - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x^2} h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial x^2} F_1 \right) \right] \bar{e}_3. \tag{1.84}
\end{aligned}$$

Так как коэффициенты Ламэ  $h_1$  и  $h_2$  не являются функцией от продольной координаты  $z$ , т.е.  $h_1 \neq f(z)$ ,  $h_2 \neq f(z)$ , то выражение (1.84) упрощается:

$$\begin{aligned}
Rot\bar{F} &= \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial F_2}{\partial z} h_2 \right) \bar{e}_1 - \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial z} h_1 \right) \bar{e}_2 + \left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right) F_2 - \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right) F_1 \right] \bar{e}_3 = \\
&= \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^2} - \frac{\partial F_2}{\partial z} h_2 \right) \bar{e}_1 - \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial z} h_1 \right) \bar{e}_2 + \left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right) F_2 - \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right) F_1 \right] \bar{e}_3, \tag{1.85}
\end{aligned}$$

где  $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^2}$ ,  $\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1}$  - символы Кристоффеля 2-го рода [24].

Но в выражении (1.85) не учтена зависимость от продольной пространственной координаты  $z$ , т.е.  $e^{-j\gamma z}$ . С учетом этой зависимости частные производные формулы (1.85) будут равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_z}{\partial x^2} = \frac{\partial(F_z e^{-j\gamma z})}{\partial x^2} = \frac{\partial(F_z)}{\partial x^2} e^{-j\gamma z} + \frac{\partial(e^{-j\gamma z})}{\partial x^2} F_z = \frac{\partial(F_z)}{\partial x^2} e^{-j\gamma z}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial(F_2 e^{-j\gamma z})}{\partial z} = \frac{\partial(F_2)}{\partial z} e^{-j\gamma z} + \frac{\partial(e^{-j\gamma z})}{\partial z} F_2 = -j\gamma F_2 e^{-j\gamma z}, \\ \frac{\partial F_z}{\partial x^1} = \frac{\partial(F_3 e^{-j\gamma z})}{\partial x^1} = \frac{\partial(F_z)}{\partial x^1} e^{-j\gamma z} + \frac{\partial(e^{-j\gamma z})}{\partial x^1} F_3 = \frac{\partial(F_z)}{\partial x^1} e^{-j\gamma z}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial(F_1 e^{-j\gamma z})}{\partial z} = \frac{\partial(F_1)}{\partial z} e^{-j\gamma z} + \frac{\partial(e^{-j\gamma z})}{\partial z} F_1 = -j\gamma F_1 e^{-j\gamma z}. \end{array} \right. \quad (1.86)$$

При определении частных производных в формуле (1.86) учитывалось, что поперечные составляющие вектора  $\bar{F}$  не являются функциями, а продольная составляющая является функцией от продольной пространственной координаты  $z$ , т.е.  $F_1 \neq F_1(z)$ ,  $F_2 \neq F_2(z)$ ,  $F_3 = F_1(z)$  и  $F_3 = F_2(z)$ .

С учетом вычисленных частных производных (1.86) и опуская зависимость  $e^{-j\gamma z}$ , получаем:

$$Rot \bar{F} = \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial F_z}{\partial x^2} + j\gamma F_2 \right) \bar{e}_1 - \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial F_z}{\partial x^1} + j\gamma F_1 \right) \bar{e}_2 + \left[ \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right) F_2 - \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right) F_1 \right] \bar{e}_3. \quad (1.87)$$

В произвольных ортогональных криволинейных координатах Div определяется выражением [59]:

$$Div \bar{F} = \nabla \bar{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (h_1 h_2 F_3) \right]. \quad (1.88)$$

Переходя к нашему случаю, когда  $x^3 = z$  ( $h_3 = 1$ ), получаем:

$$\begin{aligned}
\text{Div}\bar{F} &= \nabla\bar{F} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 F_1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (h_1 h_2 F_z) \right] = \{h_1, h_2 \neq f(z)\} = \\
&= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2)}{\partial x^1} F_1 + \frac{\partial(F_1)}{\partial x^1} h_2 + \frac{\partial(h_1)}{\partial x^2} F_2 + \frac{\partial(F_2)}{\partial x^2} h_1 + \frac{h_1 h_2 \partial(F_z)}{\partial z} \right] = \frac{1}{h_1} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^1} \right) F_1 + \\
&+ \frac{1}{h_2} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} \right) F_2 + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{h_1} \left( \Gamma_{21}^2 + \frac{\partial}{\partial x^1} \right) F_1 + \frac{1}{h_2} \left( \Gamma_{12}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \right) F_2 + \frac{\partial F_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Учитывая зависимость  $e^{-j\gamma z}$ , и, вычисляя частные производные, как в случае определения rot, окончательно получаем выражение для Div:

$$\text{Div}\bar{F} = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right) F_1 + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right) F_2 - j\gamma F_z. \tag{1.90}$$

В произвольных ортогональных криволинейных координатах Grad определяется выражением [59]:

$$\text{Grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial z} e_3, \tag{1.91}$$

где  $\varphi$ - скалярная функция.

Разлагая вектор  $\bar{F}$  по координатным осям  $u_1, u_2, z$  и, учитывая предыдущие замечания для ортогональных криволинейных систем координат с продольно-регулярной осью, получаем выражения для Grad:

$$\begin{cases} \text{Grad}F_1 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x^1} \right) e_1 + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x^2} \right) e_2 - j\gamma F_1 e_3; \\ \text{Grad}F_2 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x^1} \right) e_1 + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x^2} \right) e_2 - j\gamma F_2 e_3; \\ \text{Grad}F_z = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^1} \right) e_1 + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x^2} \right) e_2 - j\gamma F_z e_3. \end{cases} \tag{1.92}$$

Введем обозначения:

$$\nabla_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1}; \quad \nabla_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2}; \quad \delta_1 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right); \quad \delta_2 = \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right). \tag{1.93}$$

С учетом (1.93) выпишем выражения для пространственных дифференциальных операторов для криволинейных ортогональных систем координат с продольно-регулярной осью:

$$\text{Rot}\bar{F} = (\nabla_2 F_z + j\gamma F_2)\bar{e}_1 - (\nabla_1 F_z + j\gamma F_1)\bar{e}_2 + [\delta_1 F_2 - \delta_2 F_1]\bar{e}_3, \quad (1.94)$$

$$\text{Div}\bar{F} = \delta_1 F_1 + \delta_2 F_2 - j\gamma F_z, \quad (1.95)$$

$$\begin{cases} \text{Grad}F_1 = (\nabla_1 F_1)\bar{e}_1 + (\nabla_2 F_1)\bar{e}_2 - (j\gamma F_1)\bar{e}_3 \\ \text{Grad}F_2 = (\nabla_1 F_2)\bar{e}_1 + (\nabla_2 F_2)\bar{e}_2 - (j\gamma F_2)\bar{e}_3 \\ \text{Grad}F_z = (\nabla_1 F_z)\bar{e}_1 + (\nabla_2 F_z)\bar{e}_2 - (j\gamma F_z)\bar{e}_3 \end{cases} \quad (1.96)$$

Формулы для  $\text{Rot}\bar{F}$  (1.94) и  $\text{Div}\bar{F}$  (1.95) входят в уравнения Максвелла и описывают характеристики ЭМВ в любой криволинейной ортогональной системе координат для случая, когда продольная ось совпадает с осью  $z$ .

### 1.2.2. Общие формулы для получения уравнений Гельмгольца для НЕ и ЕН волн

Используя (1.94), в уравнении (1.82) проведем разложения по осям  $\text{Rot}\bar{H}$  и  $\text{Rot}\bar{E}$ .

$$\begin{cases} \nabla_2 H_z + j\gamma H_2 = j\omega \varepsilon E_1, \\ -(\nabla_1 H_z + j\gamma H_1) = j\omega \varepsilon E_2, \\ \delta_1 H_2 - \delta_2 H_1 = j\omega \varepsilon E_z. \end{cases} \quad (1.97)$$

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z + j\gamma E_2 = -j\omega \bar{B}_1 = -j\omega(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z), \\ \nabla_1 E_z + j\gamma E_1 = j\omega \bar{B}_2 = j\omega(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z), \\ \delta_1 E_2 - \delta_2 E_1 = -j\omega \bar{B}_z = -j\omega(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z), \end{cases} \quad (1.98)$$

где  $\nabla_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1}$ ;  $\nabla_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2}$ ;  $\delta_1 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right)$ ;  $\delta_2 = \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right)$ ;

$k, l, m, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$  - компоненты тензора магнитной проницаемости феррита при произвольном намагничивании;  $\omega$  - циклическая частота.

Из формулы (1.95) получим  $\text{div}\bar{B}$  для произвольного намагничивания:

$$\begin{aligned} \text{div}\bar{B} &= \delta_1 B_1 + \delta_2 B_2 - j\gamma B_z = \delta_1(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z) + \\ &+ \delta_2(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z) - j\gamma(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z) = 0. \end{aligned} \quad (1.99)$$

После компоновки выражение (1.99) примет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{B} = jk(\delta_1 H_2 - \delta_2 H_1) + \delta_1(\mu_{11} H_1 + j l H_z) + \delta_2(\mu_{22} H_2 + j m H_z) - \\ - j\gamma(-j l H_1 - j m H_2 + \mu_{33} H_z) = 0. \end{aligned} \quad (1.100)$$

В первое слагаемое (1.100) подставим третье уравнение системы (1.97):

$$k w \varepsilon E_z + j\gamma(-j l H_1 - j m H_2 + \mu_{33} H_z) = \delta_1(\mu_{11} H_1 + j l H_z) + \delta_2(\mu_{22} H_2 + j m H_z). \quad (1.101)$$

Вначале получим уравнение Гельмгольца НЕ – волны. Для этого выразим  $E_1$  и

$E_2$  из системы (1.97):

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{j w \varepsilon} \nabla_2 H_z + \frac{\gamma}{w \varepsilon} H_2, \\ E_2 = -\frac{1}{j w \varepsilon} \nabla_1 H_z - \frac{\gamma}{w \varepsilon} H_1. \end{cases} \quad (1.102)$$

Выражение (1.102) подставим в первые два уравнения системы (1.98):

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z - \frac{\gamma}{w \varepsilon} \nabla_1 H_z - \frac{j \gamma^2}{w \varepsilon} H_1 = -j w (\mu_{11} H_1 + j k H_2 + j l H_z), \\ \nabla_1 E_z + \frac{\gamma}{w \varepsilon} \nabla_2 H_z + \frac{j \gamma^2}{w \varepsilon} H_2 = j w (-j k H_1 + \mu_{22} H_2 + j m H_z). \end{cases} \quad (1.103)$$

На первое уравнение системы (1.103) воздействуем оператором  $\delta_1$ , а на второе уравнение (1.103) – оператором  $\delta_2$ :

$$\begin{cases} \delta_1 \nabla_2 E_z - \frac{\gamma}{w \varepsilon} \delta_1 \nabla_1 H_z - \frac{j \gamma^2}{w \varepsilon} \delta_1 H_1 + j w \delta_1 (\mu_{11} H_1 + j k H_2 + j l H_z) = 0, \\ \delta_2 \nabla_1 E_z + \frac{\gamma}{w \varepsilon} \delta_2 \nabla_2 H_z + \frac{j \gamma^2}{w \varepsilon} \delta_2 H_2 - j w \delta_2 (-j k H_1 + \mu_{22} H_2 + j m H_z) = 0. \end{cases} \quad (1.104)$$

В последнем выражении для удобства отдельно определим дифференциальные операторы II порядка. Определим дифференциальный оператор II порядка  $\delta_1 \nabla_1$ :

$$\begin{aligned}
\delta_1 \nabla_1 &= \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right) \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(h_1)^{-1}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \\
&+ \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{h_1} \left( -\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \\
&\frac{1}{h_1^2} \left( -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial x^1} = -\frac{1}{h_1^2} \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial x^1} = \\
&= \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) \frac{\partial}{\partial x^1} = \Delta_{11}.
\end{aligned} \tag{1.105}$$

Определим следующий дифференциальный оператор II порядка  $\delta_2 \nabla_2$ :

$$\begin{aligned}
\delta_2 \nabla_2 &= \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right) \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial(h_2)^{-1}}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} + \\
&+ \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{h_2} \left( -\frac{1}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \\
&= \frac{1}{h_2^2} \left( -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2^2} \frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{1}{h_2^2} \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2^2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \\
&= \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^2} = \Delta_{22}.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

Определим следующий дифференциальный оператор II порядка  $\delta_1 \nabla_2$ :

$$\begin{aligned}
\delta_1 \nabla_2 &= \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right) \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial(h_2)^{-1}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} + \\
&+ \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right) + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{h_1} \left( -\frac{1}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \\
&= -\frac{1}{h_1 h_2} \Gamma_{21}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\Gamma_{21}^2}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{h_1 h_2} \left( -\Gamma_{21}^2 + \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^2} = \\
&= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} = \Delta_{12}.
\end{aligned} \tag{1.107}$$

Определим следующий дифференциальный оператор II порядка  $\delta_2 \nabla_1$ :

$$\begin{aligned}
\delta_2 \nabla_1 &= \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right) \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial (h_1)^{-1}}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + \\
&+ \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right) + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{h_2} \left( -\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \\
&= -\frac{1}{h_1 h_2} \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\Gamma_{12}^1}{h_2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{h_1 h_2} \left( -\Gamma_{12}^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} + \Gamma_{12}^1 \right) \frac{\partial}{\partial x^1} = \\
&= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} = \Delta_{21}.
\end{aligned} \tag{1.108}$$

Получили, что дифференциальный операторы  $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ .

Учитывая (1.105)-(1.108), перепишем (1.104):

$$\begin{cases} \Delta_{12} E_z - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \Delta_{11} H_z - \frac{j\gamma^2}{w\varepsilon} \delta_1 H_1 + jw\delta_1 (\mu_{11} H_1 + jkH_2 + jlH_z) = 0, \\ \Delta_{21} E_z + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \Delta_{22} H_z + \frac{j\gamma^2}{w\varepsilon} \delta_2 H_2 - jw\delta_2 (-jkH_1 + \mu_{22} H_2 + jmH_z) = 0. \end{cases} \tag{1.109}$$

Из первого уравнения (1.109) вычтем второе и изменим знак полученного выражения [60]:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{w\varepsilon} (\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z) + \frac{j\gamma^2}{w\varepsilon} (\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) + wk(\delta_1 H_2 - \delta_2 H_1) - \\
- jw[\delta_1 (\mu_{11} H_1 + jlH_z) + \delta_2 (\mu_{22} H_2 + jmH_z)] = 0.
\end{aligned} \tag{1.110}$$

Вместо третьего слагаемого (1.110) подставим третье уравнение (1.97), а вместо четвертого слагаемого (1.110) подставим (1.101):

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{w\varepsilon} (\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z) + \frac{j\gamma^2}{w\varepsilon} (\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) + wk(jw\varepsilon E_z) - \\
- jw[kw\varepsilon E_z + j\gamma(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33} H_z)] = 0.
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Умножив выражение (1.111) на  $\frac{w\varepsilon}{\gamma}$ , получим:

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - jw^2 \varepsilon l H_1 - jw^2 \varepsilon m H_2 + w^2 \varepsilon \mu_{33} H_z = 0. \tag{1.112}$$

или

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - jw^2 \varepsilon (lH_1 + mH_2) + w^2 \varepsilon \mu_{33} H_z = 0. \tag{1.113}$$



Выражение (1.112) или (1.113) позволит получить уравнение Гельмгольца НЕ-волны в ограниченной гиротропной области с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании.

Теперь получим уравнение Гельмгольца ЕН – волны. Из первого уравнения системы (1.98) выразим  $H_2$ , а из второго-  $H_1$ :

$$\begin{cases} H_2 = \frac{\nabla_2 E_z}{wk} + \frac{j\gamma}{wk} E_2 + \frac{j\mu_{11}}{k} H_1 - \frac{l}{k} H_z; \\ H_1 = \frac{\nabla_1 E_z}{wk} + \frac{j\gamma}{wk} E_1 - \frac{j\mu_{22}}{k} H_2 + \frac{m}{k} H_z. \end{cases} \quad (1.114)$$

В первое уравнение (1.114) подставим второе и после преобразований получим:

$$\begin{aligned} H_2 = & \frac{k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \nabla_2 E_z + \frac{j\gamma k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} E_2 + \frac{j\mu_{11}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \nabla_1 E_z - \\ & - \frac{\gamma\mu_{11}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} E_1 + \frac{j\mu_{11}m}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z - \frac{lk}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Во второе уравнение (1.115) подставим первое и после преобразований получим:

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \nabla_1 E_z + \frac{j\gamma k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} E_1 - \frac{j\mu_{22}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \nabla_2 E_z - \\ & - \frac{\gamma\mu_{22}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} E_2 + \frac{j\mu_{22}l}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z + \frac{mk}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z. \end{aligned} \quad (1.116)$$

На выражение (1.115) воздействуем оператором  $\delta_1$ , а на (1.116) -  $\delta_2$ . При этом в полученных выражениях используем (1.107) и (1.108):

$$\begin{aligned} \delta_1 H_2 = & \frac{k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \Delta_{12} E_z + \frac{j\gamma k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \delta_1 E_2 + \frac{j\mu_{11}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \Delta_{11} E_z - \\ & - \frac{\gamma\mu_{11}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \delta_1 E_1 + \frac{j\mu_{11}m}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} \delta_1 H_z - \frac{lk}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} \delta_1 H_z. \end{aligned} \quad (1.117)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 H_1 = & \frac{k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \Delta_{12} E_z + \frac{j\gamma k}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \delta_2 E_1 - \frac{j\mu_{22}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \Delta_{22} E_z - \\ & - \frac{\gamma\mu_{22}}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} \delta_2 E_2 + \frac{j\mu_{22}l}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} \delta_2 H_z + \frac{mk}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} \delta_2 H_z. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Из (1.117) вычтем (1.118):

$$\begin{aligned} \delta_1 H_2 - \delta_2 H_1 = & \frac{j\gamma(\delta_1 E_2 - \delta_2 E_1)}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} + \frac{j(\mu_{11}\Delta_{11}E_z + \mu_{22}\Delta_{22}E_z)}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} - \\ & - \frac{\gamma(\mu_{11}\delta_1 E_1 + \mu_{22}\delta_2 E_2)}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} + \frac{j(\mu_{11}m\delta_1 - \mu_{22}l\delta_2)}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z - \frac{lk\delta_1 + mk\delta_2}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z. \end{aligned} \quad (1.119)$$

В левую часть (1.119) подставим третье уравнение системы (1.97), а в первое слагаемое (1.119) – третье уравнение системы (1.98):

$$\begin{aligned} jw\varepsilon E_z = & \frac{j\gamma(-wIH_1 - wIH_2 - jw\mu_{33}H_z)}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} + \frac{j(\mu_{11}\Delta_{11}E_z + \mu_{22}\Delta_{22}E_z)}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} - \\ & - \frac{\gamma(\mu_{11}\delta_1 E_1 + \mu_{22}\delta_2 E_2)}{w(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})} + \frac{j(\mu_{11}m\delta_1 - \mu_{22}l\delta_2)}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z - \frac{lk\delta_1 + mk\delta_2}{k^2 - \mu_{11}\mu_{22}} H_z. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Умножив выражение (1.120) на мнимую единицу  $j$ , после преобразования получим [60]:

$$\begin{aligned} \mu_{11}\Delta_{11}E_z + \mu_{22}\Delta_{22}E_z + j\gamma(\mu_{11}\delta_1 E_1 + \mu_{22}\delta_2 E_2) + w(\mu_{11}m\delta_1 - \mu_{22}l\delta_2)H_z + \\ + j\gamma w(-IH_1 - mH_2 - j\mu_{33}H_z) - w^2\varepsilon(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})E_z + jw(lk\delta_1 + mk\delta_2)H_z = 0. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Таким образом, уравнение (1.113) позволяет получить уравнение Гельмгольца НЕ- волны в ограниченной гиротропной области с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании, а выражение (1.121) - уравнение Гельмгольца ЕН- волны.

### 1.2.3. Уравнения Гельмгольца НЕ и ЕН волн в ограниченных гиротропных областях с различными ортогональными формами поперечного сечения при продольном намагничивании

В дальнейшем ограничимся рассмотрением ортогональных систем координат, в которых выполняется условие:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (1.122)$$

где  $g_{ij}$  - фундаментальный метрический тензор;  $\delta_{ij}$  - символы Кронекера.

При этом метрику рассматриваемой системы координат можно выразить в виде [48]:

$$dS^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2, \quad (1.123)$$

где  $h_i$  - коэффициенты Ламэ,  $x^i$  - координатные оси криволинейной ортогональной системы координат (верхние индексы – это не показатели степени).

Введем для рассматриваемой области ортогональную систему координат, в которой одна из осей совпадает с одной из осей декартовой системы координат:

$$\begin{cases} x^3 = z; \\ h_3 = 1. \end{cases} \quad (1.124)$$

Будем считать область регулярным, при этом выполняется условия:

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial z} = 0. \quad (1.125)$$

Таким образом, в такой ортогональной системе координат контур поперечного сечения будет описываться кривой II-порядка, описываемой лишь двумя коэффициентами Ламэ:  $h_1$  и  $h_2$ . При этом если [61]:

а) коэффициенты будут постоянны, мы получим прямоугольный контур, описываемый в декартовой системе координат;

б) если  $h_2 \neq 1$ , получим круглое сечение волновода, описываемое в цилиндрической системе координат;

в) если  $h_1 \neq 1$ ,  $h_2 \neq 1$ , поперечное сечение волновода будет представляться конечным сечением, описываемым кривой II-порядка. Таким образом, в общем случае поперечное сечение волновода может описываться в эллиптических, параболических или каких-либо других ортогональных координат.

Выражение (1.113) позволяет получить уравнение Гельмгольца НЕ волны в гиротропной области с ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании, из которой можно легко перейти конкретным формам: прямоугольным, цилиндрическим, эллиптическим.

При продольном намагничивании тензор магнитной проницаемости феррита описывается выражением (1.77), т.е.  $\mu_{33} = \mu_{\parallel}$ ,  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$ ,  $l = m = 0$ ,  $k \neq 0$ . В этом случае выражение (1.113) примет вид:

$$\Delta_{11}H_z + \Delta_{22}H_z + j\gamma(\delta_1H_1 + \delta_2H_2) + w^2\varepsilon\mu_{\parallel}H_z = 0. \quad (1.126)$$

При продольном намагничивании формула (3.5) для  $\text{div}\bar{B}$  примет вид:

$$\mu\delta_1H_1 + \mu\delta_2H_2 = w\varepsilon kE_z + j\gamma\mu_{\parallel}H_z. \quad (1.127)$$

Или

$$\delta_1H_1 + \delta_2H_2 = \frac{w\varepsilon kE_z + j\gamma\mu_{\parallel}H_z}{\mu}. \quad (1.128)$$

Подставив (1.128) в (1.126), получим [60]:

$$\Delta_{11}H_z + \Delta_{22}H_z + \left( w^2\varepsilon\mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu}\gamma^2 \right) H_z + j\gamma w\varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (1.129)$$

Выражение (1.129) представляет собой уравнение Гельмгольца НЕ- волны в гиротропной области с ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании.

Получим уравнение Гельмгольца гиротропной прямоугольной области при продольном намагничивании. Из (1.15) и (1.39) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля для декартовой системы координат ( $x^1 = x$ ;  $x^2 = y$ ;  $x^3 = z$ ):

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = h_3 = 1; \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0. \end{cases} \quad (1.130)$$

Тогда дифференциальные операторы II-го порядка (1.105) и (1.106) с учетом (1.130) примут вид:

$$\begin{cases} \delta_1\nabla_1 = \Delta_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \\ \delta_2\nabla_2 = \Delta_{22} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (1.131)$$

Подставив (1.131) в (1.129) получим уравнение Гельмгольца НЕ – волны в гиротропной прямоугольной области при продольном намагничивании [60]:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (1.132)$$

Перейдем к гиротропной цилиндрической области при продольном намагничивании. Из (1.15) и (1.39) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля для цилиндрической системы координат ( $x^1 = r$ ;  $x^2 = \varphi$ ;  $x^3 = z$ ):

$$\begin{cases} h_1 = h_3 = 1; h_2 = r; \\ \Gamma_{12}^1 = 0; \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}. \end{cases} \quad (1.133)$$

Тогда дифференциальные операторы II-го порядка (1.105) и (1.106) с учетом (1.133) примут вид:

$$\begin{cases} \delta_1 \nabla_1 = \Delta_{11} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \\ \delta_2 \nabla_2 = \Delta_{22} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \quad (1.134)$$

Подставив (1.134) в (1.129) получим уравнение Гельмгольца НЕ – волны в гиротропной цилиндрической области при продольном намагничивании [60]:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (1.135)$$

Перейдем к гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании. Из (1.15) и (1.39) получим коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля для эллиптической системы координат ( $x^1 = \xi$ ;  $x^2 = \varphi$ ;  $x^3 = z$ ):

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = ed; h_3 = 1; \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\text{Sin}2\xi}{2d^2}; \Gamma_{21}^2 = \frac{\text{Sh}2\xi}{2d^2}, \end{cases} \quad (1.136)$$

где  $e$  - фокус эллипса;  $d^2 = ch^2 \xi - \cos^2 \varphi$ .

Тогда дифференциальные операторы II-го порядка (1.105) и (1.106) с учетом (1.136) примут вид:

$$\begin{cases} \delta_1 \nabla_1 = \Delta_{11} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \\ \delta_2 \nabla_2 = \Delta_{22} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \quad (1.137)$$

Подставив (1.137) в (1.129) получим уравнение Гельмгольца HE – волны в ограниченной гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании [62]:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j e^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (1.138)$$

Выражение (1.132) полностью совпадает с результатом, полученным в [2], также как и (1.135) с результатами из [2, 63], что подтверждает правильность этих формул. Выражения (1.129) и (1.138) являются оригинальными результатами.

Выражение (1.121) позволяет получить уравнение Гельмгольца EH- волны в ограниченной гиротропной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании, из которого также, как и в случае HE волны, можно легко перейти конкретным формам: прямоугольным, цилиндрическим, эллиптическим.

При продольном намагничивании тензор магнитной проницаемости феррита описывается выражением (1.77), т.е.  $\mu_{33} = \mu_{\parallel}$ ,  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$ ,  $l = m = 0$ ,  $k \neq 0$ . В этом случае выражение (1.121) примет вид:

$$\mu \Delta_{11} E_z + \mu \Delta_{22} E_z + j \gamma \mu (\delta_1 E_1 + \delta_2 E_2) - j \gamma k w \mu_{\parallel} H_z - w^2 \varepsilon (k^2 - \mu^2) E_z = 0. \quad (1.139)$$

Из третьего уравнения Максвелла известно (при отсутствии зарядов):

$$\operatorname{div} \bar{E} = 0. \quad (1.140)$$

Используя (1.95) распишем (1.140):

$$\operatorname{div} \bar{E} = \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 - j \gamma E_z = 0. \quad (1.141)$$

Или

$$\delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 = j\gamma E_z. \quad (1.142)$$

Подставив (1.142) в (1.139) и разделив полученное выражение на  $\mu$ , получим уравнение Гельмгольца ЕН- волны в ограниченной гиротропной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании [32]:

$$\Delta_{11} E_z + \Delta_{22} E_z + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j\gamma \kappa w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0, \quad (1.143)$$

где  $\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}$ .

Перейдем к конкретным формам поперечного сечения ограниченной области. Подставив (1.131) в (1.143) получим уравнение Гельмгольца ЕН – волны в гиротропной прямоугольной области при продольном намагничивании [60]:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j\gamma \kappa w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (1.144)$$

Подставив (1.134) в (1.143) получим уравнение Гельмгольца ЕН – волны в гиротропной цилиндрической области при продольном намагничивании [60]:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j\gamma \kappa w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (1.145)$$

Подставив (1.137) в (1.143) получим уравнение Гельмгольца ЕН – волны в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании [62]:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j e^2 d^2 \gamma \kappa w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (1.146)$$

Формула (1.144) полностью совпадает с результатом, полученным в [2], также как и (1.145) с результатами из [2, 63], что подтверждает правильность этих формул. Выражения (1.143) и (1.146) являются оригинальными результатами.

### 1.3. Выводы по главе

1) Разработан «Метод инвариантных преобразований», позволяющий получить общие аналитические выражения (1.113) (для HE - волны) и (1.121) (для EH- волны) для ограниченной гиротропной области с ортогонально-криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании, на основе которых можно определить, соответствующие обобщенные уравнения Гельмгольца;

2) С использованием (1.113) и (1.121), соответственно, впервые получены уравнения Гельмгольца (1.129) (для гибридной HE- волны) и (1.143) (для гибридной EH- волны) для гиротропной продольно-намагниченной ограниченной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения, инвариантные относительно преобразования координат;

3) Впервые получены уравнения Гельмгольца (1.138) (для HE – волны) и (1.146) (EH – волны) для ограниченной гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.



## ГЛАВА 2

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ТЕНЗОРНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

При описании модели распространения электромагнитных волн в ограниченной области, заполненной гиротропной средой, поставлены и решены краевые задачи Дирихле и Неймана, определены поперечные компоненты ЭМВ с использованием дифференциальных операторов дифференцирования по времени и по пространственным координатам. Операторы дифференцирования по пространственным координатам могут быть векторами или скалярами, с которыми можно производить все известные из векторной алгебры действия, в частности, векторное произведение, скалярное произведение и смешанное произведение. Определение дифференциальных операторов I, II-го порядков с учетом коэффициентов Ламэ и символов Кристоффеля для гиротропной регулярной ограниченной области с обобщенно-ортогональным поперечным сечением позволяет построить на единой базе общую модель распространения ЭМВ. Такой подход позволяет выявить наиболее присущие закономерности поведения ЭМВ в гиротропной ограниченной области с разными ортогональными формами поперечного сечения. Общая модель позволяет перейти к конкретной форме поперечного сечения, т.е. к конкретной системе координат, так как форма поперечного сечения определяет выбор системы координат. Для этого достаточно в выражениях для общего случая подставить значения коэффициентов Ламэ и символов Кристоффеля конкретной системы координат.

#### **2.1. Общие уравнения электромагнитных волн в ограниченной области с обобщенно-ортогональным поперечным сечением и тензорным заполнением**

В параграфе определяются поперечные компоненты ЭМП необходимые для решения волновых уравнений в ограниченной гиротропной области произвольной формы, краевые условия Дирихле и Неймана.

### 2.1.1. Поперечные компоненты электромагнитного поля при произвольном намагничивании

Определение поперечных компонент электромагнитного поля  $(E_1, E_2, H_1, H_2)$  означает, что они должны быть выражены через продольные составляющие, т.е. через компоненты  $E_z, H_z$ . Исходными для этого являются дифференциальные уравнения Максвелла.

Для определения поперечных компонент ЭМП в уравнениях Максвелла (1.82), используя (1.94), проведем разложения по осям  $Rot\bar{H}$  и  $Rot\bar{E}$ . Тогда для  $Rot\bar{H}$  имеем:

$$\begin{cases} \nabla_2 H_z + j\gamma H_2 = j\omega \varepsilon E_1, \\ -(\nabla_1 H_z + j\gamma H_1) = j\omega \varepsilon E_2, \\ \delta_1 H_2 - \delta_2 H_1 = j\varepsilon\omega E_z \end{cases} \quad (2.1)$$

При разложении  $Rot\bar{E}$  необходимо иметь в виду, что магнитная проницаемость феррита при произвольном намагничивании есть тензорная величина, которая в общем случае имеет вид [9]:

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Учитывая (2.2) и (1.94), из второго уравнения Максвелла (1.82) для  $Rot\bar{E}$  имеем:

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z + j\gamma E_2 = -j\omega(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z), \\ \nabla_1 E_z + j\gamma E_1 = j\omega(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z), \\ \delta_1 E_2 - \delta_2 E_1 = -j\omega(-jlH_1 - jmH_2 + \mu_{33}H_z). \end{cases} \quad (2.3)$$

Из первых двух уравнений (2.1) и (2.3) находим поперечные компоненты. Для этого из первого уравнения (2.1) выражаем  $H_2$ :

$$H_2 = \frac{1}{j\gamma}(j\omega\varepsilon E_1 - \nabla_2 H_z). \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) во второе уравнение (2.3), получим:

$$\begin{aligned}\nabla_1 E_z + j\gamma E_1 &= jw(-jkH_1 + \mu_{22}H_2 + jmH_z) = jw\left(-jkH_1 + \mu_{22}\frac{1}{j\gamma}(jw\varepsilon E_1 - \nabla_2 H_z) + jmH_z\right) = \\ &= wkH_1 + \frac{j\mu_{22}w}{\gamma}w\varepsilon E_1 - \frac{\mu_{22}w\nabla_2 H_z}{\gamma} - wmH_z.\end{aligned}$$

После приведения к общему знаменателю имеем:

$$\frac{\gamma\nabla_1 E_z}{\gamma} + \frac{j\gamma^2 E_1}{\gamma} = \frac{\gamma wkH_1}{\gamma} + \frac{j\mu_{22}w^2\varepsilon E_1}{\gamma} - \frac{\mu_{22}w\nabla_2 H_z}{\gamma} - \frac{\gamma wmH_z}{\gamma}.$$

Умножив, левую и правую части на  $-\gamma$  и после компоновки, получим:

$$jE_1(\mu_{22}w^2\varepsilon - \gamma^2) = \mu_{22}w\nabla_2 H_z + \gamma wmH_z + \gamma\nabla_1 E_z - \gamma wkH_1.$$

Выражая поперечную компоненту  $E_1$ , получим:

$$E_1 = \frac{1}{j(\mu_{22}w^2\varepsilon - \gamma^2)}[\gamma\nabla_1 E_z - \gamma wkH_1 + (\mu_{22}w\nabla_2 + \gamma wm)H_z].$$

Для того, чтобы убрать мнимую единицу в знаменателе, правую часть умножим и разделим на  $j$ , тогда имеем:

$$E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2}\left[\nabla_1 E_z - wkH_1 + \left(\frac{\mu_{22}w}{\gamma}\nabla_2 + wm\right)H_z\right], \quad (2.5)$$

$$\text{где } b^2 = w^2\mu_{22}\varepsilon - \gamma^2. \quad (2.6)$$

Далее, из второго уравнения (2.1) выражаем  $H_1$ :

$$H_1 = -\frac{1}{j\gamma}(jw\varepsilon E_2 + \nabla_1 H_z). \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в первое уравнение (2.3) получим:

$$\begin{aligned}\nabla_2 E_z + j\gamma E_2 &= -jw(\mu_{11}H_1 + jkH_2 + jlH_z) = -jw\left(-\mu_{11}\frac{1}{j\gamma}(jw\varepsilon E_2 + \nabla_1 H_z) + jkH_2 + jlH_z\right) = \\ &= j\frac{\mu_{11}w^2\varepsilon E_2}{\gamma} + \frac{\mu_{11}}{\gamma}w\nabla_1 H_z + wkH_2 + wlH_z.\end{aligned}$$

После приведения к общему знаменателю, получим:

$$\frac{\gamma\nabla_2 E_z}{\gamma} + \frac{j\gamma^2 E_2}{\gamma} = \frac{j\mu_{11}w^2\varepsilon E_2}{\gamma} + \frac{\mu_{11}w\nabla_1 H_z}{\gamma} + \frac{\gamma wkH_2}{\gamma} + \frac{\gamma wlH_z}{\gamma}.$$

Умножив левую и правую части на  $-\gamma$  и после компоновки:

$$jE_2(w^2 \varepsilon \mu_{11} - \gamma^2) = \gamma \nabla_2 E_z - \gamma w k H_2 - (\mu_{11} w \nabla_1 + \gamma w l) H_z.$$

Выражая поперечную компоненту  $E_2$ , имеем:

$$E_2 = \frac{1}{j(w^2 \varepsilon \mu_{11} - \gamma^2)} [\gamma \nabla_2 E_z - \gamma w k H_2 - (\mu_{11} w \nabla_1 + \gamma w l) H_z].$$

Для того, чтобы убрать мнимую единицу в знаменателе, правую часть умножим и разделим на  $j$ , тогда:

$$E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - w k H_2 - \left( \frac{\mu_{11} w}{\gamma} \nabla_1 + w l \right) H_z \right], \quad (2.8)$$

$$\text{где } a^2 = w^2 \mu_{11} \varepsilon - \gamma^2. \quad (2.9)$$

В выражении (2.5), определяющем поперечную компоненту  $E_1$ , необходимо исключить в правой части поперечную составляющую  $H_1$  (поперечные компоненты должны быть выражены через продольные), а в (2.8), выражающем поперечную компоненту  $E_2$  - компоненту  $H_2$ . После подстановки в (2.5) выражения (2.7) получим:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{j\gamma}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z - w k H_1 + \left( \frac{\mu_{22} w}{\gamma} \nabla_2 + w m \right) H_z \right] = \\ &= -\frac{j\gamma}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z - w k \left( -\frac{1}{j\gamma} (j w \varepsilon E_2 + \nabla_1 H_z) \right) + \left( \frac{\mu_{22} w}{\gamma} \nabla_2 + w m \right) H_z \right] = \\ &= -\frac{j\gamma \nabla_1 E_z}{b^2} - \frac{j w^2 k \varepsilon E_2}{b^2} - \frac{w k \nabla_1 H_z}{b^2} - \frac{j \mu_{22} w \nabla_2 H_z}{b^2} - \frac{j \gamma w m H_z}{b^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставим (2.4) в (2.8):

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{j\gamma}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - w k H_2 - \left( \frac{\mu_{11} w}{\gamma} \nabla_1 + w l \right) H_z \right] = \\ &= -\frac{j\gamma}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - w k \left( \frac{1}{j\gamma} (j w \varepsilon E_1 - \nabla_2 H_z) \right) - \left( \frac{\mu_{11} w}{\gamma} \nabla_1 + w l \right) H_z \right] = \\ &= -\frac{j\gamma \nabla_2 E_z}{a^2} + \frac{j w^2 k \varepsilon E_1}{a^2} - \frac{w k \nabla_2 H_z}{a^2} + \frac{j \mu_{11} w \nabla_1 H_z}{a^2} + \frac{j \gamma w l H_z}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из выражений (2.10) и (2.11) составим новую систему:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma\nabla_1 E_z}{b^2} - \frac{jw^2 k\varepsilon E_2}{b^2} - \frac{wk\nabla_1 H_z}{b^2} - \frac{j\mu_{22}w\nabla_2 H_z}{b^2} - \frac{j\gamma w m H_z}{b^2}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma\nabla_2 E_z}{a^2} + \frac{jw^2 k\varepsilon E_1}{a^2} - \frac{wk\nabla_2 H_z}{a^2} + \frac{j\mu_{11}w\nabla_1 H_z}{a^2} + \frac{j\gamma w l H_z}{a^2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Анализируя (2.12) видим, что подставляя одно уравнение в другое получим иско-  
мые поперечные компоненты  $E_1$  и  $E_2$ , выраженные через продольные составляющие.

Подставив в первое уравнение (для  $E_1$ ) выражение для  $E_2$  получим:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{j\gamma\nabla_1 E_z}{b^2} - \frac{jw^2 k\varepsilon E_2}{b^2} - \frac{wk\nabla_1 H_z}{b^2} - \frac{j\mu_{22}w\nabla_2 H_z}{b^2} - \frac{j\gamma w m H_z}{b^2} = \\ &= -\frac{j\gamma\nabla_1 E_z}{b^2} - \frac{jw^2 k\varepsilon \left( -j\gamma\nabla_2 E_z + \frac{jw^2 k\varepsilon E_1}{a^2} - \frac{wk\nabla_2 H_z}{a^2} + \frac{j\mu_{11}w\nabla_1 H_z}{a^2} + \frac{j\gamma w l H_z}{a^2} \right)}{a^2 b^2} - \\ &- \frac{wk\nabla_1 H_z}{b^2} - \frac{j\mu_{22}w\nabla_2 H_z}{b^2} - \frac{j\gamma w m H_z}{b^2}. \end{aligned}$$

После компоновки получаем:

$$E_1 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \left( \frac{w\mu_{22}}{\gamma} \frac{p^2}{a^2} \nabla_2 + w m \right) H_z - \frac{jw^2 k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 + w l \right) H_z \right] \right\}, \quad (2.13)$$

$$\text{где } p^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2. \quad (2.14)$$

Во второе уравнение (2.12) (для  $E_2$ ), подставив первое уравнение (для  $E_1$ ), полу-  
чим:

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{j\gamma\nabla_2 E_z}{a^2} + \frac{jw^2 k\varepsilon E_1}{a^2} - \frac{wk\nabla_2 H_z}{a^2} + \frac{j\mu_{11}w\nabla_1 H_z}{a^2} + \frac{j\gamma w l H_z}{a^2} = \\ &= -\frac{j\gamma\nabla_2 E_z}{a^2} + \frac{jw^2 k\varepsilon \left( -\frac{j\gamma\nabla_1 E_z}{b^2} - \frac{jw^2 k\varepsilon E_2}{b^2} - \frac{wk\nabla_1 H_z}{b^2} - \frac{j\mu_{22}w\nabla_2 H_z}{b^2} - \frac{j\gamma w m H_z}{b^2} \right)}{a^2 b^2} - \\ &- \frac{wk\nabla_2 H_z}{a^2} + \frac{j\mu_{11}w\nabla_1 H_z}{a^2} + \frac{j\gamma w l H_z}{a^2}. \end{aligned}$$

После компоновки получаем:

$$E_2 = -\frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \left( \frac{w\mu_{11}}{\gamma} \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + w l \right) H_z + \frac{jw^2 k}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z + \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 + w m \right) H_z \right] \right\}, \quad (2.15)$$

$$\text{где } g^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2. \quad (2.16)$$

Выражения (2.13) и (2.15) определяют поперечные компоненты электрического поля ЭМВ.

Перейдем к определению поперечных компонент магнитного поля. Преобразуем выражение (2.7):

$$H_1 = -\frac{1}{j\gamma}(jw\varepsilon E_2 + \nabla_1 H_z) = -\frac{j}{j} \frac{1}{j\gamma}(jw\varepsilon E_2 + \nabla_1 H_z) = -\frac{w\varepsilon E_2}{\gamma} + \frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}. \quad (2.17)$$

Далее в формулу (2.17) подставим выражение (2.15):

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{w\varepsilon}{\gamma} E_2 + \frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma} = \\ &= -\frac{w\varepsilon}{\gamma} \left\{ -\frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \left( \frac{w\mu_{11}}{\gamma} \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + w l \right) H_z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 + w m \right) H_z \right] \right\} \right\} + \\ &\quad + \frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma} = \\ &= \frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \frac{w^2 \varepsilon \mu_{11}}{\gamma^2} \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{b^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}. \end{aligned}$$

В последнем выражении слагаемое  $\frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}$  внесем в фигурную скобку и после преобразования получим:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \frac{w^2 \mu_{11}}{\gamma^2} \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z + \frac{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2}{\gamma^2 b^2} \nabla_1 H_z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{jw^2 \varepsilon k}{b^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z \right] \right\}. \end{aligned}$$

После компоновки и группировки получим окончательное выражение для поперечной составляющей  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z + \frac{jw^2 k \varepsilon}{b^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Чтобы получить выражение для магнитной поперечной составляющей  $H_2$ , воспользуемся формулой (2.4), которую перепишем еще раз:

$$H_2 = \frac{1}{j\gamma} (jw\varepsilon E_1 - \nabla_2 H_z) = \frac{w\varepsilon}{\gamma} E_1 + \frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}. \quad (2.19)$$

Затем в (2.19) подставим выражение (2.13), тогда получим:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{j\gamma} (jw\varepsilon E_1 - \nabla_2 H_z) = \frac{w\varepsilon}{\gamma} E_1 + \frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma} = \\ &= \frac{w\varepsilon}{\gamma} \left\{ -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left[ \nabla_1 E_z + \left( \frac{w\mu_{22}}{\gamma} \frac{p^2}{a^2} \nabla_2 + wm \right) H_z - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 + wl \right) H_z \right] \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{j\nabla_2 H_z}{\gamma}. \end{aligned}$$

Внесем слагаемое  $\frac{j\nabla_1 H_z}{\gamma}$  в фигурную скобку и после преобразования получим:

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \frac{w^2 \varepsilon \mu_{22}}{\gamma^2} \frac{p^2}{a^2} \nabla_2 - \frac{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2}{\gamma^2 a^2} \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z \right] \right\}. \end{aligned}$$

После компоновки и группировки получим окончательное выражение для поперечной составляющей  $H_2$ :

$$H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z - \frac{jw^2 k \varepsilon}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Объединяя выражения (2.13), (2.15), (2.18), (2.20) получаем формулы для поперечных составляющих электромагнитного поля для гиротропной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения и с регулярной продольной осью, совпадающей с осью  $Z$  декартовой системы координат, при произвольном намагничивании [64, 65]:

$$\begin{cases}
E_1 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \left( \frac{w\mu_{22} p^2}{\gamma a^2} \nabla_2 + wm \right) H_z - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 + wl \right) H_z \right] \right\}, \\
E_2 = -\frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \left( \frac{w\mu_{11} g^2}{\gamma b^2} \nabla_1 + wl \right) H_z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z + \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 + wm \right) H_z \right] \right\}, \\
H_1 = \frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z + \frac{jw^2 k \varepsilon}{b^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z \right] \right\}, \\
H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z - \frac{jw^2 k \varepsilon}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z \right] \right\},
\end{cases} \quad (2.21)$$

где

$$\begin{cases}
a^2 = w^2 \mu_{11} \varepsilon - \gamma^2; \\
b^2 = w^2 \mu_{22} \varepsilon - \gamma^2; \\
g^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2; \\
p^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2.
\end{cases} \quad (2.22)$$

Введем дифференциальные операторы 1-го порядка с учетом произвольной намагнитченности:

$$\begin{cases}
\bar{\nabla}_1^l = \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + \frac{l}{\mu_{11}} \gamma; \\
\nabla_1^l = \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma}; \\
\bar{\nabla}_2^m = \frac{p^2}{a^2} \nabla_2 + \frac{m}{\mu_{22}} \gamma; \\
\nabla_2^m = \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma}.
\end{cases} \quad (2.23)$$

Использование (2.23) позволяет записать (2.21) в более компактной форме:



$$\begin{cases}
E_1 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \left( \frac{w\mu_{22}}{\gamma} \bar{\nabla}_2^m \right) H_z - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 + wl \right) H_z \right] \right\}, \\
E_2 = -\frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \frac{w\mu_{11}}{\gamma} \bar{\nabla}_1^l H_z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z + \left( \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 + wm \right) H_z \right] \right\}, \\
H_1 = \frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \nabla_1^l H_z + \frac{jw^2 k \varepsilon}{b^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z \right] \right\}, \\
H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \nabla_2^m H_z - \frac{jw^2 k \varepsilon}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z \right] \right\}.
\end{cases} \quad (2.24)$$

Формулы (2.22) и (2.24) выражают поперечные компоненты для наиболее общего случая гиротропной области с ортогонально криволинейной формой поперечного сечения с продольно-регулярной осью  $Z$  при произвольном намагничивании. Поэтому с помощью данных формул можно легко перейти к ограниченной изотропной области, т.е. когда ограниченная область заполнена не магнитной, а изотропной средой. В этом случае магнитная проницаемость среды (выражение (2.2)) не является тензором, а имеет вид:

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

То есть в изотропном случае недиагональные компоненты тензора магнитной проницаемости в формуле (2.2) имеют нулевые значения:  $k = l = m = 0$ . Сделаем предельный переход от гиротропной области к изотропной. Тогда формулы (2.21) и (2.24) при  $k = l = m = 0$  будут тождественно равны и примут вид [66]:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{w\mu}{\gamma} \nabla_2 H_z + \nabla_1 E_z \right\}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \frac{w\mu}{\gamma} \nabla_1 H_z \right\}, \\ H_1 = \frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z \right\}, \\ H_2 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z \right\}, \end{cases} \quad (2.26)$$

где  $\nabla_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}$ ;  $\nabla_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}$ ;  $a^2 = w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2$

Выражение (2.26) является общей формулой, описывающей поперечные компоненты в закрытых ограниченных изотропных областях с ортогональной формой поперечного сечения с продольно-регулярной координатной осью.

### 2.1.2. Поперечные компоненты электромагнитного поля для различных случаях намагничивания

Если внешнее намагничивающее поле совпадает с одним из координатных линий, то полученные выражения для поперечных компонент ЭМВ упрощаются. Различают поперечное (нормальное и касательное) и продольное намагничивания.

При нормальном намагничивании направление внешнего магнитного поля совпадает с координатной осью  $\varphi$  эллиптической системы координат и тензор магнитной проницаемости феррита (2.2) в этом случае принимает вид:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & jm \\ 0 & -jm & \mu \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\text{то есть } \mu_{11} = \mu_{\parallel}, \quad \mu_{22} = \mu_{33} = \mu, \quad k = l = 0, \quad m \neq 0. \quad (2.28)$$

Тогда в выражении (2.22) с учетом (2.28) получаем следующие преобразования:

$$\begin{cases} a^2 = w^2 \mu_{11} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu_{\parallel} \varepsilon - \gamma^2; \\ b^2 = w^2 \mu_{22} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \\ g^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{\parallel} \mu}{\mu_{\parallel}} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2; \\ p^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{\parallel} \mu}{\mu} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \gamma^2. \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\text{Из (2.29) следует, что } a^2 = p^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \gamma^2, \quad b^2 = g^2 = w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2. \quad (2.30)$$

Подставив (2.28) и (2.30) в выражение (2.21) получим формулы для поперечных составляющих электромагнитного поля для гиротропной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения при нормальном намагничивании:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \frac{w\mu}{\gamma} \left( \nabla_2 + \frac{m}{\mu} \gamma \right) H_z \right\} = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \frac{w\mu}{\gamma} \bar{\nabla}_2^m H_z \right\}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \frac{w\mu_{\parallel}}{\gamma} \nabla_1 H_z \right\}, \\ H_1 = \frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z \right\}, \\ H_2 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \left( \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} \right) H_z \right\} = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \nabla_2^m H_z \right\}, \end{cases} \quad (2.31)$$

где дифференциальные операторы 1-го порядка с учетом намагниченности (2.23) при нормальном намагничивании имеют вид:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_1^l = \nabla_1; \\ \nabla_1^l = \nabla_1; \\ \bar{\nabla}_2^m = \nabla_2 + \frac{m}{\mu} \gamma; \\ \nabla_2^m = \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma}. \end{cases} \quad (2.32)$$

При касательном намагничивании направление внешнего магнитного поля совпадает с координатной осью  $\xi$  эллиптической системы координат и тензор магнитной проницаемости феррита (2.2) в этом случае принимает вид:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & jl \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ -jl & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\text{где } \mu_{22} = \mu_{\parallel}, \quad \mu_{11} = \mu_{33} = \mu, \quad k = m = 0, \quad l \neq 0. \quad (2.34)$$

Выражение (2.22) с учетом (2.34) примет вид:

$$\begin{cases} a^2 = w^2 \mu_{11} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \\ b^2 = w^2 \mu_{22} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu_{\parallel} \varepsilon - \gamma^2; \\ g^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \gamma^2; \\ p^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2. \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\text{Из (2.35) следует, что } a^2 = p^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \quad b^2 = g^2 = w^2 \mu_{\parallel} \varepsilon - \gamma^2. \quad (2.36)$$

Подставив (2.34) и (2.36) в выражение (2.21), получим формулы для поперечных составляющих электромагнитного поля для гиротропной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения при касательном намагничивании:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \frac{w\mu_{\parallel}}{\gamma} \nabla_2 H_z \right\}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \left( \frac{w\mu}{\gamma} \nabla_1 + w l \right) H_z \right\} = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \frac{w\mu}{\gamma} \bar{\nabla}_1^l H_z \right\}, \\ H_1 = \frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left( \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} \right) H_z \right\} = \frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \bar{\nabla}_1^l H_z \right\}, \\ H_2 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z \right\}, \end{cases} \quad (2.37)$$

где дифференциальные операторы 1-го порядка с учетом намагнитченности (2.40) при касательном намагничивании имеют вид:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_1^l = \nabla_1 + \frac{l}{\mu} \gamma; \\ \nabla_1^l = \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma}; \\ \bar{\nabla}_2^m = \nabla_2; \\ \nabla_2^m = \nabla_2. \end{cases} \quad (2.38)$$

При продольном намагничивании направление внешнего магнитного поля совпадает с координатной осью  $Z$  эллиптической системы координат и тензор магнитной проницаемости феррита (2.2) в этом случае принимает вид:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\text{где } \mu_{33} = \mu_{||}, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = \mu, \quad l = m = 0, \quad k \neq 0. \quad (2.40)$$

Тогда выражение (2.22) с учетом (2.40) примет вид:

$$\begin{cases} a^2 = w^2 \mu_{11} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \\ b^2 = w^2 \mu_{22} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \\ g^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2; \\ p^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2. \end{cases} \quad (2.41)$$

То есть при продольном намагничивании:

$$a^2 = b^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \quad g^2 = p^2 = w^2 \mu_{\perp} \varepsilon - \gamma^2 = c^2. \quad (2.42)$$

Подставив (2.40) и (2.42) в выражение (2.21), получим формулы для поперечных составляющих электромагнитного поля для гиротропной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения при продольном намагничивании [64]:

$$\begin{cases}
E_1 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \nabla_2 H_z - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 H_z \right] \right\} = \\
= -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \frac{w\mu}{\gamma} \bar{\nabla}_2^m H_z - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_z - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 H_z \right] \right\}; \\
E_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \nabla_1 H_z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_1 E_z + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 H_z \right] \right\} = \\
= -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \frac{w\mu}{\gamma} \bar{\nabla}_1^l H_z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_1 E_z + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 H_z \right] \right\}; \\
H_1 = \frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z + \frac{jw^2 k \varepsilon}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z \right] \right\}; \\
H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z - \frac{jw^2 k \varepsilon}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_z - \nabla_1 H_z \right] \right\},
\end{cases} \quad (2.43)$$

где

$$\begin{aligned}
a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2 &= (w^2 \varepsilon \mu + w^2 \varepsilon k - \gamma^2)(w^2 \varepsilon \mu - w^2 \varepsilon k - \gamma^2) = g_+^2 g_-^2; \\
g_+^2 &= (w^2 \varepsilon \mu + w^2 \varepsilon k - \gamma^2), \quad g_-^2 = (w^2 \varepsilon \mu - w^2 \varepsilon k - \gamma^2),
\end{aligned} \quad (2.44)$$

Дифференциальные операторы 1-го порядка с учетом намагниченности (2.23) при продольном намагничивании имеют вид:

$$\begin{cases}
\bar{\nabla}_1^l = \frac{g_+^2}{b^2} \nabla_1 + \frac{l}{\mu_{11}} \gamma = \frac{c^2}{a^2} \nabla_1; \\
\nabla_1^l = \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} = \nabla_1; \\
\bar{\nabla}_2^m = \frac{p^2}{a^2} \nabla_2 + \frac{m}{\mu_{22}} \gamma = \frac{c^2}{a^2} \nabla_2; \\
\nabla_2^m = \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} = \nabla_2.
\end{cases} \quad (2.45)$$

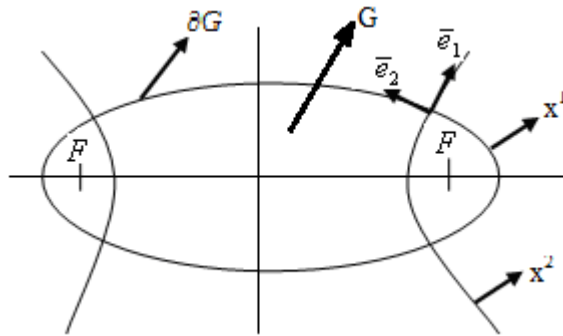
Выражения (2.31), (2.37), (2.43) определяют поперечные компоненты электромагнитного поля для различных случаев намагничивания в ограниченной гиротропной продольно-регулярной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения.

## 2.2. Граничные условия

При решении дифференциальных уравнений точность решения определяется граничными условиями. Определение граничных условий произведем в обобщенной криволинейной ортогональной системе координат [67].

В общем случае, граничные условия определяются тем, что тангенциальные составляющие вектора  $\bar{E}$  и нормальные составляющие вектора  $\bar{B}$  равны нулю на внутренней бесконечно проводящей стенке  $G$  (см. рис.2.1) [30]. Запишем эти условия:

$$\begin{cases} \bar{E}_\tau = 0 \\ \bar{B}_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_2|_{x^1=\partial G} = 0 \\ E_3|_{x^1=\partial G} = 0 \end{cases} \text{ и } \bar{B}_n|_{\partial G} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_2|_{x^1=\partial G} = 0 \\ E_3|_{x^1=\partial G} = 0 \end{cases} \text{ и } B_1 = \mu_{1i} H_i|_{x^1=\partial G} = 0. \quad (2.46)$$



$x^1, x^2$  - ортогональные криволинейные поперечные координаты,  $F$  -фокусное расстояние,

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$  - касательные к координатным линиям.

Рисунок 2.1 - Криволинейная ортогональная система координат.

Объединяя граничные условия (2.46) и выражения для поперечных компонент ЭМП при произвольном намагничивании (2.21) получаем, что составляющая  $E_2$  должна быть равна нулю на внутренней стенке ограниченной области  $\partial G$ , т.е.  $E_2|_{x^1=\partial G} = 0$ :

$$E_2 = -\frac{j\gamma b^2}{a^2 b^2 - \omega^4 \varepsilon^2 \kappa^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \left( \frac{\omega \mu_{11}}{\gamma} \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + \omega \ell \right) H_z - \frac{j\omega^2 \varepsilon \kappa}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon} \nabla_2 + \omega m \right) H_z \right] \right\} = 0. \quad (2.47)$$

Условие (2.47) выполнится, если действительная и мнимая части по отдельности будут равны нулю (при  $u_1 = \partial G$ ), т.е.:

$$\begin{cases} \nabla_2 E_z - \left( \frac{\omega \mu_{11}}{\gamma} \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + \omega \ell \right) H_z = 0; \\ \frac{j \omega^2 \varepsilon \kappa}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon} \nabla_2 + \omega m \right) H_z \right] = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (2.48).

$$\nabla_2 E_z - \left( \frac{\omega \mu_{11}}{\gamma} \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + \omega \ell \right) H_z = 0. \quad (2.49)$$

Известно, что для решения однородного двумерного уравнения Гельмгольца, описывающего распространение ЭМВ вдоль продольной оси  $Z$ , применяется метод разделения переменных. Применение метода разделения переменных подразумевает, что неизвестное решение  $E_z$  можно представить в виде произведения функций разных координат [48, 68-75]:

$$\begin{cases} E_z(x^1, x^2) = E_z(x^1) E_z(x^2) = E_{z1} E_{z2}; \\ H_z(x^1, x^2) = H_z(x^1) H_z(x^2) = H_{z1} H_{z2}, \end{cases} \quad (2.50)$$

где  $E_{z1}, H_{z1}$  – функции, зависящие только от координаты  $x^1$ ;  $E_{z2}, H_{z2}$  – функции, зависящие только от координаты  $x^2$ .

Применив к (2.49) метод разделения переменных (2.50) и учитывая, что

$$\nabla_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \nabla_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \text{ получим:}$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x^2} (E_{z1} \cdot E_{z2}) - \left( \frac{\omega \mu_{11}}{\gamma} \frac{g^2}{b^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \omega \ell \right) (H_{z1} \cdot H_{z2}) = 0. \quad (2.51)$$

Далее:

$$\frac{E_{z1}}{h_2} \frac{\partial E_{z2}}{\partial x^2} - \left( \frac{\omega \mu_{11}}{\gamma} \frac{g^2}{b^2} \frac{H_{z2}}{h_1} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x^1} + \omega \ell (H_{z1} \cdot H_{z2}) \right) = 0. \quad (2.52)$$

Используя граничные условия (2.46), составим условие Дирихле для двумерных уравнений Гельмгольца (1.129) и (1.143) на границе  $\partial G$  [38, 40]:

$$\bar{E}_z \Big|_{x^1=\partial G} = (E_{z1} \cdot E_{z2}) \Big|_{x^1=\partial G} = E_{z1} \Big|_{x^1=\partial G} \cdot E_{z2} = 0, \quad (2.53)$$



т.е. 
$$E_{z1} \Big|_{x^1=\partial G} = 0. \quad (2.54)$$

Условие Дирихле (2.54) приводит выражение (2.52) к виду (при  $x^1=\partial G$ ) [37]:

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z1}}{\partial x^1} = -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma \frac{b^2}{g^2} H_{z1}. \end{cases} \quad (2.55)$$

Второе уравнение представляет собой условие Неймана.

Выражение (2.55) можно записать и в другом виде:

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z1}}{H_{z1}} = -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma \frac{b^2}{g^2} \partial x^1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \int_{\partial G} \frac{\partial H_{z1}}{H_{z1}} = \int_{\partial G} -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma \frac{b^2}{g^2} \partial x^1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \int_{\partial G} \frac{\partial H_{z1}}{H_{z1}} = -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma \frac{b^2}{g^2} \int_{\partial G} \partial x^1. \end{cases}$$

Окончательно (при  $x^1=\partial G$ ):

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \ln(H_{z1}) = -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma \frac{b^2}{g^2} \partial G. \end{cases} \quad (2.56)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (2.48):

$$\frac{j\omega^2 \varepsilon \kappa}{b^2} \left[ \nabla_1 E_z + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon} \nabla_2 + \omega m \right) H_z \right] = 0. \quad (2.57)$$

Сократив последнее выражение на  $\frac{j\omega^2 \varepsilon \kappa}{b^2}$ , и применив метод разделения переменных, а также подставив соотношения для дифференциальных операторов первого порядка  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$ , получим:

$$\frac{E_{z2}}{h_1} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} + \frac{\gamma}{\omega \varepsilon} \frac{H_{z1}}{h_2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x^2} + \omega m (H_{z1} \cdot H_{z2}) = 0. \quad (2.58)$$

Так как согласно условию Дирихле  $E_{z1} = 0$  на границе раздела  $\partial G$ , то  $\frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1}$  обращается в нуль при постоянстве  $E_{z1}$ , т.е. для выражения (2.58) можем записать [67]:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z2}}{\partial x^2} = -\frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 H_{z2}. \end{cases} \quad (2.59)$$

Выражение (2.59) можно записать и в другом виде:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z2}}{\partial x^2} = -\frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 H_{z2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z2}}{H_{z2}} = -\frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 \partial x^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \int_{x^2} \frac{\partial H_{z2}}{H_{z2}} = -\int_{x^2} \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 \partial x^2. \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \ln(H_{z2}) = -\frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 x^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Окончательно (при  $x^1 = \partial G$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \ln(H_{z2}) = -\frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 x^2. \end{cases} \quad (2.60)$$

В итоге сформулированы граничные условия обобщенной гиротропной области при произвольном намагничивании. В этом случае условия Дирихле и Неймана соответственно имеют вид (при  $x^1 = \partial G$ ):

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z1}}{\partial x^1} = -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma \frac{b^2}{g^2} H_{z1}. \end{cases} \quad (2.61)$$

Последнее выражение может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \ln(H_{z1}) = -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma \frac{b^2}{g^2} \partial G. \end{cases} \quad (2.62)$$

Для выполнения равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля  $E_2$  на границе области  $\partial G$ , из условия Дирихле следует:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z2}}{\partial x^2} = -\frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 H_{z2}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Или:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{z1}}{\partial x^1} = 0; \\ \ln(H_{z2}) = -\frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} h_2 x^2. \end{cases} \quad (2.64)$$

Рассмотрим граничные условия для различных случаев намагничивания.

При продольном намагничивании  $\bar{H}_0 = H_0 \bar{e}_3$ . Тензор магнитной проницаемости имеет вид (2.39).

Граничные условия Дирихле и Неймана (2.61) для продольного намагничивания при значениях компонент магнитной проницаемости феррита, равных  $l = m = 0$  и  $k \neq 0$ , примут вид:

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ H'_{z1} = 0. \end{cases} \quad (2.65)$$

При нормальном намагничивании тензор магнитной проницаемости имеет вид (2.27). Тогда условия (2.61) при значениях компонент магнитной проницаемости феррита, равных  $k = l = 0$  и  $m \neq 0$  примут вид:

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ H'_{z1} = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

При касательном намагничивании тензор магнитной проницаемости имеет вид (2.33). Так как компоненты магнитной проницаемости в этом случае равны  $k = m = 0$  и  $l \neq 0$ , то условие (2.61) примет вид:

$$\begin{cases} E_{z1} = 0; \\ \frac{\partial H_{z1}}{\partial x^1} = -h_1 \frac{l}{\mu_{11}} \gamma H_{z1}. \end{cases} \quad (2.67)$$

### 2.3. Формулировка краевой задачи

Рассмотрим регулярную ограниченную область с обобщенно-ортогональной формой поперечного сечения с тензорным (ферритовым) заполнением с бесконечно проводящими стенками при продольном намагничивании. Диэлектрическая проницаемость феррита есть скалярная величина, а магнитная проницаемость описывается эрмитовым тензором второго порядка.

Для продольного намагничивания уравнения Гельмгольца гибридных НЕ и ЕН волн получены ранее и имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta_{11}H_z + \Delta_{22}H_z + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j\gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0; \\ \Delta_{11}E_z + \Delta_{22}E_z + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j\gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

Используя выражение (2.65), сформулируем первую краевую задачу (задачу Дирихле) для уравнений Гельмгольца (2.68):

$$\begin{cases} E_z \in C^2(G) \cap C(\partial G); \\ E_z = 0 \text{ на границе ограниченной области } G(\partial G) \end{cases} \quad (2.69)$$

Также используя выражение (2.65), сформулируем вторую краевую задачу (задачу Неймана) для уравнений Гельмгольца (2.68):

$$\begin{cases} H_z \in C^2(G) \cap C^1(\partial G); \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ на границе ограниченной области } G(\partial G), \end{cases} \quad (2.70)$$

где  $G$  - ограниченная область,  $\partial G$  - граница ограниченной области,  $C(G)$  - непрерывные на  $G$  функции,  $C^1(G)$  - непрерывно дифференцируемые на  $G$  функции,  $C^2(G)$  - дважды непрерывно дифференцируемые на  $G$  функции,  $n$  - нормаль к границе ограниченной области  $\partial G$ .

При поперечном же намагничивании уравнения Гельмгольца примут более сложный вид, чем при продольном намагничивании.

#### 2.4. Выводы по главе

1. Получены поперечные компоненты ЭМП (2.24) для ограниченной регулярной гиротропной ограниченной области с обобщенно-ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании;

2. Разработана математическая модель распространения ЭМВ в ограниченной продольно-намагниченной гиротропной области (2.68) – (2.70).

## ГЛАВА 3

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ГИРОТРОПНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В главе развивается методика решения краевых задач, применяемых для изотропных областей, на мало (фрагментарно) исследованный случай эллиптической области с тензорным заполнением.

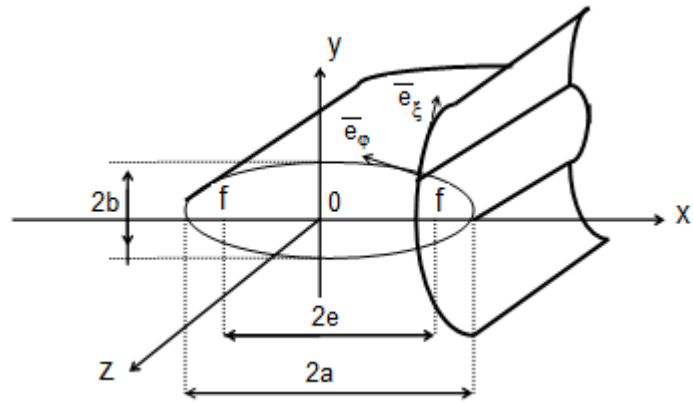
В общем случае рассматривают три случая кривизны поперечных координат:

- 1) линейность по обеим координатным осям;
- 2) кривизна по одной из координатных осей;
- 3) кривизна по обеим координатным осям.

Первому случаю соответствует прямоугольная система координат, второму - цилиндрическая, третьему - эллиптическая. Вид поперечного сечения обычно определяет выбор подходящей системы координат. В случае эллиптической формы поперечного сечения ограниченной области, с изотропным или гиротропным заполнением, применяют эллиптическую систему координат, как наиболее удобную.

#### 3.1. Характеристики эллиптической системы координат

Эллиптическая система координат представляет большой теоретический интерес тем, что она является наиболее общим случаем криволинейных ортогональных систем координат. Эллиптическая система координат  $(\xi, \varphi, z)$  представляет собой семейство софокусных эллипсов и гипербол [3, 14, 17]. Тензор кривизны описывает кривизну в поперечной плоскости по обеим поперечным осям. Координаты  $\xi$  и  $\varphi$  изменяются в пределах  $0 \leq \xi \leq \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и связаны с прямоугольными координатами соотношениями:  $X = e \operatorname{ch} \xi \cos \varphi$ ,  $Y = e \operatorname{sh} \xi \sin \varphi$ , где  $e$  - фокусное расстояние. Продольная ось  $z$  совпадает с осью  $z$  декартовой системы координат.



$2a$  и  $2b$  - большая и малая оси,  $2e$  - расстояние между фокусами  $f$ ,  $\bar{e}_\xi$  и  $\bar{e}_\varphi$  - единичные вектора поперечных координатных осей.

Рисунок – 3.1. Система координат эллиптического цилиндра.

Координатные поверхности имеют вид [48]:

$$\frac{x^2}{e^2 ch^2 \xi} + \frac{y^2}{e^2 sh^2 \varphi} - 1 = 0. \quad (3.1)$$

(эллиптический цилиндр)

$$\frac{x^2}{e^2 \cos^2 \xi} + \frac{y^2}{e^2 \sin^2 \varphi} - 1 = 0. \quad (3.2)$$

(гиперболический цилиндр)

$$z = \text{const} \quad (\text{плоскость}) \quad (3.3)$$

Координатные линии представляют собой гиперболу, эллипс (обе кривые в плоскости, перпендикулярной оси OZ) и прямую, параллельную оси OZ.

Коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля из формул (1.15) и (1.39) для эллиптической системы координат ( $x^1 = \xi$ ;  $x^2 = \varphi$ ;  $x^3 = z$ ) примут вид:

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = ed; & h_3 = 1; \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\text{Sin}2\xi}{2d^2}; & \Gamma_{21}^2 = \frac{\text{Sh}2\xi}{2d^2}, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $e$  - фокус эллипса;  $d^2 = ch^2 \xi - \cos^2 \varphi$ .

Выражение (1.42) позволяет получить символы Кристоффеля второго рода в более компактной матричной форме:

$$\left\{ \Gamma_{ij}^1 = \frac{1}{2d^2} \begin{bmatrix} sh2\xi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -sh2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \Gamma_{ij}^2 = \frac{1}{2d^2} \begin{bmatrix} -\sin 2\varphi & sh2\xi & 0 \\ sh2\xi & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \Gamma_{ij}^3 = 0 \right. \quad (3.5)$$

Метрическая матрица эллиптической системы координат после подстановок в матрицу (1.13) соответствующих коэффициентов Ламэ примет следующий вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^2 d^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

В случае ортогональных криволинейных координат метрика имеет вид [48]:

$$ds^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2. \quad (3.7)$$

Для эллиптической системы координат метрика примет вид:

$$ds^2 = e^2 d^2 d\xi^2 + e^2 d^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (3.8)$$

Полученные соотношения позволяют записать уравнения Максвелла для ограниченной области эллиптической формы и с их помощью получить выражения поперечных компонент электромагнитного поля.

### 3.2. Собственные функции эллиптического цилиндра. Функции Матье

При анализе распространения электромагнитных волн в ограниченной области решаются следующие, так называемые *внутренние задачи* [59]: требуются найти решения системы дифференциальных уравнений Максвелла в некоторой области  $V$ , ограниченной извне поверхностью  $S$ , удовлетворяющее на  $S$  некоторым граничным условиям. При решении *внутренних задач* различают [59]:

1. Задача нахождения собственных полей (решение однородных уравнений Максвелла), соответствующая определению собственных волн в ограниченной области;



2. Задача нахождения полей заданных источников (решение неоднородных уравнений Максвелла).

Показано, что решение первой задачи в системах без потерь *существует*. При этом поля определяются с точностью до произвольного амплитудного множителя, а собственные частоты образуют бесконечную счетную последовательность [75]. В диссертации рассматривается только первая задача, вторая не рассматривается, т.к. анализируется устоявшийся во времени процесс без заданных источников.

При произвольной зависимости полей от времени, т.е. при рассмотрении нестационарных задач, кроме граничных условий, также задаются начальные условия. Последние состоят в задании полей в каждой точке рассматриваемой системы в начальный момент времени.

Решения внутренних задач приводят к задачам на собственные значения, которые представляют собой линейные однородные уравнения с параметром. Ненулевые решения этих уравнений - собственные функции – позволяют найти решения уравнений Максвелла в ограниченной области с конкретной формой поперечного сечения, в частности методом собственных функций. Метод собственных функций позволяет найти решения в виде разложений в ряд по собственным функциям, которые, как правило, являются рядами Фурье по ортонормированным функциям со специальными весами. Ортогональность собственных функций означает, что между волнами отдельных типов нет обмена энергией. Собственные функции во внутренних задачах имеют наглядный физический смысл собственных колебаний в конкретных ограниченных областях. Полнота системы собственных функций позволяет любое поле представить в виде разложения по собственным колебаниям или собственным волнам [75].

При решении внутренних задач не всегда удастся обойтись запасом элементарных функций. Каждое уравнение порождает класс решений, которые не всегда являются

элементарными функциями. Такие неэлементарные функции называют специальными функциями. Они являются собственными функциями при решении внутренних задач, когда форма поперечного сечения ограниченной области имеет сложную форму, например криволинейную ортогональную. Чаще всего эти функции одного переменного, возникающие при методе разделения переменных, который предназначен для отыскания частных решений дифференциальных уравнений.

Решение внутренних задач, когда ограниченная область имеет эллиптическую форму, сводится к функциям Матье [14, 48]. Обыкновенное дифференциальное уравнение Матье в каноническом виде имеет вид [14, 19, 42, 43]:

$$\frac{d^2\Psi_i}{d\varphi^2} + (a - 2q \cos(2\varphi))\Psi_i = 0, \quad (3.9)$$

где  $a$  – произвольная постоянная (постоянная разделения);  $\Psi_i$  - продольная компонента ЭМВ ( $E_z$  или  $H_z$ ),  $\varphi$  - поперечная координата эллиптической системы координат,  $q$  - параметр функции Матье.

Если в уравнении (3.9) заменить  $\varphi$  на  $j\xi$ , то получим:

$$\frac{d^2\Psi_i}{d\xi^2} - (a - 2qch(2\xi))\Psi_i = 0, \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называют модифицированным уравнением Матье [14, 48].

В уравнениях (3.9) и (3.10) параметры  $a, q$  - действительные числа. Решения уравнения (3.9) называют функциями (обыкновенными функциями) Матье первого рода или функциями (обыкновенными функциями) Матье с целым индексом [14, 48]. Они имеют период  $\pi$  или  $2\pi$  относительно  $\varphi$ . Эта периодичность будет иметь место не для всех значений  $a$ , а только для вполне определенных (при заданном  $q$ ), называемых собственными значениями, причем возможные значения пар  $a$  и  $q$  связаны

зависимостью весьма сложного вида. Обыкновенные функции Маттье обычно обозначаются следующим образом:

$$\begin{cases} ce_m(\varphi, q); \\ se_m(\varphi, q), \end{cases} \quad (3.11)$$

где  $m$ ,  $q$ ,  $\varphi$  - соответственно порядок, корень и аргумент функции Маттье;  $ce_m(\varphi, q)$ ,  $se_m(\varphi, q)$  - четная и нечетная периодические функции Маттье целого порядка  $m$  с действительными  $a$  и  $q$ .

Сокращенно эти функции обозначаются как:

$$ce_m, se_m. \quad (3.12)$$

Совокупность всех функций Маттье первого рода при фиксированном  $q$  дает бесконечное множество функций Маттье первого рода с различными собственными значениями параметра  $a$ , соответствующими различным  $m$  (см. рис. 3.2 [48]). Эти решения определяются при  $q \neq 0$  с точностью до постоянного множителя.

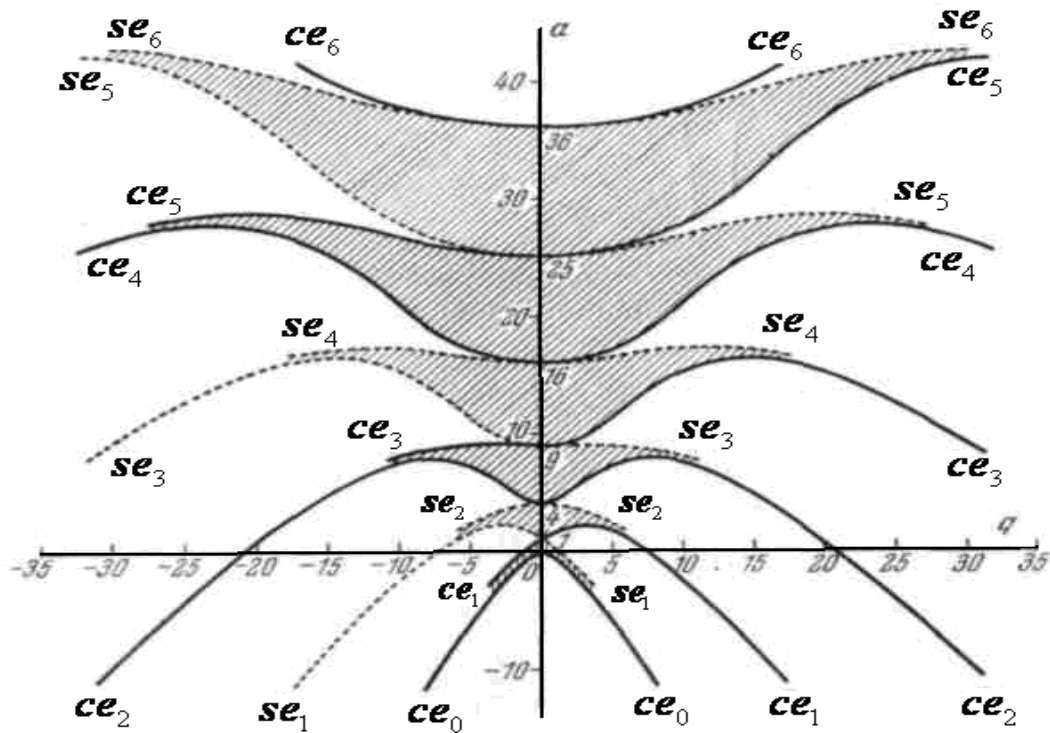


Рисунок – 3.2. Собственные значения параметра  $a$  как функции  $q$

Функции Матъе разделяются на четыре класса, причем для этих функций и соответствующих собственных значений параметра  $a$  обычно используют значения:

$$\begin{cases} ce_{2n}(\varphi, q); ce_{2n+1}(\varphi, q); \\ se_{2n+1}(\varphi, q); se_{2n+2}(\varphi, q). \end{cases} \quad (3.13)$$

В случае модифицированных функций Матъе существуют решения с периодом  $2\pi$ . Решения уравнений (3.9) и (3.10) иногда называют соответственно функциями эллиптического или гиперболического цилиндра.

Функции Матъе первого рода -  $2\pi$  периодические решения (3.9) – естественно искать с помощью разложения в ряд Фурье [14, 48]:

$$\Psi_i = B_0 + \sum_{r=0}^{\infty} [A_r \sin(r\varphi) + B_r \cos(r\varphi)]. \quad (3.14)$$

Существуют четыре возможных разложения для функций  $ce_m, se_m$ . Коэффициенты этих разложений зависят от значений  $m$ , поэтому они снабжены верхними индексами [14, 19]:

$$\begin{cases} ce_{2n}(\varphi, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r}^{2n} \cos(2r\varphi); \\ ce_{2n+1}(\varphi, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2n+1} \cos((2r+1)\varphi); \\ se_{2n+1}(\varphi, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1} \sin((2r+1)\varphi); \\ se_{2n+2}(\varphi, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+2}^{2n+2} \sin((2r+2)\varphi). \end{cases} \quad (3.15)$$

Теперь решения  $ce$  и  $se$  определены с точностью до постоянного множителя. Этот множитель фиксируется с помощью определения:

$$\int_0^{2\pi} |ce_m(\varphi)|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} |se_m(\varphi)|^2 d\varphi = \pi. \quad (3.16)$$

Эти условия аналогичны формулам, справедливым для круговых функций:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi. \quad (3.17)$$

Отсюда получаются дополнительные соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(B_0^{2n})^2} = 2 + \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{B_{2r}^{2n}}{B_0^{2n}} \right)^2; \\ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{2n+1})^2 = 1; \\ \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{2n+1})^2 = \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+2}^{2n+2})^2 = 1. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  зависят от  $q$ . Если устремить  $q$  к нулю, то из определения функций  $ce_m(q), se_m(q)$  непосредственно следует:

$$A_{2r}^{2n}(0) = A_{2r+1}^{2n+1}(0) = B_{2r}^{2n}(0) = \delta_r^n, \quad (3.19)$$

где  $\delta_r^n$  - символ Кронекера.

Модифицированные функции Матье обычно обозначаются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ce_m(\xi, q); \\ Se_m(\xi, q). \end{array} \right. \quad (3.20)$$

или в сокращенной записи:

$$Ce_m, Se_m. \quad (3.21)$$

Связь между обыкновенными и модифицированными функциями Матье осуществляется следующим образом (в общем случае):

$$\left\{ \begin{array}{l} Ce_m(u, q) = ce_m(ju, q); \\ Se_m(u, q) = -jse_m(ju, q). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Изменение знака  $q$  у функций  $Ce_m, Se_m$  проводится заменой  $u$  на  $u + j\frac{\pi}{2}$ .

### 3.3. Уравнения электромагнитного поля в ограниченной гиротропной эллиптической области

В параграфе определяются поперечные компоненты ЭМП необходимые для решения уравнений Гельмгольца в ограниченной гиротропной области эллиптической формой поперечного сечения с краевыми условиями Дирихле и Неймана.

#### 3.3.1. Поперечные компоненты электромагнитного поля для различных случаев намагничивания

В эллиптической системе координат  $(\xi, \varphi, z)$  при определении поперечных компонент ЭМП для конкретных случаев намагничивания воспользуемся вычисленными значениями коэффициентов Ламэ (3.4). Для этого будем их подставлять в формулу (2.21) для поперечных составляющих электромагнитного поля для гиротропной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения и с регулярной продольной осью, совпадающей с осью  $Z$  декартовой системы координат, при произвольном намагничивании. Для нормального (гиперболического) намагничивания получим следующие поперечные компоненты ЭМВ в гиротропной эллиптической области:

$$\begin{cases} E_{\xi} = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu}{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + ed \frac{m}{\mu} \gamma \right) H_z \right], \\ E_{\varphi} = -\frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right], \\ H_{\xi} = \frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right], \\ H_{\varphi} = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} ed \right) H_z \right], \end{cases} \quad (3.23)$$

где  $a^2 = p^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \gamma^2$ ,  $b^2 = g^2 = w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2$

Подставив коэффициенты Ламэ (3.4) в формулу (2.21), получим поперечные компоненты ЭМВ в гиротропной эллиптической области при касательном намагничивании:

$$\begin{cases} E_\xi = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right], \\ E_\varphi = -\frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu}{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + ed \frac{l}{\mu} \gamma \right) H_z \right], \\ H_\xi = \frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} ed \right) H_z \right], \\ H_\varphi = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right], \end{cases} \quad (3.24)$$

где  $a^2 = p^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2$ ;  $b^2 = g^2 = w^2 \mu_{\parallel} \varepsilon - \gamma^2$ .

Подставив (2.42) и (2.44) в выражение (2.21), получим формулы для поперечных составляющих электромагнитного поля для гиротропной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения при продольном намагничивании [64]:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \nabla_1 E_3 + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \nabla_2 H_3 - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_3 - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 H_3 \right] \right\} = \\ = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \nabla_1 E_3 + \frac{w\mu}{\gamma} \bar{\nabla}_2^m H_3 - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_3 - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 H_3 \right] \right\}; \\ E_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \nabla_2 E_3 - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \nabla_1 H_3 + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_1 E_3 + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 H_3 \right] \right\} = \\ = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \nabla_2 E_3 - \frac{w\mu}{\gamma} \bar{\nabla}_1^l H_3 + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_1 E_3 + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 H_3 \right] \right\}; \\ H_1 = \frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_3 - \nabla_1 H_3 + \frac{jw^2 k \varepsilon}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_3 + \nabla_2 H_3 \right] \right\}; \\ H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_3 + \nabla_2 H_3 - \frac{jw^2 k \varepsilon}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_3 - \nabla_1 H_3 \right] \right\}, \end{cases} \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 b^2 - w^4 \varepsilon^2 k^2 &= (w^2 \varepsilon \mu + w^2 \varepsilon k - \gamma^2) (w^2 \varepsilon \mu - w^2 \varepsilon k - \gamma^2) = g_+^2 g_-^2; \\ g_+^2 &= (w^2 \varepsilon \mu + w^2 \varepsilon k - \gamma^2), \quad g_-^2 = (w^2 \varepsilon \mu - w^2 \varepsilon k - \gamma^2), \end{aligned} \quad (3.26)$$

Дифференциальные операторы 1-го порядка с учетом намагниченности (2.23) при продольном намагничивании имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_1^l = \frac{g^2}{b^2} \nabla_1 + \frac{l}{\mu_{11}} \gamma = \frac{c^2}{a^2} \nabla_1; \\ \nabla_1^l = \nabla_1 + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} = \nabla_1; \\ \bar{\nabla}_2^m = \frac{p^2}{a^2} \nabla_2 + \frac{m}{\mu_{22}} \gamma = \frac{c^2}{a^2} \nabla_2; \\ \nabla_2^m = \nabla_2 + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} = \nabla_2. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Подставив коэффициенты Ламэ (3.4) в формулу (3.25), получим поперечные компоненты ЭМВ в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании [64]:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\xi = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)_z \right]; \\ E_\varphi = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)_z \right]; \\ H_\xi = \frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)_z \right]; \\ H_\varphi = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)_z \right]. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Выражения (3.23), (3.24), (3.28) определяют поперечные компоненты ЭМВ для различных случаев намагничивания в замкнутой гиротропной продольно-регулярной (продольная ось совпадает с осью  $Z$  декартовой системы координат) эллиптической области.

В случае если эллиптическая область заполнена не гиротропной, а изотропной средой, т.е. когда магнитная проницаемость среды заполнения описывается выражением (2.25), то *впервые* полученные формулы (3.23), (3.24), (3.28) вырождаются в известную формулу для изотропного случая [9].

Для изотропной среды заполнения магнитная проницаемость не является тензором, описывается выражением (2.25) и имеем:

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu, \quad k = l = m = 0. \quad (3.29)$$



Тогда, подставив (3.29) в выражение (2.22), получим для изотропного случая:

$$\begin{cases} a^2 = w^2 \mu_{11} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \\ b^2 = w^2 \mu_{22} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \\ g^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2; \\ p^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu_{11} \mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2. \end{cases} \quad (3.30)$$

Также для изотропного случая согласно (3.29) имеем:

$$a^2 = b^2 = g^2 = p^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2 = k^2. \quad (3.31)$$

Подставив (3.31) в выражение для нормального (гиперболического) намагничивания (3.23) получим изотропный случай:

$$\begin{cases} E_\xi = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu}{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + ed \frac{m}{\mu} \gamma \right) H_z \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]; \\ E_\varphi = -\frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_\xi = \frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right] = \frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_\varphi = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{w^2 \varepsilon m}{\gamma} ed \right) H_z \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]. \end{cases} \quad (3.32)$$

Подставив (3.31) в выражение для касательного (эллиптического) намагничивания (3.24) получим изотропный случай:

$$\begin{cases} E_\xi = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu_{\parallel}}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]; \\ E_\varphi = -\frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu}{\gamma} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + ed \frac{l}{\mu} \gamma \right) H_z \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_\xi = \frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{w^2 \varepsilon l}{\gamma} ed \right) H_z \right] = \frac{j\gamma}{a^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_\varphi = -\frac{j\gamma}{b^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]. \end{cases} \quad (3.33)$$

Подставив (3.31) в выражение для продольного намагничивания (3.28) получим изотропный случай:

$$\left\{ \begin{aligned} E_{\xi} &= -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{w\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)_z \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]; \\ E_{\varphi} &= -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{w\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)_z \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_{\xi} &= \frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)_z \right] = \frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_{\varphi} &= -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)_z \right] = -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \right. \quad (3.34)$$

Воспользуемся формулой (2.26), описывающей поперечные компоненты в закрытых ограниченных изотропных областях с ортогонально криволинейной формой поперечного сечения с продольно-регулярной координатной осью. В выражении (2.26) переходя к эллиптическим координатам и получим :

$$\left\{ \begin{aligned} E_{\xi} &= -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right]; \\ E_{\varphi} &= -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_{\xi} &= \frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right]; \\ H_{\varphi} &= -\frac{j\gamma}{k^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right], \end{aligned} \right. \quad (3.35)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 &= k^2 = w^2 \epsilon \mu - \gamma^2; \quad E_1 = E_{\xi}; \quad E_2 = E_{\varphi}; \quad H_1 = H_{\xi}; \quad H_2 = H_{\varphi}; \\ \nabla_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \nabla_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad h_1 = h_2 = ed; \\ e &- \text{фокусное расстояние эллипса}; \quad d = \sqrt{ch^2 \xi - \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Как ожидалось, все четыре формулы (3.32)-(3.35) тождественно совпали, т.е. при переходе трех случаев намагничивания (гиперболического (3.32), эллиптического (3.33) и продольного (3.34)) к изотропному (3.35), все уравнения сводятся к одному

уравнению, которое совпадает с известными выражениями, полученными [9]. Проведенное тестирование показывает корректность впервые полученных формул (3.32)-(3.34).

### 3.3.2. Уравнения Гельмгольца при продольном намагничивании

Коэффициенты Ламэ и символы Кристоффеля для эллиптической системы координат:

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = ed; & h_3 = 1; \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\text{Sin}2\xi}{2d^2}; & \Gamma_{21}^2 = \frac{\text{Sh}2\xi}{2d^2}, \end{cases} \quad (3.37)$$

где  $e$  - фокус эллипса;  $d^2 = ch^2\xi - \cos^2\varphi$ .

Тогда дифференциальные операторы II-го порядка (1.105) и (1.106) с учетом (3.37) примут вид:

$$\begin{cases} \delta_1 \nabla_1 = \Delta_{11} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \\ \delta_2 \nabla_2 = \Delta_{22} = \frac{1}{e^2 d^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Подставив (3.38) в (1.129) получим уравнения Гельмгольца HE – волны в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j e^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (3.39)$$

Подставив (3.38) в (1.143) получим уравнение Гельмгольца EH – волны в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_z - j e^2 d^2 \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (3.40)$$

### 3.4. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании

Рассмотрим продольно-намагниченную гиротропную область, ограниченную бесконечно проводящей стенкой эллиптической формы. Диэлектрическую проницаемость феррита считаем изотропной величиной, а тензор магнитной проницаемости определен выражением (2.39).

Поставим краевую задачу, в результате которой будут решены уравнения Гельмгольца ЕН- обыкновенной (3.40) и НЕ- необыкновенной волн (3.39), а также получены конкретные (без производных) выражения для поперечных компонент для этих волн.

Поперечные компоненты ЭМП согласно выражению (3.28) имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\xi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{w\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)_z \right]; \\ E_{\varphi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{w\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)_z \right]; \\ H_{\xi} = \frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)_z \right]; \\ H_{\varphi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \epsilon k}{a^2} \left( \frac{w\epsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)_z \right]. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Граничные условия на стенках бесконечно проводящей эллиптической ограниченной области имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z |_{\xi=\xi_0} = E_{\varphi} |_{\xi=\xi_0} = 0; \\ \frac{\partial H_z}{\partial \xi} |_{\xi=\xi_0} = 0. \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Уравнения Гельмгольца ЕН- обыкновенной и НЕ- необыкновенной волн согласно (3.40) и (3.39) соответственно имеют вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (w^2 \epsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j e^2 d^2 \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_z = 0. \quad (3.43)$$

и

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j e^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \quad (3.44)$$

Таким образом, ставится следующая краевая задача для продольно-намагниченной гиротропной области, ограниченной эллиптической бесконечно проводящей стенкой. Найти решения уравнений Гельмгольца (3.43) и (3.44) с граничными условиями (3.42).

### 3.4.1. Решения уравнений Гельмгольца гибридных EH и HE волн

Перепишем уравнения Гельмгольца EH и HE волн (3.43) и (3.44):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - j e^2 d^2 \gamma w \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} H_z = 0; \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_z + j e^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Из формулы (3.45) видно, что E или H волны в чистом виде не могут существовать из-за гиротропности области [1, 2, 4]. Так как в каждом уравнении системы (3.45) одновременно присутствуют продольные составляющие  $E_z$  и  $H_z$ , то решать их раздельно нельзя.

Преобразуем систему (3.45) для получения выражения, с помощью которого возможно дальнейшее решение. Для этого применим метод укорочения исходного дифференциального уравнения, предложенный в [4, 10, 63].

Умножим второе уравнение (3.45) на  $j\Lambda$  и сложим с первым:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (E_z + j\Lambda H_z)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (E_z + j\Lambda H_z)}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) j\Lambda H_z + \\ & + e^2 d^2 (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_z - \Lambda e^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_z - j e^2 d^2 \gamma w \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} H_z = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Сделаем следующее обозначение:

$$E_z + j\Lambda H_z = \psi. \quad (3.47)$$

Подставив (3.47) в (3.46) и учитывая, что  $E_z = \psi - j\Lambda H_z$ , после компоновки относительно  $\psi$  и  $E_z$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \Psi = \\ & = \left[ -\Lambda^2 e^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} - \Lambda e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right) + e^2 d^2 \gamma w \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} \right] j H_z. \end{aligned} \quad (3.48)$$

В правой части (3.48) получено квадратное уравнение относительно  $\Lambda$ . Если  $\Lambda_{1,2}$  являются корнями этого квадратного уравнения, то формула (3.48) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{1,2}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{1,2}}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_{1,2} \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \Psi_{1,2} = 0. \quad (3.49)$$

Выражение (3.49) является результатом применения метода укорочения исходного дифференциального уравнения к выражению (3.45).

Выражение (3.49) получено при условии, что  $\Lambda_{1,2}$  являются корнями квадратного уравнения правой части (3.48), т.е.:

$$-\Lambda^2 e^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} - \Lambda e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right) + e^2 d^2 \gamma w \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} = 0. \quad (3.50)$$

Или разделив (3.50) на  $-e^2 d^2$ :

$$\gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \Lambda^2 + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right) \Lambda - \gamma w \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} = 0. \quad (3.51)$$

Подставив корни  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  уравнения (3.51) в выражение (3.49) получаем два различных решения  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ . Определив два решения выражения (3.49) можем записать согласно (3.47):

$$\begin{cases} E_z + j\Lambda_1 H_z = \psi_1; \\ E_z + j\Lambda_2 H_z = \psi_2. \end{cases} \quad (3.52)$$

Выразив  $H_z$  из второго уравнения (3.52) и подставив в первое, получим:

$$E_Z = \frac{\psi_1 \Lambda_2 - \psi_2 \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1}. \quad (3.53)$$

Выразив  $E_Z$  из первого уравнения (3.52) и подставив во второе, получим:

$$H_Z = j \frac{\psi_1 - \psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1}. \quad (3.54)$$

В выражениях (3.53), (3.54)  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  являются корнями уравнения (3.51), а  $\psi_1$  и  $\psi_2$  - два решения уравнения (3.49), соответствующие корням  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ . Следовательно, уравнение (3.49) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \Psi_1 = 0; \\ \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \Psi_2 = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Уравнения Гельмгольца (3.55) после подстановки  $d^2 = \frac{1}{2}(ch2\xi - \cos 2\varphi)$  примут

вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{e^2}{2} (ch2\xi - \cos 2\varphi) \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \Psi_1 = 0; \\ \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \varphi^2} + \frac{e^2}{2} (ch2\xi - \cos 2\varphi) \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \Psi_2 = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Далее уравнения системы (3.56) решаются методом разделения переменных [76-79].

Решения будем искать в виде  $\Psi_1 = \Psi_{\xi_1} \Psi_{\varphi_1}$ ,  $\Psi_2 = \Psi_{\xi_2} \Psi_{\varphi_2}$ , где  $\Psi_{\xi_1}$  и  $\Psi_{\xi_2}$  - функции, зависящие только от  $\xi$ , а  $\Psi_{\varphi_1}$  и  $\Psi_{\varphi_2}$  - только от  $\varphi$ .

Разделив первое уравнение системы (3.56) на  $\Psi_{\xi_1} \Psi_{\varphi_1}$ , а второе - на  $\Psi_{\xi_2} \Psi_{\varphi_2}$  получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Psi_{\xi_1}} \frac{\partial^2 \Psi_{\xi_1}}{\partial \xi^2} + \frac{e^2}{2} ch 2\xi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] + \\ & \quad + \left[ \frac{1}{\Psi_{\varphi_1}} \frac{\partial^2 \Psi_{\varphi_1}}{\partial \varphi^2} - \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] = 0; \\ & \left[ \frac{1}{\Psi_{\xi_2}} \frac{\partial^2 \Psi_{\xi_2}}{\partial \xi^2} + \frac{e^2}{2} ch 2\xi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] + \\ & \quad + \left[ \frac{1}{\Psi_{\varphi_2}} \frac{\partial^2 \Psi_{\varphi_2}}{\partial \varphi^2} - \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.57)$$

В (3.57) выражения в первых квадратных скобках зависят только от  $\xi$ , а во вторых квадратных скобках - только от  $\varphi$ .

Уравнения системы (3.57) могут быть удовлетворены только в том случае, если выражения в квадратных скобках в каждом из уравнений по отдельности будут равны одной постоянной величине, но с разными знаками:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Psi_{\xi_1}} \frac{\partial^2 \Psi_{\xi_1}}{\partial \xi^2} + \frac{e^2}{2} ch 2\xi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] = b; \\ & \left[ \frac{1}{\Psi_{\varphi_1}} \frac{\partial^2 \Psi_{\varphi_1}}{\partial \varphi^2} - \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] = -b. \end{aligned} \right. \quad (3.58)$$

и

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Psi_{\xi_2}} \frac{\partial^2 \Psi_{\xi_2}}{\partial \xi^2} + \frac{e^2}{2} ch 2\xi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] = s; \\ & \left[ \frac{1}{\Psi_{\varphi_2}} \frac{\partial^2 \Psi_{\varphi_2}}{\partial \varphi^2} - \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right) \right] = -s. \end{aligned} \right. \quad (3.59)$$

Умножим первое уравнение (3.58) на  $\Psi_{\xi_1}$ , второе уравнение – на  $\Psi_{\varphi_1}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi_{\xi_1}}{\partial \xi^2} - (b - 2q_1 ch 2\xi) \Psi_{\xi_1} = 0; \\ & \frac{\partial^2 \Psi_{\varphi_1}}{\partial \varphi^2} + (b - 2q_1 \cos 2\varphi) \Psi_{\varphi_1} = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.60)$$

где



$$q_1 = \frac{e^2 \left( k_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right)}{4}; \quad k_{\perp}^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\perp}; \quad \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu};$$

$$\psi_{\xi 1} = E_{Z\xi} + j\Lambda_1 H_{Z\xi}; \quad \psi_{\varphi 1} = E_{Z\varphi} + j\Lambda_1 H_{Z\varphi}.$$

Умножим первое уравнение (3.59) на  $\Psi_{\xi 2}$ , второе уравнение – на  $\Psi_{\varphi 2}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi_{\xi 2}}{\partial \xi^2} - (s - 2q_2 \operatorname{ch} 2\xi) \Psi_{\xi 2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Psi_{\varphi 2}}{\partial \varphi^2} + (s - 2q_2 \cos 2\varphi) \Psi_{\varphi 2} = 0, \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\text{где } q_2 = \frac{e^2 \left( k_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right)}{4}; \quad \psi_{\xi 2} = E_{Z\xi} + j\Lambda_2 H_{Z\xi}; \quad \psi_{\varphi 2} = E_{Z\varphi} + j\Lambda_2 H_{Z\varphi}.$$

В системах (3.60), (3.73)  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  являются корнями квадратного уравнения (3.51) относительно  $\Lambda$ .

Вторые уравнения (3.60), (3.61) являются обыкновенными уравнениями Матье, а первые – модифицированными уравнениями Матье [14, 48].

Представляя решения в виде  $\psi = \psi_{\xi} \psi_{\varphi}$  имеем [14, 48]:  $\psi_{\varphi} = ce_m(\varphi)$  или  $se_m(\varphi)$  или одной из этих функций с постоянным множителем, а для  $\psi_{\xi} = Ce_m(\xi)$  или  $Se_m(\xi)$ . Здесь  $ce_m(\varphi)$  и  $se_m(\varphi)$  – четная и нечетная соответственно периодические обыкновенные функции Матье целого порядка  $m$  с действительными  $b(s)$  и  $q$ .

Формальными решениями (3.60), (3.61) будет:

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} = \psi_{\xi 1,2} \psi_{\varphi 1,2} = & \sum_{m=0}^{\infty} C_{m1,2} Ce_m(\xi, q_{1,2}) ce_m(\varphi, q_{1,2}) \cos(wt - \gamma z) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} S_{m1,2} Se_m(\xi, q_{1,2}) se_m(\varphi, q_{1,2}) \cos(wt - \gamma z), \end{aligned} \quad (3.62)$$

где  $C_{m1,2}$ ,  $S_{m1,2}$  – произвольные константы.

Для любого  $m$  имеются два типа решений (четное и нечетное) [14, 48, 80, 81]:

$$\begin{cases} {}_c\psi_{1,2} = {}_c\psi_{\xi 1,2} {}_c\psi_{\varphi 1,2} = C_{m1,2} Ce_m(\xi, q_{1,2}) ce_m(\varphi, q_{1,2}); \\ {}_s\psi_{1,2} = {}_s\psi_{\xi 1,2} {}_s\psi_{\varphi 1,2} = S_{m1,2} Se_m(\xi, q_{1,2}) se_m(\varphi, q_{1,2}) \end{cases}, \quad (3.63)$$

где  ${}_c\psi_{1,2}$  – четные решения, а  ${}_s\psi_{1,2}$  – нечетные.

В связи с тем, что в эллиптической области волны делятся на четные и нечетные, то (3.53) и (3.54) после объединения примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_c E_Z = \frac{{}_c \Psi_1 \Lambda_2 - {}_c \Psi_2 \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1}; \quad {}_s E_Z = \frac{{}_s \Psi_1 \Lambda_2 - {}_s \Psi_2 \Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1}; \\ {}_c H_Z = j \frac{{}_c \Psi_1 - {}_c \Psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1}; \quad {}_s H_Z = \frac{{}_s \Psi_1 - {}_s \Psi_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1}. \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Выражение (3.64) с учетом формулы (3.63) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_c E_Z = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_c \Psi_1 \Lambda_2 - {}_c \Psi_2 \Lambda_1) = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_c \Psi_{\xi 1} {}_c \Psi_{\varphi 1} \Lambda_2 - {}_c \Psi_{\xi 2} {}_c \Psi_{\varphi 2} \Lambda_1) = \\ = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} [\Lambda_2 C_{m1} C e_m(\xi, q_1) c e_m(\varphi, q_1) - \Lambda_1 C_{m2} C e_m(\xi, q_2) c e_m(\varphi, q_2)]; \\ {}_s E_Z = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_s \Psi_1 \Lambda_2 - {}_s \Psi_2 \Lambda_1) = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_s \Psi_{\xi 1} {}_s \Psi_{\varphi 1} \Lambda_2 - {}_s \Psi_{\xi 2} {}_s \Psi_{\varphi 2} \Lambda_1) = \\ = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} [\Lambda_2 S_{m1} S e_m(\xi, q_1) s e_m(\varphi, q_1) - \Lambda_1 S_{m2} S e_m(\xi, q_2) s e_m(\varphi, q_2)]; \\ {}_c H_Z = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_c \Psi_1 - {}_c \Psi_2) = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_c \Psi_{\xi 1} {}_c \Psi_{\varphi 1} - {}_c \Psi_{\xi 2} {}_c \Psi_{\varphi 2}) = \\ = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1} [C_{m1} C e_m(\xi, q_1) c e_m(\varphi, q_1) - C_{m2} C e_m(\xi, q_2) c e_m(\varphi, q_2)]; \\ {}_s H_Z = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_s \Psi_1 - {}_s \Psi_2) = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1} ({}_s \Psi_{\xi 1} {}_s \Psi_{\varphi 1} - {}_s \Psi_{\xi 2} {}_s \Psi_{\varphi 2}) = \\ = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1} [S_{m1} S e_m(\xi, q_1) s e_m(\varphi, q_1) - S_{m2} S e_m(\xi, q_2) s e_m(\varphi, q_2)]. \end{array} \right. \quad (3.65)$$

### 3.4.2. Компоненты электромагнитного поля

Поперечные компоненты ЭМП для продольного намагничивания имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\xi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \mathcal{K}}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) \right]_z; \\ E_{\varphi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \frac{w\mu c^2}{\gamma a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \mathcal{K}}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \right]_z; \\ H_{\xi} = \frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \mathcal{K}}{a^2} \left( \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \right]_z; \\ H_{\varphi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \mathcal{K}}{a^2} \left( \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) \right]_z. \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Подставив (3.65) в (3.66) и добавив продольные компоненты, получим выражения

для всех шести составляющих (четных) гибридных волн:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 {}_c E_\xi = \frac{1}{g_+^2 g_-^2 e d (\Lambda_2 - \Lambda_1)} \left[ \begin{array}{l} j C_{m1} C e'_m (\xi, q_1) c e_m (\varphi, q_1) \{ \gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_2 \} - \\ - j C_{m2} C e'_m (\xi, q_2) c e_m (\varphi, q_2) \{ \gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_1 \} + \\ + C_{m1} C e_m (\xi, q_1) c e'_m (\varphi, q_1) \{ \mu w q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2 \} - \\ - C_{m2} C e_m (\xi, q_2) c e'_m (\varphi, q_2) \{ \mu w q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1 \} \end{array} \right] e^{-j(wt - \gamma z)}; \\
 {}_c E_\varphi = \frac{1}{g_+^2 g_-^2 e d (\Lambda_2 - \Lambda_1)} \left[ \begin{array}{l} j C_{m1} C e_m (\xi, q_1) c e'_m (\varphi, q_1) \{ \gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_2 \} - \\ - j C_{m2} C e_m (\xi, q_2) c e'_m (\varphi, q_2) \{ \gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_1 \} - \\ - C_{m1} C e'_m (\xi, q_1) c e_m (\varphi, q_1) \{ \mu w q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2 \} + \\ + C_{m2} C e'_m (\xi, q_2) c e_m (\varphi, q_2) \{ \mu w q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1 \} \end{array} \right] e^{-j(wt - \gamma z)}; \\
 {}_c E_z = \frac{1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} [ \Lambda_2 C_{m1} C e_m (\xi, q_1) c e_m (\varphi, q_1) - \Lambda_1 C_{m2} C e_m (\xi, q_2) c e_m (\varphi, q_2) ] e^{-j(wt - \gamma z)}; \\
 {}_c H_\xi = \frac{1}{g_+^2 g_-^2 e d (\Lambda_2 - \Lambda_1)} \left[ \begin{array}{l} j C_{m1} C e_m (\xi, q_1) c e'_m (\varphi, q_1) \{ w \varepsilon a^2 \Lambda_2 - \gamma w^2 \varepsilon k \} - \\ - j C_{m2} C e_m (\xi, q_2) c e'_m (\varphi, q_2) \{ w \varepsilon a^2 \Lambda_1 - \gamma w^2 \varepsilon k \} + \\ + C_{m1} C e'_m (\xi, q_1) c e_m (\varphi, q_1) \{ \gamma a^2 - w^3 \varepsilon^2 k \Lambda_2 \} - \\ - C_{m2} C e'_m (\xi, q_2) c e_m (\varphi, q_2) \{ \gamma a^2 - w^3 \varepsilon^2 k \Lambda_1 \} \end{array} \right] e^{-j(wt - \gamma z)}; \\
 {}_c H_\varphi = \frac{1}{g_+^2 g_-^2 e d (\Lambda_2 - \Lambda_1)} \left[ \begin{array}{l} j C_{m1} C e'_m (\xi, q_1) c e_m (\varphi, q_1) \{ \gamma w^2 \varepsilon k - w \varepsilon a^2 \Lambda_2 \} - \\ - j C_{m2} C e'_m (\xi, q_2) c e_m (\varphi, q_2) \{ \gamma w^2 \varepsilon k - w \varepsilon a^2 \Lambda_1 \} + \\ + C_{m1} C e_m (\xi, q_1) c e'_m (\varphi, q_1) \{ \gamma a^2 - w^3 \varepsilon^2 k \Lambda_2 \} - \\ - C_{m2} C e_m (\xi, q_2) c e'_m (\varphi, q_2) \{ \gamma a^2 - w^3 \varepsilon^2 k \Lambda_1 \} \end{array} \right] e^{-j(wt - \gamma z)}; \\
 {}_c H_z = \frac{j}{\Lambda_2 - \Lambda_1} [ C_{m1} C e_m (\xi, q_1) c e_m (\varphi, q_1) - C_{m2} C e_m (\xi, q_2) c e_m (\varphi, q_2) ] e^{-j(wt - \gamma z)}.
 \end{array} \right. \quad (3.67)$$

где  $g_+^2 = w^2 \varepsilon \mu + w^2 \varepsilon k - \gamma^2$ ;  $g_-^2 = w^2 \varepsilon \mu - w^2 \varepsilon k - \gamma^2$ ;  $e$  - фокусное расстояние;

$d = \sqrt{ch^2 \xi - \cos^2 \varphi} = \sqrt{0.5(ch2\xi - \cos 2\varphi)}$  - геометрический параметр;  $\gamma$  - постоянная

распространения;  $\xi, \varphi$  - поперечные координаты эллиптической системы координат;

$k = \mu_0 \frac{w w_m}{w^2 - w_0^2}$  и  $\mu = \mu_0 - \mu_0 \frac{w_0 w_m}{w^2 - w_0^2}$  - компоненты тензора магнитной проницаемости

феррита;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M}$  - магнитная постоянная;  $w_0 = \mu_0 Y H_0$  - частота ферромагнит-

ного резонанса;  $Y = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{Kл}{кз}$  - гиромангнитное отношение;  $H_0$  - напряженность

намагничивающего постоянного магнитного поля;  $w_m = \mu_0 Y M_0$ ;  $M_0$  - намагниченность насыщения феррита;  $C_{m1}, C_{m2}$  - амплитудные коэффициенты (постоянные);  $ce_m(\varphi, q)$  - обыкновенная функция Матье I-го рода целого порядка (индекса)  $m$ ;  $Ce_m(\xi, q)$  - присоединенные (модифицированные) функции Матье I-го рода (с целым

индексом)  $a^2 = w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2$ ;  $Q^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} - \gamma^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 = k_{\perp}^2 - \gamma^2$ ;  $\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}$ ;

$k_{\perp}^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\perp}$ ;  $\Lambda_{1,2}$  - корни уравнения  $\gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \Lambda^2 + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right) \Lambda - \gamma w \mu_{\parallel} \frac{k}{\mu} = 0$ ,

т.е.

$$\Lambda_{1,2} = \frac{-\left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right) \pm \sqrt{\left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right)^2 + 4 w^2 \gamma^2 \varepsilon \mu_z \frac{k^2}{\mu^2}}}{2 w \gamma \varepsilon \frac{k}{\mu}} =$$

$$= \left\{ \mu_{\parallel} = \mu_z \right\} = \frac{-\left( k_z^2 - \frac{\mu_z}{\mu} \gamma^2 - k_{\perp}^2 + \gamma^2 \right) \pm \sqrt{\left( k_z^2 - \frac{\mu_z}{\mu} \gamma^2 - k_{\perp}^2 + \gamma^2 \right)^2 + 4 w^2 \gamma^2 \varepsilon \mu_z \frac{k^2}{\mu^2}}}{2 w \gamma \varepsilon \frac{k}{\mu}};$$

$$k_z^2 = w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} = w^2 \varepsilon \mu_z; \quad q_1 = \frac{e^2 \left( k_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right)}{4} \quad \text{и} \quad q_2 = \frac{e^2 \left( k_{\perp} - \gamma^2 - \Lambda_2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right)}{4}.$$

параметры функций Матье.

Выражения для нечетных волн те же самые, только необходимы следующие замены:  $C_{m1} \rightarrow S_{m1}$ ;  $C_{m2} \rightarrow S_{m2}$ ;  $Ce \rightarrow Se$ ;  $ce \rightarrow se$ .

### 3.5. Дисперсионные уравнения электромагнитных волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании

Из условия Дирихле в (3.42) следует, что тангенциальные составляющие электрического поля равны нулю на стенках граничного эллипса, т.е.:

$$E_z = E_{\varphi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} {}_c E_z = {}_c E_{\varphi} = 0; \\ {}_s E_z = {}_s E_{\varphi} = 0. \end{cases} \quad \text{при} \quad \xi = \xi_0. \quad (3.68)$$

Применяя граничные условия (3.68) к системе (3.67) для  $E_z$  и  $E_{\varphi}$  имеем:

$$\begin{cases} {}_c E_\varphi = C_{m1} [jC e_m(\xi_0, q_1) c e'_m(\varphi, q_1) \{\gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_2\} - C e'_m(\xi_0, q_1) c e_m(\varphi, q_1) \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2\}] - \\ - C_{m2} [jC e_m(\xi_0, q_2) c e'_m(\varphi, q_2) \{\gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_1\} - C e'_m(\xi_0, q_2) c e_m(\varphi, q_2) \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1\}] = 0; \\ {}_c E_Z = C_{m1} C e_m(\xi_0, q_1) c e_m(\varphi, q_1) \Lambda_2 - C_{m2} C e_m(\xi_0, q_2) c e_m(\varphi, q_2) \Lambda_1 = 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

Выражение (3.69) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно амплитудных коэффициентов  $C_{m1}$  и  $C_{m2}$ .

Для нетривиального решения определитель СЛАУ должен равняться нулю:

$$\begin{cases} C e_m(\xi_0, q_2) c e_m(\varphi, q_2) \Lambda_1 \left[ jC e_m(\xi_0, q_1) c e'_m(\varphi, q_1) \{\gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_2\} - \right. \\ \left. - C e'_m(\xi_0, q_1) c e_m(\varphi, q_1) \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2\} \right] - \\ - C e_m(\xi_0, q_1) c e_m(\varphi, q_1) \Lambda_2 \left[ jC e_m(\xi_0, q_2) c e'_m(\varphi, q_2) \{\gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_1\} - \right. \\ \left. - C e'_m(\xi_0, q_2) c e_m(\varphi, q_2) \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1\} \right] = 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Преобразуем (3.70), т.е. вынесем за скобки  $C e_m(\xi_0, q_1)$  в первом слагаемом и  $C e_m(\xi_0, q_2)$  - во втором, а полученный результат разделим на  $c e_m(\varphi, q_1) c e_m(\varphi, q_2)$ :

$$\begin{cases} -\Lambda_1 \frac{C e'_m(\xi_0, q_1)}{C e_m(\xi_0, q_1)} \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2\} + \Lambda_2 \frac{C e'_m(\xi_0, q_2)}{C e_m(\xi_0, q_2)} \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1\} + \\ + \frac{j c e'_m(\varphi, q_1)}{c e_m(\varphi, q_1)} \{\gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_2\} \Lambda_1 - \frac{j c e'_m(\varphi, q_2)}{c e_m(\varphi, q_2)} \{\gamma^2 w k - \gamma a^2 \Lambda_1\} \Lambda_2 = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Преобразуем выражение (3.71). Для удобства рассмотрим первые две слагаемые:

$$\begin{aligned} & -\Lambda_1 \frac{C e'_m(\xi_0, q_1)}{C e_m(\xi_0, q_1)} \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2\} + \Lambda_2 \frac{C e'_m(\xi_0, q_2)}{C e_m(\xi_0, q_2)} \{\mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1\} = \\ & = -\Lambda_1 \frac{C e'_m(\xi_0, q_1)}{C e_m(\xi_0, q_1)} \{\mu w (k_\perp^2 - \gamma^2) - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2\} + \Lambda_2 \frac{C e'_m(\xi_0, q_2)}{C e_m(\xi_0, q_2)} \{\mu w \mu w (k_\perp^2 - \gamma^2) - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1\} = \\ & = -\Lambda_1 \frac{C e'_m(\xi_0, q_1)}{C e_m(\xi_0, q_1)} \left\{ \mu w \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \Lambda_2 \right) \right\} + \Lambda_2 \frac{C e'_m(\xi_0, q_2)}{C e_m(\xi_0, q_2)} \left\{ \mu w \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \Lambda_1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

В круглые скобки выражения (3.72) подставим формулы для  $q_1$  и  $q_2$  из (3.60), (3.61), а затем выразим  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  из (3.51):

$$\begin{aligned}
& -\Lambda_1 \frac{Ce'_m(\xi_0, q_1)}{Ce_m(\xi_0, q_1)} \{ \mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_2 \} + \Lambda_2 \frac{Ce'_m(\xi_0, q_2)}{Ce_m(\xi_0, q_2)} \{ \mu w Q^2 - \gamma w^2 \varepsilon k \Lambda_1 \} = \\
& = - \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) \frac{\mu^2}{\gamma \varepsilon k} \frac{4q_2}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_1)}{Ce_m(\xi_0, q_1)} + \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \frac{\mu^2}{\gamma \varepsilon k} \frac{4q_1}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_2)}{Ce_m(\xi_0, q_2)}.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Теперь преобразуем третье и четвертое слагаемые выражения (3.71)

$$\begin{aligned}
& \frac{jce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \{ \gamma^2 wk - \gamma a^2 \Lambda_2 \} \Lambda_1 - \frac{jce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} \{ \gamma^2 wk - \gamma a^2 \Lambda_1 \} \Lambda_2 = \\
& = \gamma a^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \left\{ \frac{jce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} - \frac{jce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \right\} + \gamma^2 wk \left\{ \frac{jce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \Lambda_1 - \frac{jce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} \Lambda_2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Объединяя (3.73) и (3.74) как части одного выражения, и умножив полученное выражение на  $\frac{\gamma \varepsilon k}{\mu^2}$ , получим [82-84]:

$$\begin{aligned}
& \left[ - \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) \frac{4q_2}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_1)}{Ce_m(\xi_0, q_1)} + \left( k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \frac{4q_1}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_2)}{Ce_m(\xi_0, q_2)} \right] + \\
& + j \left[ \frac{\gamma^2 \varepsilon k a^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\mu^2} \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} - \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \right\} + \frac{\gamma^3 w \varepsilon k}{\mu^2} \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \Lambda_1 - \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} \Lambda_2 \right\} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Формула (3.75) представляет собой дисперсионное уравнение для четных волн.

Для получения дисперсионного уравнения для нечетных волн в (3.75) надо сделать следующую замену:

$$\begin{cases} Ce(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se(\xi_0, q_{1,2}), Ce'(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se'(\xi_0, q_{1,2}), \\ ce(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se(\varphi, q_{1,2}), ce'(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se'(\varphi, q_{1,2}), \end{cases} \tag{3.76}$$

где  $Se(\xi_0, q_{1,2}), Se'(\xi_0, q_{1,2})$ - нечетные присоединенные (модифицированные) функции

Матье I-го рода (с целым индексом) и их производные,  $se(\varphi, q_{1,2}), se'(\varphi, q_{1,2})$ - нечетные

обыкновенные функции Матье I-го рода целого порядка  $m$  и их производные.

Полученные дисперсионные уравнения пока еще нельзя использовать для анализа распространения ЭМВ, т.к. в них имеются мнимые единицы  $j$ . Для того, чтобы избавиться от  $j$ , используя одно из уравнений системы (3.15), разложим обыкновенные

функции Матье в ряд Фурье. Например, функция  $ce_{2n+1}$  при разложении в ряд Фурье примет вид:

$$ce_{2n+1} = B_1^{2n+1} \cos(r\varphi) + B_3^{2n+1} \cos(3r\varphi) + B_5^{2n+1} \cos(5r\varphi) + \dots + B_{2r+1}^{2n+1} \cos((2r+1)\varphi). \quad (3.77)$$

В последнем выражении верхний индекс при коэффициентах  $B$ , это не показатель степени, а означает, что сами коэффициенты зависят от порядка обыкновенной функции Матье  $2n+1$ . Также сделали замену обобщенной поперечной координаты  $u$  на  $\varphi$ .

Разложение (3.77) можем представить в другой фундаментальной системе решений (при этом для удобства опустим верхние индексы):

$$ce_{2n+1} = B_1 \exp(\pm jr\varphi) + B_3 \exp(\pm j3r\varphi) + B_5 \exp(\pm j5r\varphi) + \dots + B_{2r+1} \exp(-j(2r+1)\varphi). \quad (3.78)$$

Подобным же образом можно получить другую фундаментальную систему решений и для остальных трех вариантов разложений системы (3.15).

Подставив (3.78) в выражение (3.75), избавимся от мнимой единицы и получим окончательный вид дисперсионного уравнения для четных волн в гиротропной ограниченной области с ферритовым (тензорным) заполнением при продольном намагничивании. Для получения дисперсионного уравнения для нечетных волн необходимо сделать замену (3.76).

Анализ полученного дисперсионного уравнения показывает, что в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании распространяются независимо две волны (четные или нечетные), имеющие разные постоянные распространения с левым и правым вращением, обусловленное двумя корнями уравнения (3.75).

Полученные дисперсионные уравнения как четных волн, так нечетных не решаются аналитически. Поэтому их решения были получены численно с применением модифицированных пакетов программ Maple.

### 3.6. Выводы по главе

1) Решены краевые задачи уравнений Гельмгольца для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.

2) Получены все составляющие электромагнитного поля гибридных EH и HE волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании.

3) Получены дисперсионные уравнения электромагнитных волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании, позволяющие установить зависимости постоянной распространения волн от свойств заполняющей пространство ферритовой среды и параметров намагничивающего магнитного поля.



## ГЛАВА 4

### ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРОДОЛЬНО-НАМАГНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В главе рассматриваются вопросы достоверности впервые полученных выражений, описывающих распространение ЭМВ в ограниченной гиротропной продольно-намагниченной эллиптической области с бесконечно проводящими стенками. Проводится численный анализ полученных оригинальных дисперсионных уравнений с применением программного пакета Maple, на основе которого был разработан комплекс программ.

#### 4.1. Предельные переходы из гиротропной ограниченной области эллиптической формы в изотропный и цилиндрический для изотропного и гиротропного случаев

В параграфе выполняется проверка корректности уравнений Гельмгольца и дисперсионных уравнений следующим образом. Эллиптическая гиротропная область при продольном намагничивании путем предельного перехода сводится: а) к круглой гиротропной области при продольном намагничивании, б) к эллиптической изотропной. При этом уравнения Гельмгольца и дисперсионные уравнения для эллиптической гиротропной области при продольном намагничивании преобразовываются в соответствующие уравнения: а) для круглой гиротропной области при продольном намагничивании, б) эллиптической изотропной области, которые затем сравниваются с известными уравнениями.

##### 4.1.1. Преобразования уравнений Гельмгольца из эллиптических координат в цилиндрические для изотропного и гиротропного случаев

Семейства софокусных эллипсов и гипербол эллиптической системы координат показаны на рис.4.1. Кривые этих семейств пересекаются ортогонально и точки пересечения имеют координаты:

$$\begin{cases} x = e \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\varphi) \\ y = e \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \quad (4.1)$$

Например, для точки М (рис.4.1.):

$$\begin{cases} x = e \cdot ch(0,78) \cdot \cos(60^\circ) \\ y = e \cdot sh(0,78) \cdot \sin(60^\circ) \end{cases} \quad (4.2)$$

Угол  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$  (когда точка описывает один раз полный эллипс). Если имеем натянутую упругую мембрану, закрепленную между двумя подобными эллипсами, то  $\xi$  изменяется между значениями, соответствующими этим эллипсам [14].

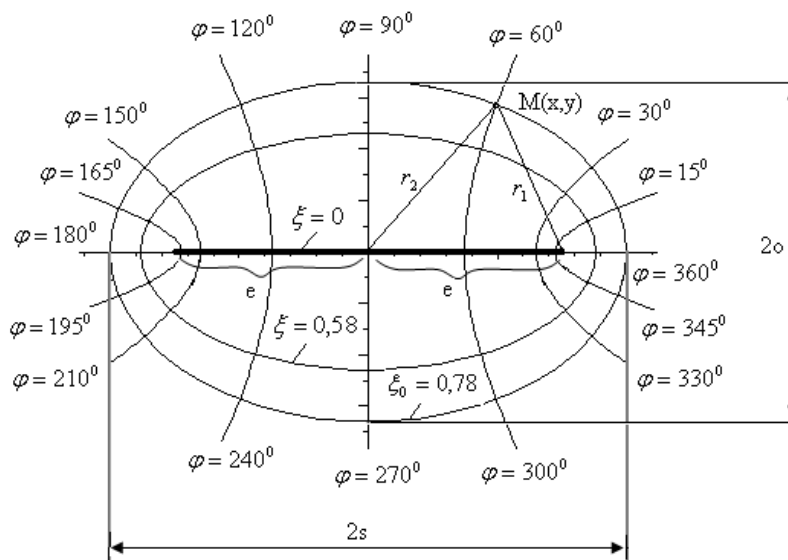


Рисунок – 4.1. Ортогональные семейства софокусных эллипсов и гипербол.

Из свойств эллипса:

$$\begin{cases} e = \sqrt{s^2 - o^2} \\ E = \frac{e}{s} \\ r_1 = s - E \cdot x; \quad r_2 = s + e \cdot x \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $e$  – фокусное расстояние;  $E$ -эксцентриситет;  $s$ ,  $o$ - большая и малая полуоси эллипса соответственно.

Координата  $\xi$  связана с эксцентриситетом  $E$  соотношением [9]:

$$ch(\xi) = \frac{1}{E} \text{ или } \xi = ch^{-1}\left(\frac{1}{E}\right) \quad (4.4)$$

Когда эксцентриситет  $E$  граничного эллипса  $\xi$  стремится к нулю, узловые эллипсы стремятся к узловым окружностям, а узловые гиперболы - к узловым радиусам. Аналитически это выражается в том, что если не считать постоянных множителей, модифицированные функции Матъе стремятся к функциям Бесселя того же порядка, а обычные функции Матъе – к круговым функциям [14].

Эллипс вырождается в окружность, когда большая и малая полуоси равны, т.е.  $s=0$ . Тогда фокусное расстояние  $e = \sqrt{s^2 - o^2} = 0$  (фокус совпадает с началом координат), эксцентриситет  $E = \frac{e}{s} = \frac{0}{s} = 0$ . Из [19] известно, что :

$$y = ch^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (4.5)$$

где  $x \geq 1$ ;  $0 \leq y < \infty$

Применяя (4.5) к данному случаю, имеем:

$$\xi = ch^{-1}\left(\frac{1}{E}\right) = \ln\left(\frac{1}{E} + \sqrt{\left(\frac{1}{E}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{0} + \sqrt{\left(\frac{1}{0}\right)^2 - 1}\right) \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

$$\text{Если } \xi \rightarrow \infty, \text{ то } ch(\xi) = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} = \frac{1}{2}e^\xi \text{ и } sh(\xi) = \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} = \frac{1}{2}e^\xi$$

То есть при  $\xi \rightarrow \infty$  получаем:

$$ch(\xi) \rightarrow sh(\xi) \rightarrow \frac{1}{2}e^\xi \quad (4.7)$$

Применим (4.3) и (4.4) к выражению (4.1) при  $\xi \rightarrow \infty$  :

$$\begin{cases} x = e \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\varphi) \\ y = e \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\varphi) \\ y = e \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{e}{A} \cdot \cos(\varphi) \\ y = \frac{e}{A} \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s \cdot \cos(\varphi) \\ y = s \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \quad (4.8)$$

где  $s = r = e \cdot ch(\xi)$  - радиус окружности при  $\xi \rightarrow \infty$ .

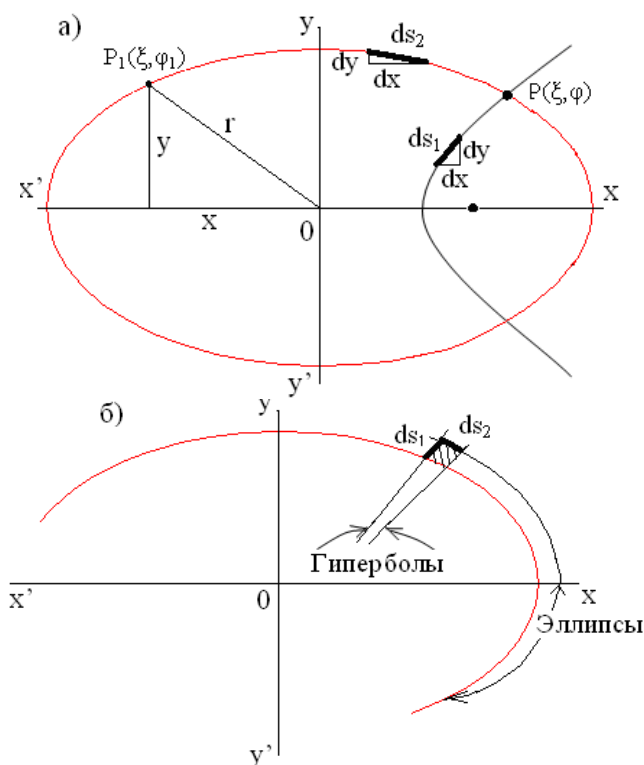
Как видно, выражение (4.8) – это уравнение окружности в параметрическом виде, т.е. эллипс при  $\xi \rightarrow \infty$  вырождается в окружность с радиусом  $s=r$ .

В итоге, если большая полуось  $s=r$  постоянна и эксцентриситет  $E=0$ , то:

$$\begin{cases} E \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow \infty \\ e \rightarrow 0 \\ e \cdot ch(\xi) \rightarrow e \cdot sh(\xi) \rightarrow s = r, \end{cases} \quad (4.9)$$

где  $E$ -эксцентриситет,  $e$ - фокусное расстояние,  $\xi = ch^{-1}\left(\frac{1}{A}\right)$ ,  $s = r$  - радиус окружности при  $\xi \rightarrow \infty$ .

Чтобы осуществить предельный переход от эллипса к кругу, необходимо рассмотреть дифференциалы дуг эллипса и гиперболы (см. рис. 4.2).



- а) Гиперболический ( $ds_1$ ) и эллиптический ( $ds_2$ ) дифференциалы дуги и радиус-вектор ( $r$ );  
 б) – площадь ( $ds_1 \times ds_2$ ), заключенная между двумя смежными парами пересекающихся софокусных эллипсов и гипербол.

Рисунок – 4.2. Дифференциалы дуг эллипса и гиперболы.

Согласно [14] дифференциалы дуг эллипса и гиперболы определяются соответственно следующими равенствами:

$$\begin{cases} ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \\ ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi \end{cases} \quad (4.10)$$

Распишем частные производные, входящие в выражение (4.10), используя (4.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial(e \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\varphi))}{\partial \xi} = e \cdot sh(\xi) \cdot \cos(\varphi) \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial(e \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\varphi))}{\partial \varphi} = -e \cdot ch(\xi) \cdot \sin(\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial(e \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\varphi))}{\partial \xi} = e \cdot ch(\xi) \cdot \sin(\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial(e \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\varphi))}{\partial \varphi} = e \cdot sh(\xi) \cdot \cos(\varphi) \end{cases} \quad (4.11)$$

С учетом (4.11) выражение (4.10) примет вид:

$$\begin{cases} ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi = \sqrt{e^2 \cdot sh^2(\xi) \cdot \cos^2(\varphi) + e^2 \cdot ch^2(\xi) \cdot \sin^2(\varphi)} d\xi = e \sqrt{ch^2(\xi) - \cos^2(\varphi)} d\xi \\ ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{e^2 \cdot ch^2(\xi) \cdot \sin^2(\varphi) + e^2 \cdot sh^2(\xi) \cdot \cos^2(\varphi)} d\varphi = e \sqrt{ch^2(\xi) - \cos^2(\varphi)} d\varphi \end{cases} \quad (4.12)$$

Получили, что:

$$\begin{cases} ds_1 = l_1 d\xi \\ ds_2 = l_1 d\varphi \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\text{где } l_1 = e \cdot \sqrt{ch^2(\xi) - \cos^2(\varphi)} \quad (4.14)$$

Так как дифференцирование  $ds_1$  направлено по нормали к эллипсу, то можно записать:

$$dn = l_1 d\xi \quad (4.15)$$

Расстояние до любой точки (x,y) от начала координат в эллиптической системе координат будет равно (см. рис. 4.2a) [85]:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{e^2 \cdot ch^2(\xi) \cdot \cos^2(\varphi) + e^2 \cdot sh^2(\xi) \cdot \sin^2(\varphi)} = e \cdot \sqrt{ch^2(\xi) \cdot \{1 - \sin^2(\varphi)\} + sh^2(\xi) \cdot \sin^2(\varphi)} = \\
&= e \cdot \sqrt{ch^2(\xi) - ch^2(\xi) \cdot \sin^2(\varphi) + sh^2(\xi) \cdot \sin^2(\varphi)} = e \cdot \sqrt{ch^2(\xi) - \sin^2(\varphi) \cdot \{ch^2(\xi) - sh^2(\xi)\}} = \\
&= e \cdot \sqrt{ch^2(\xi) - \sin^2(\varphi)} = e \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \{ch(2\xi) + 1\} - \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\varphi))} = e \cdot \sqrt{\frac{ch(2\xi) + \cos(2\varphi)}{2}}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

где  $e$ -фокусное расстояние.

При  $\xi \rightarrow \infty$  эллипс вырождается в окружность:

$$l_1 = e \cdot \sqrt{ch^2(\xi) - \cos^2(\varphi)} = e \cdot ch(\xi) \quad (4.17)$$

Согласно (4.16) для радиус-вектора  $r$  при большом  $\xi$  имеем:

$$r = e \cdot \sqrt{ch^2(\xi) - \sin^2(\varphi)} \approx e \cdot ch(\xi) = \frac{e}{2} [\exp(\xi) + \exp(-\xi)] = \frac{e}{2} \exp(\xi) \quad (4.18)$$

Из выражений (4.17) и (4.18) при  $\xi \rightarrow \infty$  имеем:

$$l_1 = r, \quad (4.19)$$

где  $r$ - радиус-вектор (см. рис.4.2).

С учетом того, что дифференцирование  $ds_1$  направлено по нормали к эллипсу, используя выражение (4.19) можем записать первое уравнение системы (4.13) в виде:

$$ds_1 = l_1 \cdot d\xi = r \cdot d\xi \approx dr$$

Для второго уравнения системы (4.13):

$$ds_2 = l_1 \cdot d\varphi \approx r \cdot d\varphi$$

Окончательно:

$$\begin{cases} ds_1 = r \cdot d\xi \approx dr \\ ds_2 \approx r \cdot d\varphi \\ ds_1 \cdot ds_2 = r \cdot d\varphi \cdot dr \end{cases} \quad (4.20)$$

Из первого уравнения системы (4.20):

$$d\xi = \frac{dr}{r} \quad (4.21)$$

Перепишем волновые уравнения гибридных EH и HE волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_Z - j e^2 (ch^2 \xi - \cos^2 \varphi) \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0; \\ \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_Z + j e^2 (ch^2 \xi - \cos^2 \varphi) \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_Z = 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

где  $(ch^2 \xi - \cos^2 \varphi) = d^2$ .

Когда большая и малая полуоси становятся равными, то согласно (4.9), эксцентриситет  $E=0$ . Это значит, что  $ch^2(\xi) - \cos^2(\varphi) \approx ch^2(\xi)$ . Тогда первое уравнение из (4.22) примет вид:

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + r^2 (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_Z - j r^2 \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0, \quad (4.23)$$

где  $r$  - радиус окружности.

Учитывая, что (4.21), преобразуем формулу (4.23):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial E_Z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) r^2 E_Z - j r^2 \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{r}{\partial r} \partial \left( r \frac{\partial E_Z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) r^2 E_Z - j r^2 \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{r}{\partial r} \left( \frac{\partial r \partial E_Z}{\partial r} + \frac{r \partial^2 E_Z}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) r^2 E_Z - j r^2 \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0. \end{aligned}$$

Последнее выражение разделим на  $r^2$  и окончательно получим:

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_Z - j \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0. \quad (4.24)$$

Поступая таким же образом для второго уравнения системы (4.22) получим:

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + (w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \gamma^2) H_Z + j \gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} E_Z = 0. \quad (4.25)$$

Выражения (4.24) и (4.25) описывают распространение EH и HE волн в круглой гиротропной ограниченной области при продольном намагничивании и имеют такой же вид, как и в [3], за исключением знаков перед последними слагаемыми (перед  $H_Z$  в (4.24) и  $E_Z$  в (4.25)). Это связано с тем, что недиагональные компоненты тензора маг-

нитной проницаемости феррита при продольном намагничивании взяты с противоположными знаками, чем в [3]. Данное обстоятельство несущественно, только поменяется местами левое и правое вращение ЭМВ при распространении их в гиротропных неограниченных и ограниченных областях при продольном намагничивании.

Для изотропного же случая уравнения (4.24) и (4.25) совпадают с известными выражениями [14].

#### 4.1.2. Вырождение обыкновенных и модифицированных функций Матъе.

##### Предельный переход дисперсионного уравнения

В случае обыкновенных функций Матъе при вырождении эллипса в круг, т.е. при  $E \rightarrow 0$  и  $q \rightarrow 0$ , где  $E$  - эксцентриситет эллипса,  $q$  - параметр функции Матъе имеются следующие соотношения [14]:

$$\begin{cases} ce_m(\eta, q) \rightarrow \cos(m\eta) = \cos(m\varphi); & m \geq 1 \\ se_m(\eta, q) \rightarrow \sin(m\eta) = \sin(m\varphi); & m \geq 1 \end{cases} \quad (4.26)$$

Уравнения модифицированных функций Матъе в общем случае записывается в виде [14]:

$$y'' - (b - 2k^2 ch 2\xi)y = 0, \quad (4.27)$$

где  $q = k^2 > 0$  - параметр функции,  $b$  - постоянная разделения.

Тогда при  $\xi \rightarrow \infty$  с учетом (4.18) в уравнении (4.27):

$$2k^2 ch 2\xi = 2k^2 (2ch^2 \xi - 1) = 2k^2 2ch^2 \xi = 2k^2 2 \left( \frac{1}{2} \exp(\xi) \frac{1}{2} \exp(\xi) \right) = 2k^2 \exp(2\xi), \text{ т.е.}$$

$$2k^2 ch 2\xi = 2k^2 \exp(2\xi) \text{ при } \xi \rightarrow \infty \quad (4.27)$$

Если (4.27) остается конечным, то  $k \rightarrow 0$ , а потому для функции целого порядка  $m$  получаем, что  $b \rightarrow m^2$ . Следовательно, в этом случае уравнение (4.27) вырождается и принимает вид:

$$y'' + (k^2 \exp(2\xi) - m^2) = 0. \quad (4.28)$$



Так как в функциях Матъе по условию  $4k^2 = 4q = k_1 e^2$  и согласно (4.18) имеем

$r = \frac{e}{2} \exp(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} k^2 \exp(2\xi) &= \left\{ 4k^2 = k_1 \exp(2) \Rightarrow k^2 = \frac{k_1 \exp(2)}{4} \right\} = \frac{k_1 \exp(2)}{4} \exp(2\xi) = \\ &= \left\{ r = e \frac{1}{2} \exp(\xi) \right\} = k_1^2 e \frac{1}{2} \exp(\xi) e \frac{1}{2} \exp(\xi) = k_1^2 r^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Получили, что  $k^2 \exp(2\xi) = k_1^2 r^2$  при  $\xi \rightarrow \infty$  и поэтому, т.к. осуществляется переход к цилиндрической системе координат, то уравнение (4.28) преобразуется в обычное уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + \left( k_1^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) y = 0. \quad (4.30)$$

Из (4.27) и (4.29) следует, что при вырождении эллипса в круг получили, что  $2k^2 ch 2\xi = k_1^2 r^2$ . Т.к. из формулы (4.27) следует, что  $k^2 = q$ , то

$$\begin{aligned} 2q ch 2\xi = k_1^2 r^2 \Rightarrow k_1^2 &= \frac{2q ch 2\xi}{r^2} = \left\{ r \rightarrow \frac{e}{2} \exp(\xi) \text{ при } \xi \rightarrow \infty \right\} = \frac{2q(2ch^2 \xi - 1)}{\frac{e^2}{4} \exp(2\xi)} = \\ &= \left\{ ch \xi = \frac{1}{2} \exp(\xi) \right\} = \frac{2q \left( 2 \frac{1}{2} \exp(\xi) \frac{1}{2} \exp(\xi) - 1 \right)}{\frac{e^2}{4} \exp(2\xi)} = \frac{4q}{e^2}, \end{aligned}$$

т.е.

$$k_1^2 = \frac{4q}{e^2}. \quad (4.31)$$

Имеются следующие функции вырождения для модифицированных функций Матъе при  $\xi \rightarrow \infty$ , т.е. при предельном переходе эллипса в круг [14]:

$$\begin{cases} Ce_m(\xi, q) \rightarrow P'_m J_m(k_1 r); & m \geq 0 \\ Se_m(\xi, q) \rightarrow S'_m J_m(k_1 r); & m \geq 1 \\ \frac{d}{d\xi} Ce_m(\xi, q) \rightarrow P'_m r \frac{d}{dr} J_m(k_1 r) = P'_m k_1 r J'_m(k_1 r); & m \geq 0 \\ \frac{d}{d\xi} Se_m(\xi, q) \rightarrow S'_m r \frac{d}{dr} J_m(k_1 r) = S'_m k_1 r J'_m(k_1 r); & m \geq 1, \end{cases} \quad (4.32)$$

где  $P'_m$  и  $S'_m$  - постоянные множители,  $k_1$  - поперечное волновое число.

Решение уравнения Бесселя (4.30) для круглой ограниченной области имеет вид:

$$\begin{cases} y = AJ_m(k_1 r) e^{\pm jm\varphi} \\ \text{или} \\ y = AJ_m(k_1 r) \frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)}, \end{cases} \quad (4.33)$$

где  $e^{\pm jm\varphi} = B \cdot e^{jm\varphi} + C \cdot e^{-jm\varphi}$ ;  $\frac{\cos(m\varphi)}{\sin(m\varphi)} = B \cdot \cos(m\varphi) + C \cdot \sin(m\varphi)$ ; A, B, C - кон-

станты [19].

Поэтому при предельном переходе дисперсионного уравнения эллиптической гиротропной области к цилиндрической будем использовать:

$$ce_m(\eta, \varphi) = \exp(\pm jm\varphi). \quad (4.34)$$

Подставив в (4.31) параметр функции Матье  $q$  из пункта 3.4.1. получим:

$$k_1^2 = \frac{4q}{e^2} = k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \Lambda_{1,2} \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu}. \quad (4.35)$$

Из (4.35) следует, что имеются два значения поперечных волновых чисел:

$$\begin{cases} k_{1(1)}^2 = \frac{4q}{e^2} = k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu}; \\ k_{1(2)}^2 = \frac{4q}{e^2} = k_{\perp}^2 - \gamma^2 - \Lambda_2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu}, \end{cases} \quad (4.36)$$

где

$$\Lambda_{1,2} = \frac{\left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right) \pm \sqrt{\left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_{\perp} + \gamma^2 \right)^2 + 4 \gamma^2 w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} \frac{k^2}{\mu^2}}}{2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu}}.$$

Подставив (4.32), (4.34), (4.36) в дисперсионное уравнение гиротропной продольно-намагниченной эллиптической ограниченной области с бесконечно проводящими

стенками при продольном намагничивании осуществим предельный переход к цилиндрической гиротропной области:

$$\begin{aligned}
 & - (k_{1(1)}^2 + \gamma^2 - k_{\perp}^2) k_{1(2)} r_0 \frac{J'_m(k_{1(1)} r_0)}{J_m(k_{1(1)} r_0)} + (k_{1(2)}^2 + \gamma^2 - k_{\perp}^2) k_{1(1)} r_0 \frac{J'_m(k_{1(2)} r_0)}{J_m(k_{1(2)} r_0)} \pm \\
 & \pm m \gamma^2 \frac{k}{\mu} \frac{k_{1(2)} - k_{1(1)}}{k_{1(1)} k_{1(2)}} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

где  $r_0$  - радиус граничного цилиндра.

Формула (4.37) полностью совпадает с результатом, полученным в [2, 5].

На рисунке 4.3. показаны зависимости постоянной распространения от напряженности намагничивающего поля для эллипса с эксцентриситетом  $E=0.02$  (почти круг).

Для сравнения на рисунке 4.4. представлен график, полученный в [2] с такими же исходными данными, как и для случая на рис. 4.3.

На рисунках 4.3.- 4.12 сделаны следующие обозначения:  $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц - круговая частота,  $\omega_0 = \mu_0 \Upsilon H_0$  - частота ферромагнитного резонанса (ФМР),

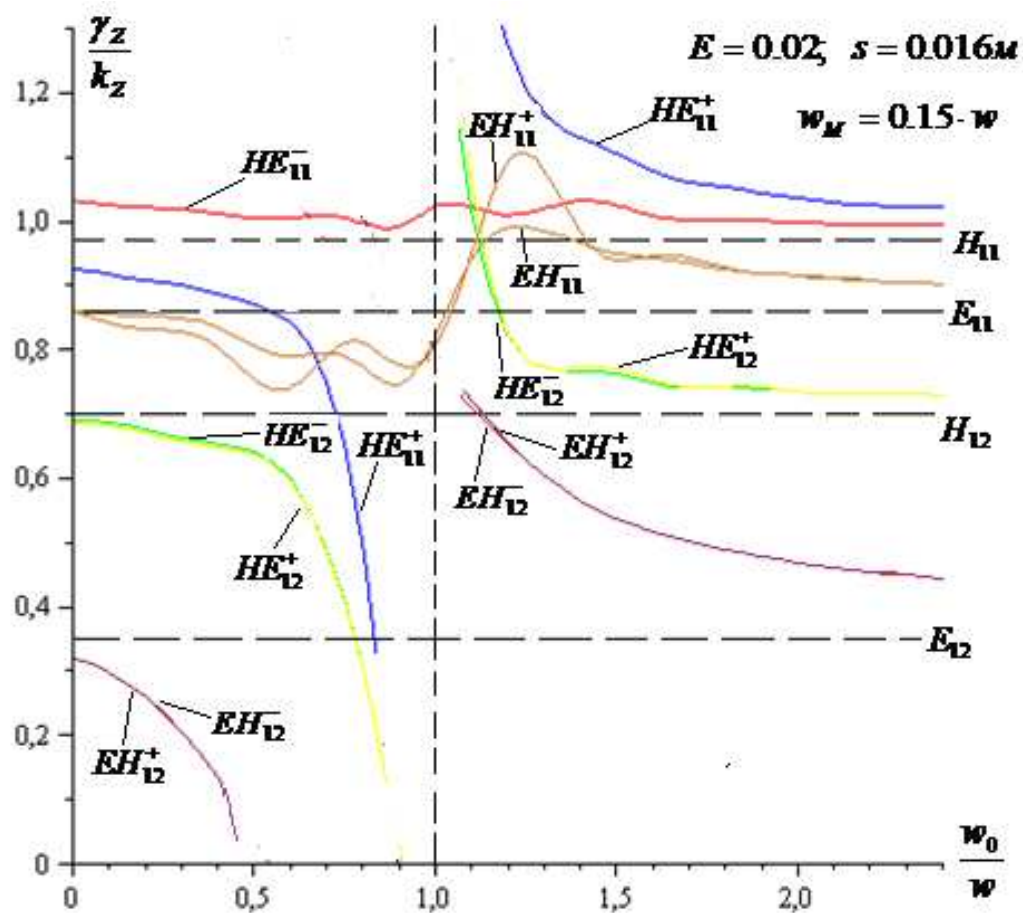
$\Upsilon = 1.76 \cdot 10^{11} \frac{Kl}{\kappa z}$  - гиромагнитное отношение,  $\mu_0 = 12.56 \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$  - магнитная постоянная,

$H_0$  - напряженность внешнего постоянного намагничивающего магнитного поля,

$\omega_M = \mu_0 \Upsilon M_0$  - частота, связанная с намагниченностью феррита  $M_0$ ,  $\gamma_z$  - постоянная

распространения, вычисляемая численно из дисперсионного уравнения (3.87),  $k_z$  - волновое

число в безграничной ненамагниченной ферритовой среде.



$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $H_{11}, E_{11}, H_{12}, E_{12}$ .

Рисунок – 4.3. Зависимость постоянной распространения от напряженности намагничивающего поля.

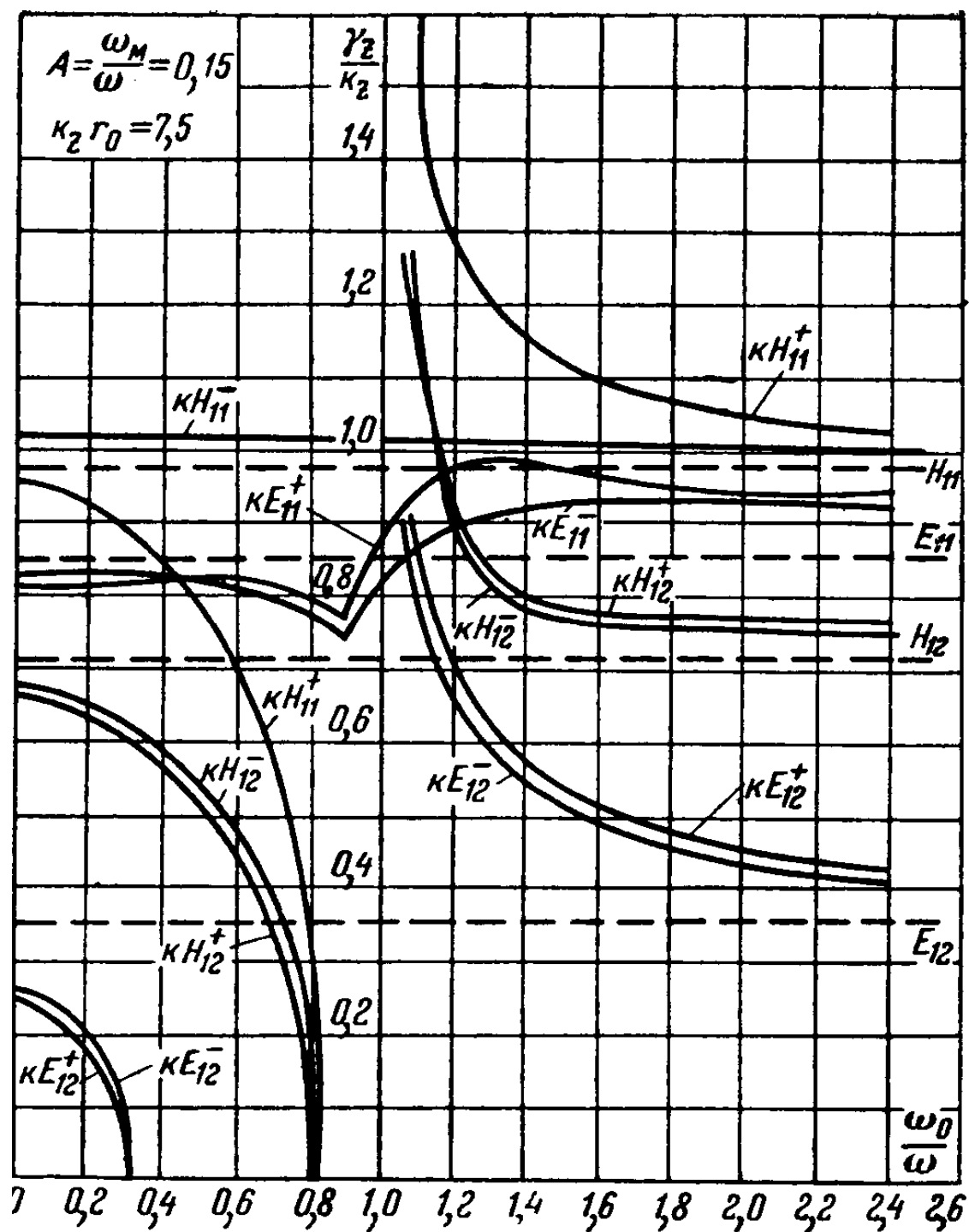


Рисунок – 4.4. Зависимость постоянной распространения от напряженности намагничивающего поля для цилиндрической направляющей системы [ 2].

Сравнение полученных результатов в работе [2] показывает хорошее совпадение.

Небольшую погрешность можно объяснить с точностью вычисления корней дисперсионных уравнений, которые зависят от численного метода поиска корней.

Из рисунков 4.3 и 4.4 следует, что любая электромагнитная волна, распространяющаяся в ограниченной гиротропной области вдоль постоянного магнитного поля распадается на две независимые друг от друга волны, имеющие разные постоянные распространения, например волна  $HE_{11}$  распадается на волны  $HE_{11}^+$  и  $HE_{11}^-$ . Индексом «+» обозначается волна правого вращения, а «-» - левого вращения. По мере распространения между этими волнами будет набегать фазовый сдвиг равный [2]:

$$\varphi = \left( \frac{\gamma_z^+ - \gamma_z^-}{2} \right) Z, \quad (4.38)$$

где  $\gamma_z^+$ ,  $\gamma_z^-$  - постоянные распространения волн с правым и левым вращениями соответственно,  $Z$ - расстояние.

Сознательно изменяя величину напряженности внешнего продольного магнитного поля, можно регулировать фазовые сдвиги волн левого и правого вращений. Данное свойство позволяет разрабатывать фазовращатели, которые широко применяются в технике сверхвысоких частот.

#### 4.1.3. Преобразования уравнений Гельмгольца в эллиптических координатах из гиротропного в изотропный

В главе 3 представлены предельные переходы поперечных компонент ЭМП гиротропных эллиптических областей с различными случаями намагничивания к изотропным. Было показано, что выражения, полученные в результате предельного перехода к изотропному случаю полностью совпадают с известными (см. [9]).

Уравнения Гельмгольца ЕН и НЕ волн при продольном намагничивании определены в параграфе 3.4.1. При переходе к изотропному случаю компоненты тензора магнитной проницаемости принимают следующие значения:

$$\begin{cases} k = 0; \\ \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} = \mu; \\ \mu_{\parallel} = \mu. \end{cases} \quad (4.39)$$

Подставив (4.39) в уравнения Гельмгольца ЕН и НЕ волн получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2) E_z = 0; \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (w^2 \varepsilon \mu - \gamma^2) H_z = 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

Выражение (4.40) полностью совпадает с известными литературными данными [14, 87]. Из (4.40) видно, что в изотропном случае существует только чистые Е или Н волны.

#### **4.2. Расчет дисперсии четных и нечетных ЕН и НЕ волн в гиротропных эллиптических направляющих системах с продольно-намагниченным ферритом**

Дисперсионное уравнение (3.75) позволяет получить графики зависимостей  $\gamma = f(l, k, \mu, H_0, M)$ , где  $l$  - геометрические параметры направляющей системы ( $e$  и  $d$ );  $k, \mu$  - компоненты тензора магнитной проницаемости феррита;  $M$  - намагниченность феррита;  $H_0$  - напряженность внешнего намагничивающего магнитного поля.

Обычно при анализе дисперсионного уравнения численно получают дисперсионные характеристики направляющей системы при различных геометрических параметрах ограниченной области, напряженности намагничивающего поля, намагниченности ферритового заполнения, а также определяются частота отсечки (в этом случае  $\gamma = 0$ ), наиболее эффективно работающие моды (гармоники), что позволяет построить эпюры распределения полей внутри ограниченной области.

Решения дисперсионных уравнений ЭМВ в ограниченной области сводится к использованию собственных функций, которые в случае эллиптического цилиндра являются функциями Матье.

При нахождении собственных значений и корней функций Матье итерационными методами существуют определенные трудности, требующие разработки специальных алгоритмов и программ, реализующих эти алгоритмы [86]. Поэтому целесообразно использовать стандартный программный пакет Maple, вычисляющий корни уравнения

Матъе.

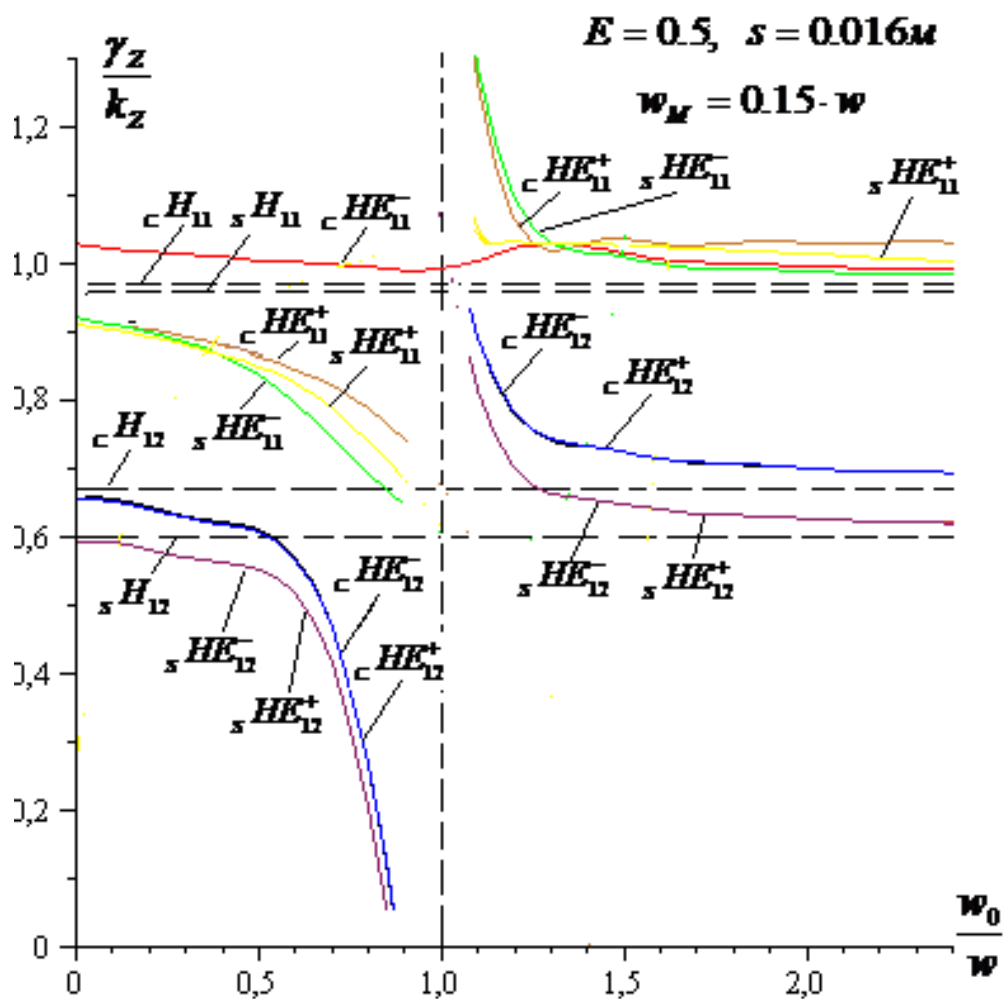
Полученный анализ позволяет спроектировать и разработать методику или САПР ферритового волновода или резонатора, а на их основе и других конструктивных элементов сверхвысокочастотных трактов (направленные ответвители, делители или сумматоры мощности, переходы, согласованные фильтры, циркуляторы, фазовращатели и др.).

Для анализа распространения ЭМВ на основе, полученной в диссертации математической модели, была выбрана регулярная направляющая система с ферритовым заполнением с эллиптической формой поперечного сечения при продольном намагничивании. При этом анализ проводился для различных случаев эксцентриситета эллипса и с разной намагниченностью насыщения феррита. Появление типов волн (мод) зависит от эксцентриситета эллипса, что является особенностью эллиптических волноводов [3], и, таким образом, имеется возможность выбирать режим его работы. Размер направляющей системы выбран так, чтобы при отсутствии внешнего магнитного поля в направляющей системе могли распространяться несколько типов волн.

Так как дисперсионные уравнения (3.75) не решаются аналитически, то их анализ проводился численно. Для этого был составлен комплекс программ на основе программного пакета Maple. Полученные результаты позволяют проводить численный анализ дисперсионных уравнений (3.75) для различных сечений ограниченной эллиптической области и степени гиротропии заполнения.

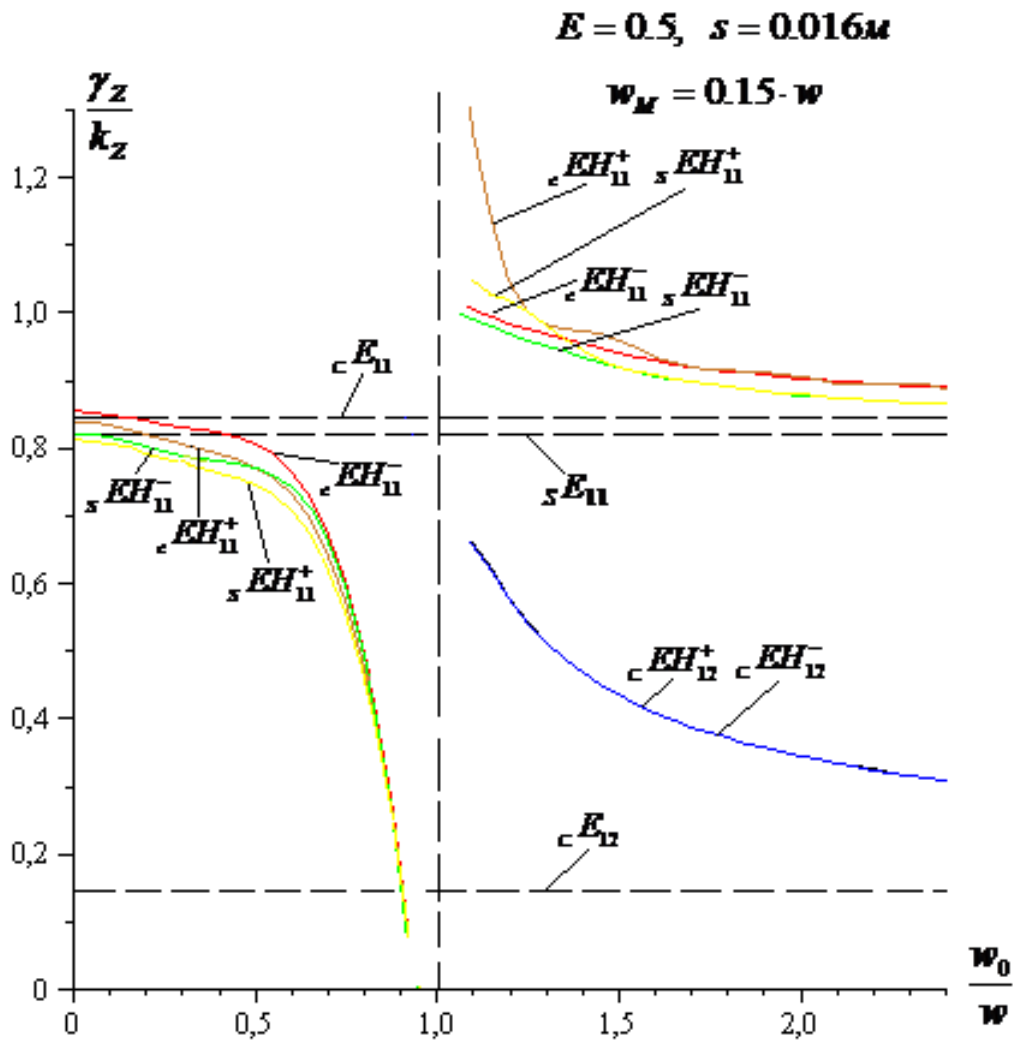
На рисунках 4.5.-4.12. представлены зависимости постоянной распространения от напряженности намагничивающего поля для разных эксцентриситетов эллипса  $E$  и частоты  $\omega_m$ , связанной с намагниченностью феррита [88].





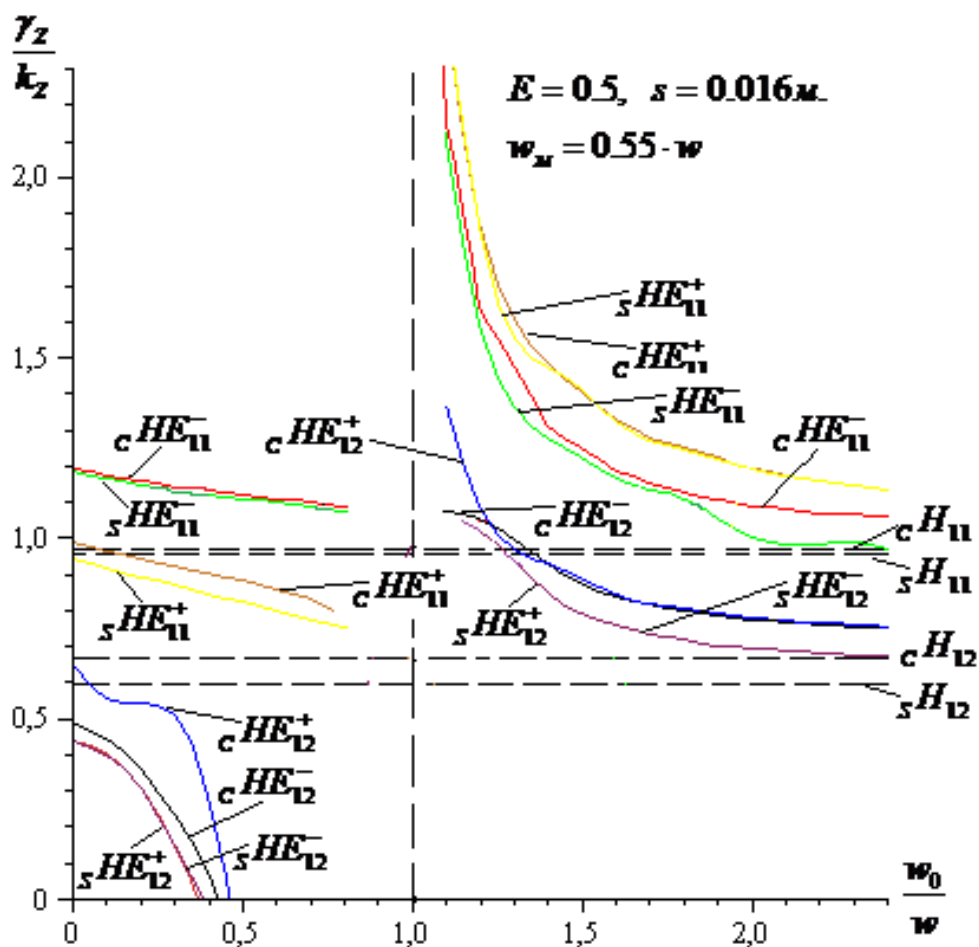
Е-эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $w_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $w_0$  - частота ФМР,  $w = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной немагнитной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  ${}_c H_{11}, {}_s H_{11}, {}_c H_{12}, {}_s H_{12}$ .

Рисунок – 4.5. Зависимость постоянной распространения HE- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.5$  и  $w_m = 0.15w$



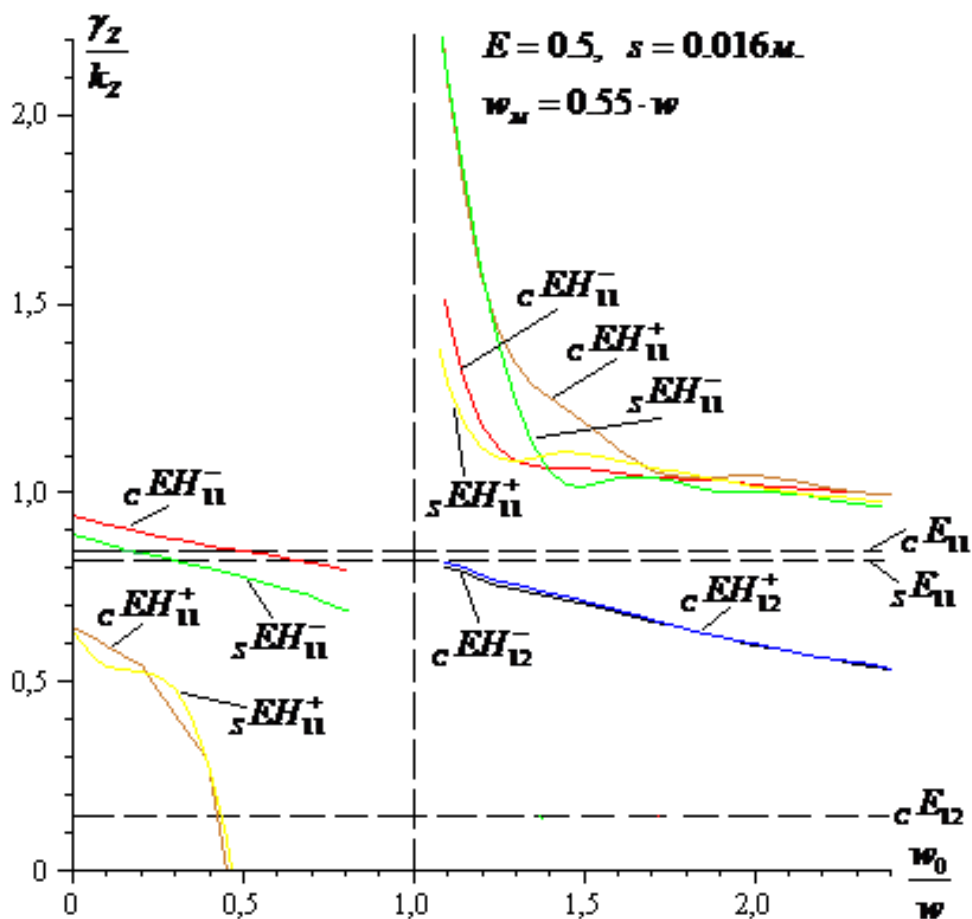
$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $w_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $w_0$  - частота ФМР,  $w = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной ненамагниченной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  ${}_c E_{11}, {}_s E_{11}, {}_c E_{12}$ .

Рисунок – 4.6. Зависимость постоянной распространения EH- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.5$  и  $w_m = 0.15w$



$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $\omega_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $\omega_0$  - частота ФМР,  $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной немагнитной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $cH_{11}, sH_{11}, cH_{12}, sH_{12}$ .

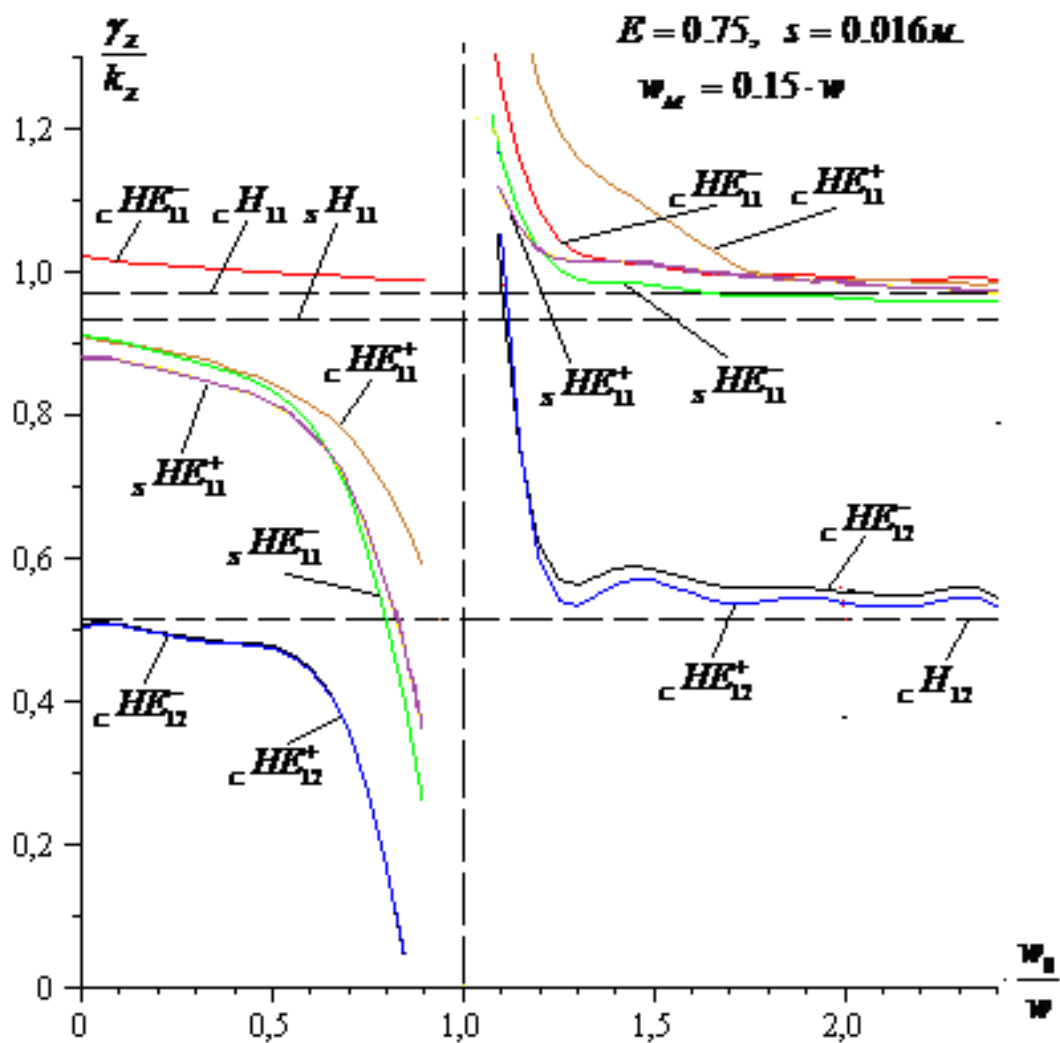
Рисунок – 4.7. Зависимость постоянной распространения HE- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.5$  и  $\omega_m = 0.55\omega$



$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $\omega_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $\omega_0$  - частота ФМР,  $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной ненамагниченной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:

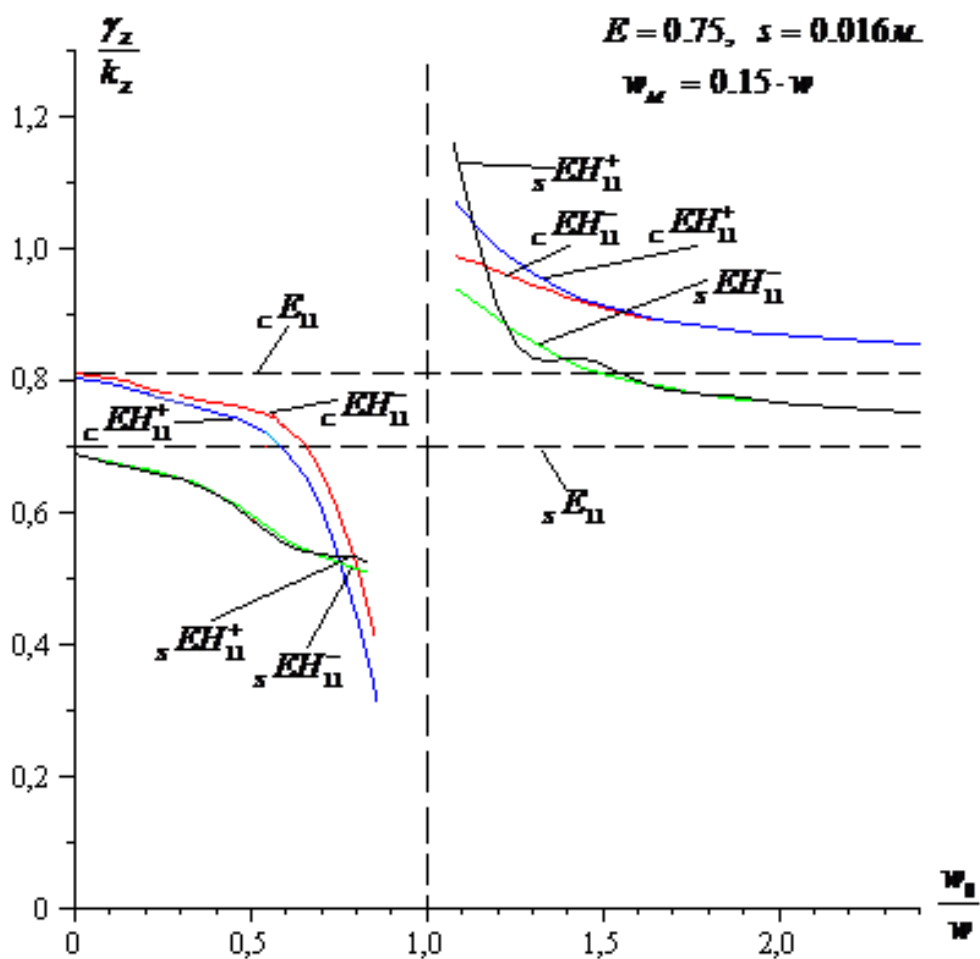
$$cE_{11}, sE_{11}, cE_{12}.$$

Рисунок – 4.8. Зависимость постоянной распространения EH- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.5$  и  $\omega_m = 0.55\omega$



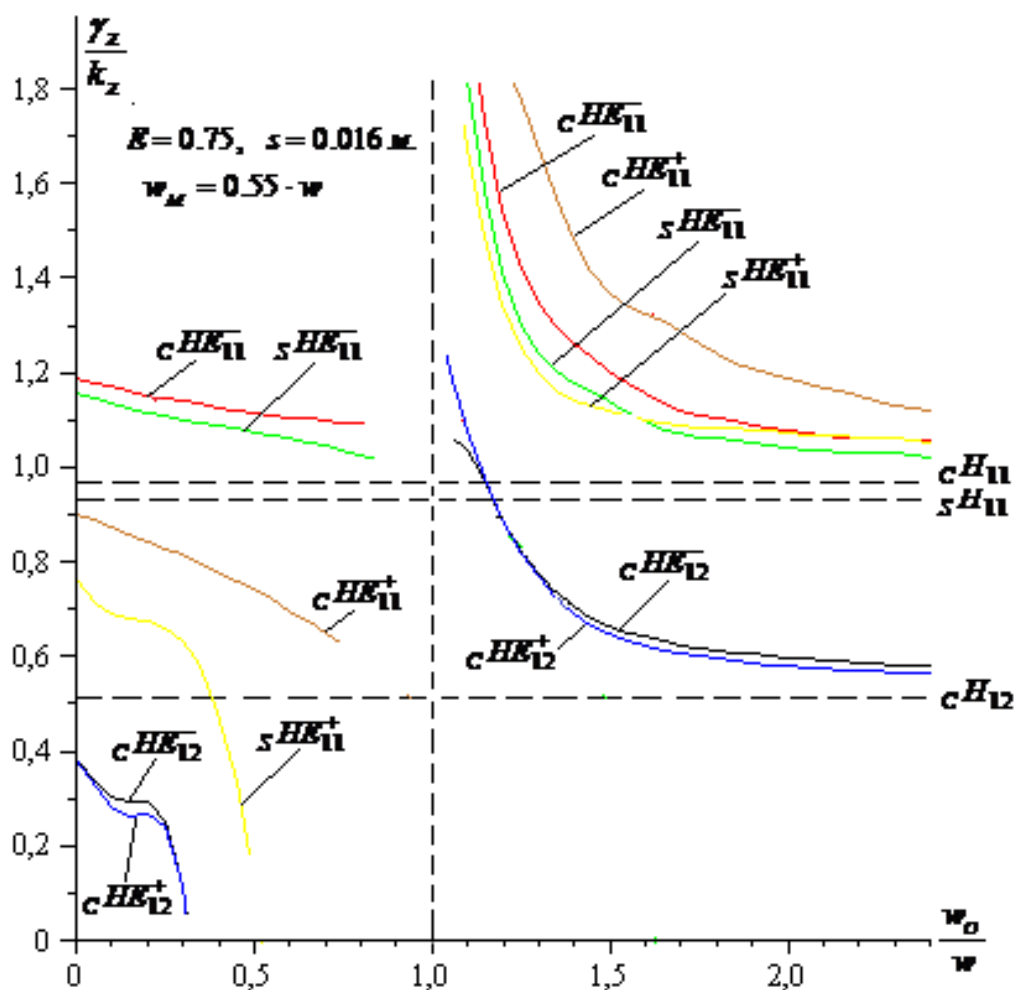
$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $\omega_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $\omega_0$  - частота ФМР,  $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной немагнитной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $cH_{11}, sH_{11}, cH_{12}$ .

Рисунок – 4.9. Зависимость постоянной распространения HE- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.75$  и  $\omega_m = 0.15\omega$



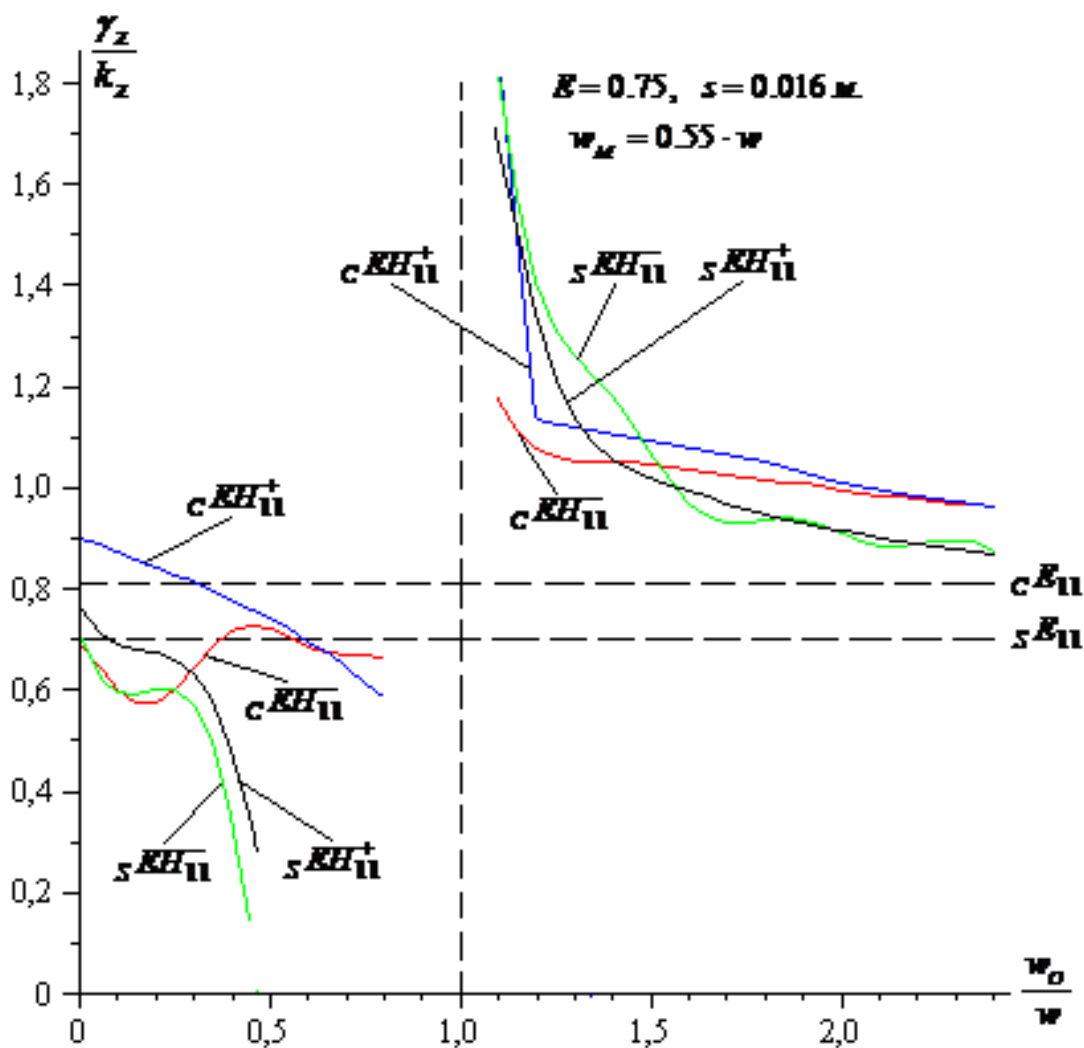
$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $w_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $w_0$  - частота ФМР,  $w = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной немагнитной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  ${}_c E_{11}, {}_s E_{11}$ .

Рисунок – 4.10. Зависимость постоянной распространения ЕН- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.75$  и  $w_m = 0.15w$



$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $\omega_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $\omega_0$  - частота ФМР,  $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной ненамагниченной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $cH_{11}$ ,  $sH_{11}$ ,  $cH_{12}$ .

Рисунок – 4.11. Зависимость постоянной распространения HE- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.75$  и  $\omega_m = 0.55\omega$



$E$ -эксцентриситет,  $s$ -большая полуось эллипса,  $\omega_m$  - частота, связанная с намагниченностью феррита,  $\omega_0$  - частота ФМР,  $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$  Гц,  $\gamma_z$  - постоянная распространения, вычисляемая по формуле (3.87),  $k_z$  - волновое число в безграничной ненамагниченной ферритовой среде. Горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $cE_{11}, sE_{11}$ .

Рисунок – 4.12. Зависимость постоянной распространения EH- волн от напряженности намагничивающего поля при  $E=0.75$  и  $\omega_m = 0.55\omega$

Анализ полученных результатов показывает, что появление мод зависит от эксцентриситета эллипса  $E$ , а также от намагниченности феррита  $\omega_m$ . На практике обычно подбирают частоту  $\omega$  таким образом, чтобы при отсутствии намагничивающего поля существовало желаемое число мод. Достаточно часто выбирают такую частоту, чтобы в направляющей системе существовала только основная мода, которая существует в данной направляющей системе при наименьшей частоте.



Зафиксировав частоту  $\omega$  изменяют в разумных пределах напряженность намагничивающего поля  $H_0$  по заранее определенному алгоритму.

При определенной напряженности продольного внешнего постоянного намагничивающего магнитного поля  $H_0$  наступает ферромагнитный резонанс, заключающийся в резонансном поглощении ферритом (гиротропной средой) энергии электромагнитного поля. Данное явление возникает при  $\omega = \omega_0$ , где:

$$\omega_0 = \mu_0 \cdot \Upsilon \cdot H_0, \quad (4.41)$$

где  $\omega$  - частота распространяющейся электромагнитной волны;  $\mu_0 = 12.56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  -

магнитная постоянная,  $\Upsilon = 1.76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кГ}}$  - гиромангнитное отношения для спина электрона.

При очень больших значениях напряженности внешнего намагничивающего поля  $H_0$  постоянные распространения разных типов волн (мод) стремятся к постоянным распространения соответствующих типов волн для изотропного случая [2].

Анализ полученных графиков показывает, что с увеличением эксцентриситета эллипса и намагниченности феррита увеличивается разность фаз для мод с левым и правым вращением (например, для мод  ${}_c HE_{11}^+$  и  ${}_c HE_{11}^-$ ) для одного и того же значения намагниченности постоянного внешнего магнитного поля  $H_0$  и намагниченности феррита  $M_0$ . Особенно это заметно в области слабых внешних полей  $H_0$ , когда выполняется условие  $\frac{\omega_0}{\omega} < 1$ , т.е. в области изменения частоты, предшествующий резонансу. Это является важным практическим преимуществом гиротропных эллиптических направляющих систем перед круглыми, т.к. при одних и тех же внешних параметрах возможно получение более значительных фазовых набегов, что позволит разработать эффективные фазовращатели. Подбирая эллиптичность при одном и том же значении боль-

шой оси эллипса, можно подбирать в разумных пределах диапазон набегов фаз в фазовращателях.

В области изменения частоты, следующей за резонансом, т.е. когда выполняется условие  $\frac{\omega_0}{\omega} > 1$ , разность фаз для мод с левым и правым вращением менее заметна для разных эксцентриситетов.

Для примера рассчитаем угол поворота плоскости поляризации на каждые 1 см. для круглой ограниченной области с радиусом  $r=1,6$  см. и двух эллиптически ограниченных областей с длиной большой полуоси, равным 1,6 см. и  $E_1=0.5$  и  $E_2=0.75$ . Характеристики феррита и ЭМВ следующие: частота ЭМВ  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$  Гц, намагниченность феррита  $\frac{\omega_M}{\omega} = 0.15$ , относительная диэлектрическая проницаемость феррита  $\varepsilon = 5$ , намагниченность внешнего постоянного магнитного поля  $\frac{\omega_0}{\omega} = 0.2$ .

Угол поворота плоскости поляризации вычислим по известной формуле:

$$\phi = \frac{\gamma_z^- - \gamma_z^+}{2} \cdot l, \quad (4.42)$$

где  $\gamma_z^-, \gamma_z^+$  - постоянные распространения левого и правого вращений определенной моды,  $l$  - длина ограниченной области.

Так как обычно стремятся к одномодовому режиму, рассмотрим моду  $HE_{11}$  для круглой области и  ${}_c HE_{11}$  - для эллиптической.

На всех графиках (рис. 4.3-4.12) по оси X отложена нормированная постоянная распространения  $\frac{\gamma_z}{k_z}$ ,

$$\text{где } k_z = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0} = 2\pi \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{8.85 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 12.56 \cdot 10^{-7}} = 468,178 \text{ м}^{-1}. \quad (4.43)$$

Значение  $k_z$  одинаково для всех случаев.

Используя графики на рис. 4.3, 4.5, 4.9, получаем следующие углы поворота плоскости поляризации на каждые 1 см. ( $l=0.01\text{м.}$ ):

$$\phi_1 = \frac{\gamma_z^- - \gamma_z^+}{2} \cdot l = \frac{1.021 - 0.910}{2} \cdot 468.178 \cdot 0.01 = 0.2598 \text{ рад.} = 14.89^\circ - \text{ для круга,}$$

$$\phi_2 = \frac{\gamma_z^- - \gamma_z^+}{2} \cdot l = \frac{1.018 - 0.904}{2} \cdot 468.178 \cdot 0.01 = 0.2667 \text{ рад.} = 15.29^\circ - \text{ для эллиптической}$$

области с эксцентриситетом  $E=0.5$ ,

$$\phi_3 = \frac{\gamma_z^- - \gamma_z^+}{2} \cdot l = \frac{1.010 - 0.892}{2} \cdot 468.178 \cdot 0.01 = 0.2762 \text{ рад.} = 15.83^\circ - \text{ для эллиптической}$$

области с эксцентриситетом  $E=0.75$ .

Возьмем намагниченность феррита  $\frac{w_M}{w} = 0.55$  для тех же двух эллипсов с теми же параметрами. Используя графики на рис. 4.7. и 4.11. получим следующие углы поворота плоскости поляризации на каждые 1 см. ( $l=0.01\text{м.}$ ):

$$\phi_4 = \frac{\gamma_z^- - \gamma_z^+}{2} \cdot l = \frac{1.161 - 0.555}{2} \cdot 468.178 \cdot 0.01 = 1.4186 \text{ рад.} = 81.3^\circ - \text{ для круга,}$$

$$\phi_5 = \frac{\gamma_z^- - \gamma_z^+}{2} \cdot l = \frac{1.158 - 0.543}{2} \cdot 468.178 \cdot 0.01 = 1.4396 \text{ рад.} = 82,5^\circ - \text{ для эллиптической}$$

области с эксцентриситетом  $E=0.5$ ,

$$\phi_6 = \frac{\gamma_z^- - \gamma_z^+}{2} \cdot l = \frac{1.154 - 0.515}{2} \cdot 468.178 \cdot 0.01 = 1.4959 \text{ рад} = 85,8^\circ - \text{ для эллиптической}$$

области с эксцентриситетом  $E=0.75$ .

Из полученных результатов видно, что при увеличении намагниченности феррита  $\frac{w_M}{w}$  углы поворота плоскости поляризации становятся существенно для эллиптических ограниченных областей с разными эксцентриситетами.

В главе были продемонстрированы некоторые возможности МИП, а полученные на его основе волновые и дисперсионные уравнения для ограниченной гиротропной

эллиптической области при продольном намагничивании могут быть использованы при разработке практических приложений.

Отметим, что в этой главе приведены результаты решения дисперсионного уравнения для ограниченной гиротропной эллиптической области при  $\varphi=45^0$ , а решения для других значений  $\varphi$  предмет будущих исследований.

### 4.3. Выводы по главе

1. Корректность, полученных уравнений Гельмгольца для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании, проведена путем предельных переходов к известным уравнениям Гельмгольца для круглой гиротропной области;

2. Проведена проверка корректности составляющих ЭМП для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании путем предельных переходов к составляющим ЭМП для изотропной эллиптической области;

3. Проверка корректности дисперсионных уравнений для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании проведена путем предельных переходов к дисперсионным уравнениям для круглой гиротропной области;

4. Построены графики зависимостей постоянных распространения от напряженности намагничивающего поля для различных эксцентриситетов эллипса и намагниченности феррита.

5. Проведено сравнение фазовых набегов для круглого и эллиптического волноводов с разными эксцентриситетами (длина большой оси эллипса равна радиусу круга)

для разных намагниченностей ферритов при намагниченности  $\frac{w_0}{w} = 0.2$ . Показано, что

в случае эллиптических волноводов набег фазы больше, чем у круглых, что является несомненным достоинством первых.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов диссертации приведем следующие основные:

1. Разработан метод инвариантных преобразований (МИП), с помощью которого получены общее решение системы дифференциальных уравнений Максвелла – обобщенные уравнения Гельмгольца гибридных волн в гиротропной продольно-намагниченной ограниченной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения. Отличительной особенностью МИП является его свойство инвариантности относительно преобразования системы координат. На основе МИП, опирающегося на анализе конических сечений и на аппарате тензорного исчисления, получена обобщенная модель распространения электромагнитных волн в ограниченных гиротропных областях с произвольной ортогональной формой поперечного сечения. Из обобщенной модели распространения ЭМВ при различных коэффициентах Ламэ и символов Кристоффеля легко определяются частные модели распространения ЭМВ ограниченной области: прямоугольной, круглой, эллиптической. МИП также может быть применен для анализа распространения ЭМВ в открытых направляющих системах с намагниченной тензорной средой.

2. Разработана математическая модель электромагнитных волн для ограниченной гиротропной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании: уравнения Гельмгольца, полученные на основе МИП; поперечные компоненты электромагнитных волн при произвольном намагничивании; граничные условия для различных случаев намагничивания. Разработанная в таком виде математическая модель позволяет моделировать общие закономерности распространения ЭМВ в любой ограниченной области с произвольной ортогональной формой поперечного сечения при различных случаях намагничивания.

3. Впервые сформулированы и решены краевые задачи для уравнений Гельмгольца электромагнитного поля для ограниченной гиротропной эллиптической области при

продольном намагничивании. Для решения краевых задач применены методы укорочения исходного дифференциального уравнения и разделения переменных. Показано, что в отличие от изотропного заполнения, уравнение Гельмгольца для каждого типа волны имеет два решения, связанные с гиротропностью среды.

4. Впервые получены дисперсионные уравнения электромагнитных волн для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании. Показано, что при распространении в гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании ЭМВ разделяются на четные и нечетные волны с левым и правым вращениями, распространяющиеся с разными скоростями.

5. С использованием полученных дисперсионных уравнений численно получены зависимости постоянной распространения от напряженности намагничивающего поля для разных эксцентриситетов эллипса и для разных значений намагниченности феррита. Показано, что существование и скорость распространения различных типов волн зависят не только от поперечных геометрических размеров направляющих систем, как в изотропном случае, а также от напряженности внешнего намагничивающего поля и намагниченности ферритового заполнения.

6. Полученные зависимости могут быть применены для разработки различных приборов сверхвысоких частот на основе гиротропных эллиптических направляющих систем при продольном намагничивании.

### Список литературы

1. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферромагнетики. Пер. с англ. М.: Мир, 1965.- 676 с.
2. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах.- Л.:Госэнергоиздат, 1963.- 664 с.
3. Ефимов И.Е., Шермина Г.А. Волноводные линии передачи. М.: Связь, 1979. – 232 с.
4. Сул Г., Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. Пер. с англ. 1955. - 192 с.
5. Гуревич А. Г. , Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны.- М.: Физматлит, 1994. – 464 с.
6. Вамберский М.В., Абрамов В.П., Казанцев В.И. Конструирование ферритовых развязывающих приборов СВЧ / Под ред. М.В. Вамберского. – М.: Радио и связь, 1982. – 136 с.
7. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск.: Наука и техника, 1976 - 456 с.
8. Курушин Е.П., Нефедов Е.И. Электродинамика анизотропных волноведущих структур. М.: Наука, 1983.- 224 с.
9. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передач и резонаторов сверх- и крайневых частот.-М.: Педагогика-Пресс, 1998.- 328с.:ил.
10. Назаров А.В., Раевский С.Б. Электромагнитные волны в структурах, содержащих продольно намагниченные ферритовые слои // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2007. Т.10. №1. С. 76-82.
11. Денисенко А.А., Назаров А.В., Пилипосян С.Е. Об особенностях эффекта Фарадея в экранированных волноводах с продольно намагниченным ферритовым слоем //

Физика волновых процессов и радиотехнические системы – 2010. – Т.13, № 2.С. 42-45.

12. Plonis D., Malisauskas V., Serackis A. Semi-automatic analysis of gyrotropic semiconductor waveguides using neural network // Acta Physica Polonica A. Vol. 119, № 4 (2011), p. 542-547.
13. Beeckman Jeroen, James R., Fernandez F.A., De Cort W., Vanbrabant Pieter J.M. , Neyts Kristiaan. Calculation of Fully Anisotropic Liquid Crystal Waveguide Modes // Journal of Lightwave Technology. Vol. 27, № 17, p.p. 3812-3819 (2009).
14. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложение функций Матье. Пер. с англ. В.А. Братановского. М.: Изд. иностранной литературы, 1953.- 475 с.
15. Гольдштейн Л.Д. Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. Изд. 2-е, перераб. и дополненное. М. Изд-во «Советское радио», 1971, 664 с.
16. Гончаренко А.М., Карпенко В.А. Основы теории оптических волноводов. Минск: Наука и техника, 1983.
17. Гончаренко А.М., Карпенко В.А. Основы теории оптических волноводов. Изд. 2-е, испр.- М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
18. Левин Л. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач: Пер. с англ./Под ред. В.И. Вольмана.- М.: Радио и связь, 1981.- 312 с.
19. Кривенков В.И. Анизотропный эллиптический световод. Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2004. С. 21-24.
20. Komarov V., Yakovlev V. Cad of efficient TM single mode elliptical applicators with coaxial excitation // Journal of microwave power & electromagnetic energy. 2007. Vol. 40, №3. P. 174-185.



21. Расчет гофрированных и частично заполненных волноводов / Ю.А. Иларионов, С.Б. Раевский, В.Я. Сморгонский; Под ред. Проф. В.Я. Сморгонского. М.: Сов. Радио, 1980.- 200 с.
22. Раевский С.Б., Седаков А.Ю., Титаренко А.А. Метод электродинамического расчета прямоугольных закрытых волноводов с произвольным анизотропным заполнением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т.15. №3. С. 14-21.
23. Бударагин Р.В., Радионов А.А. Метод расчета волноводов со сложным поперечным сечением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т.13. №3. С. 23-25.
24. Кутищев С.Н., Михайлов Г.Д., Преображенский А.П. Моделирование рассеяния электромагнитных волн на полостях эллиптического поперечного сечения // Известия вузов. Радиофизика. 2000. Т. XLIII, №5. С. 426-432.
25. Буторин В.М. Исследование устойчивости метода коллокаций на примере расчета эллиптического волновода // Известия Юго-Западного государственного университета. 2011. № 5-1 (38). С. 34-37.
26. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Двусторонние оценки азимутальных чисел, ассоциированных с элементарными волновыми функциями эллиптического цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 68-81.
27. Радаев Ю.Н., Таранова М.В. Об уточнении локализации азимутальных чисел Матье с помощью овалов Кассини // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. №1(30). С. 260-269.

28. Mei Z.L., Xu F.Y.J. A simple, fast and accurate method for calculating cutoff wavelengths for the dominant mode and elliptical waveguide. *Electromagnetic Waves and Appl.* 2007. V.21 .№3. P. 367-374.
29. Sheng- Li Lin, Le-Wei Li, Tat- Soon Yeo, and Mook-Seng Leong. Analysis of Hollow Conducting Waveguides Using Superquadric Function- A Unified Reperesantation // *IEEE transactions on microwave theory and techniques.* 2000.V.48. №5. P.876-880.
30. Shen-jie Zhang, Yao-chun Shen. Eigenmode Sequence for an Elliptical Waveguide with Arbitrary Ellipticity. *IEEE transactions on microwave theory and techniques.* 1995.V.43. №1. P.227-230
31. David A. Goldberg, L. Jackson Laslett, and Robert A. Rimmer. Modes of Elliptical Waveguides: A Correction. *IEEE transactions on microwave theory and techniques.* 1990.V.38. №11. P.1603-1607.
32. Sen Li and Bai-Suo Wang. Field Expressions and Patterns in Elliptical Waveguide. *IEEE transactions on microwave theory and techniques.* 2000.V.48. №1. P.864-867.
33. Sheng-Li Lin, Le-Wei Li, Tat-Soon Yeo, and Mook-Seng Leong. Analysis of Hollow Conducting Waveguides Using Superquadric Functions—A Unified Representation. *IEEE transactions on microwave theory and techniques.* 2000.V.48. №1. P.876-880.
34. Benito Gimeno and Marco Guglielmi. Full Wave Network Representation for Rectangular, Circular, and Elliptical to Elliptical Waveguide Junctions. *IEEE transactions on microwave theory and techniques.* 1997.V.45. №3. P.376-384.
35. Dyott R.B. Cut-off of the higher order modes in elliptical dielectric waveguides: an experimental approach. *Electronic letters.* 1990. V.26.№26. P. 1721-1723.
36. Bernice M.Dillon, Andrew A. P. Gibson, and Jon P. Webb. Cut-off and Phase Constants of Partially Filled Axially Magnetized, Gyromagnetic Waveguides Using Finite Elements. *IEEE transactions on microwave theory and techniques.* 1993.V.41. №5. P.803-807.

37. A. C. Perdikouris, D. P. Chrissoulidis, *Member, IEEE*, and E. E. Kriezis, *Senior Member, IEEE*. EM-Wave Propagation Through Semi-Elliptic Cylindrical Dielectric Waveguide on a Perfectly Conductive Planar Substrate. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*. 1994.V.42. №5. P.891-897.
38. Charles R. Boyd. Microwave Phase Shift Using Ferrite-Filled Waveguide Below Cutoff. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*. 1997.V.45. №12. P.2402-2407.
39. S. P. Yeo. Dielectric-loaded elliptical waveguide. *Electronic letters*. 1991. V.26.№27. P. 2185-2187.
40. Microwave phase shift using ferrite-filled waveguides below cutoff / Boyd Ch.R.(Jr)//*IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*.-1997.-Vol. 45, №12, Pt 2.- P.2402-2405.
41. Computation of the modes of elliptic waveguides with a curvilinear 2D frequency-domain finite-difference approach / A. Fanti, G. Mazzarella, G. Montisci, and G. A. Casula // *Progress In Electromagnetics Research M*.-2012, Vol. 26, P. 69-84.
42. Mode-matching analysis of a waveguide junction formed by a circular and a larger elliptic waveguide / Chan K.L., Judah S.R. // *IEE Proceedings - Microwaves, Antennas and Propagation*.- 1998. Vol 145, №1.- P 123-127.
43. Elliptical waveguides analysis using improved polynomial approximation / Wang B. K., Lam K. Y., Leong, M. S., Kooi, P. S. // *IEE Proceedings-Microwaves, Antennas and Propagation*. - 1994.Vol. 141, №6.- P. 483-488.
44. Propagation characteristics of confocal elliptical coaxial lines filled with multilayered media / Tianxin Xiong, Rugui Yang // *Progress In Electromagnetics Research Symposium*.- 2005. P.147-150.
45. Analysis of elliptical waveguides by the method of fundamental solution / D. L. Young, S. P. Hu, C. W. Chen, C. M. Fan, K. Murugesan // *Microwave and optical technology letters*.- 2005. Vol. 44, № 6. P.552-558.

46. Frotanpour A., Dadashzadeh G., Shahabadi M. Gimeno B. Analysis of multifactor RF breakdown thresholds in elliptical waveguides // IEEE Transactions on electron devises. 2011. Vol. 58, № 3. P. 876-881.
47. Hassan A. Ragheb. Cutoff wavenumber of an elliptical waveguide partially filled partially filled with nonconfocal dielectric // The Arabian Journal for Science and Engineering. 2004. Volume 29, Number 1B. P. 49-64.
48. А.Анго. Математика для электро- и радиоинженеров.М:Изд. «Наука»,1967.- 780 с.
49. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство) // М.: Физматгиз, 1960.
50. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия // М.: Наука, 1968.
51. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия // М.: Наука, 1971.
52. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы // М.: Наука, 1972.
53. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления // М.: М., Наука, 1965-424 с..
54. Аквис М., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление // М.: Наука, 1969.
55. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике // М.: Наука, 1973, 831 с.
56. Векуа Н.Н. Основы тензорного анализа и теории инвариантов // М.: Наука, 1973.
57. Коренев Г.В. Тензорное исчисление // Москва, 2000, 240 с.
58. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн.- М.: Радио и связь, 1988.- 440 с.
59. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. -М.: Наука, 1973.-607 с.
60. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Волновые уравнения электромагнитных волн в ограниченных областях с ферритовым заполнением с ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании // Вестник Восточно-

Сибирского государственного университета технологий и управления. 2012. № 3(38). С. 5-10.

61. Базаров Б.Б. Обобщенная модель гиротропных волноводов. Сборник научных трудов. Серия: Технические науки/ ВСГТУ.- Улан-Удэ, 1997.-Вып.5- Т.1-с. 192-204.
62. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Метод инвариантных преобразований и его применение // Материалы VI международного научного семинара «Обобщенные постановки и решения задач управления». Геленджик, Краснодарский край, 25-27 сентября 2012. С.140-144.
63. Виприцкий Д.Д. Открытые и экранированные направляющие структуры с продольно намагниченными ферритовыми слоями// Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Нижегородский государственный технический университет - Нижний-Новгород, 2007.-177с.
64. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Метод инвариантных преобразований для определения поперечных компонент электромагнитного поля в гиротропных ограниченных областях // Вестник Бурятского государственного университета. 2012. Выпуск 9: Математика, информатика. С.162-166.
65. Базаров Б.Б., Итигилов Г.Б. Теория регулярных волноводов с гиротропным заполнением // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. Москва, 2001, т.9, № 4 (32)., с. 5-12.
66. Базаров Б.Б. Теория изотропных волноводов // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. Москва, 2001, т.9, № 2 (30)., с. 25-28.
67. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Граничные условия гиротропного обобщенного волновода // Материалы V Всероссийской научно-практической конференции «Теоретические и прикладные вопросы современных информационных технологий». Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ. 2004. С. 72-76.

68. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1977.- 736 с.
69. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения.- Новосибирск: Научная книга, 1998.- 280 с.
70. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.-408с.
71. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 512 с.
72. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. Пер. с англ. Кузнецова Ю.А. и Мацокина А.М. под ред. Марчука Г.И. М.: Мир. 1977- 384 с.
73. Араманович И.Г., В.И. Левин. Уравнения математической физики. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 288 с.
74. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики: монография / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009. – 268 с.
75. Марков Г.Т., Васильев Е.Н. Математические методы прикладной электродинамики. Изд. «Советское радио», 1970.-120 с.
76. Годунов С.К. Уравнения математической физики. Изд. 2-е, исправл. и дополн. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979.- 392 с.
77. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Изд. 3-е. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». 1977- 640 с.
78. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. М.: Наука. 1966.- 443 с.
79. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. 2-е изд., перераб. и дополн. М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1982.- 336 с.

80. Г. Бейтмен, А Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические а аморфные функции. Функции Ламэ и Матье. Перевод с англ. Н.Я. Вилекнккина. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. М.1967. – 300 с.
81. Э.Т. Уиттекер, Дж. Ватсон. Курс современного анализа. Ч.2. Трансцендентные функции. Перевод с англ. Ф.В. Широкова. Государственное издательство физико-математической литературы. М. 1963.- 515 с.
82. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш., Батуев Е.Д. «Решение краевых задач гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании» // Материалы XIV Международной научно-практической конференции «Теория и практика современной науки». 2-3 июля 2014 г. Москва. С. 12-18.
83. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Дисперсионные характеристики гибридных волн в ограниченных эллиптических гиротропных областях при продольном намагничивании // Вестник Бурятского государственного университета. 2/2013. Математика и информатика. С. 70-74.
84. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. «Дисперсионные характеристики гибридных волн в ограниченных эллиптических гиротропных областях при продольном намагничивании» // «Вестник Бурятского государственного университета» , 2013. №2. Математика и информатика. С. 70-74.
85. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш., Сажин В.И. «Вырождение эллиптического волновода в круглый» // Вестник Бурятского государственного университета. 2010. Выпуск 9: Математика и информатика. С. 154-160.
86. Итигилов Г.Б., Сажин В. И., Ширапов Д. Ш. Эффективный метод расчета критических длин волн собственных мод эллиптического волновода // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Научный журнал.

- №4 (24). 2009. Изд-во Иркутского государственного университета путей сообщения. С. 159-163.
87. Головченко, Г.С. Гибкие эллиптические волноводы. М.: Связь, 1979- 48 с.
88. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. «Краевые задачи в гиротропных ограниченных областях при продольном намагничивании» // Материалы V Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование. 23-28 июня 2014 г. Улан-Удэ. С.137-141.
89. Базаров Б.Б., Итигилов Г.Б., Баторова А.В. Модель распространения электромагнитных волн в волноводах с криволинейной формой поперечного сечения // Сборник научных трудов. Серия: Технические науки. ВСГТУ.-Улан-Удэ, 2000.- Вып.8.-Т.2, с. 133-143.
90. Базаров Б.Б., Итигилов Г.Б., Ким Ю.А. Анализ эллиптического волновода с гиротропным заполнением при продольном подмагничивании // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. Москва, 2001, т.9, № 2 (30)., с. 29-33.
91. Итигилов Г.Б., Сажин В.И., Ширапов Д.Ш. Решения дисперсионных уравнений эллиптического волновода с ферритовым заполнением при продольном подмагничивании // Оптика атмосферы и океана. 2007. Т.20. №12. С. 1147-1149.
92. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш., Базарова С.Б.-М. Уравнения Гельмгольца электромагнитных волн в гиротропных ограниченных областях при продольном намагничивании. // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 31 мая 2014 г.: Часть 3. Тамбов, 2014. С. 53-58
93. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш., Ябжанова С.Б. «Применение метода инвариантных преобразований в исследовании распространения электромагнитных волн» // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Фундамен-



- тальные и прикладные исследования в современном мире». 17 июня 2014 г. Т.1. С-Петербург. С. 51-58
94. Базаров Б.Б. Анализ прямоугольного гиротропного волновода с ЕН- волной // Электродинамика и техника СВЧ и КВЧ.- 1996. №2.- С. 96-97.
95. Базаров Б.Б., Итигилов Г.Б. Распространение ЭМВ в эллиптическом волноводе с ферритовым заполнением при продольном подмагничивании // Материалы международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование». Ч.1.- Улан-Удэ, 2002.- 292 с. (С. 41-45).
96. Итигилов Г.Б., Сажин В.И., Ширапов Д.Ш. Модель распространения электромагнитных волн в направляющих гиротропных структурах с эллиптической формой поперечного сечения при продольном подмагничивании // Труды международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии». Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ. 2009. С. 197-205.
97. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш. Метод инвариантных преобразований. International journal of applied and fundamental research. №7. 2012. С. 94-97.
98. Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш., Сажин В.И. Общие уравнения распространения электромагнитных волн в ограниченном пространстве // Вестник Восточно-Сибирского государственного технологического университета. 2011. № 4(35). С. 5-11.
99. Неганов В.А., Павловская Э.А., Яровой Г.П. Излучение и дифракция электромагнитных волн / Под ред. В.А. Неганова. М.: Радио и связь, 2004. – 264 с.
100. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). Перевод с 6-го переработанного немецкого издания под ред. Л.И. Седова. М.:Наука, 1964. – 344 с.
101. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1967.- 664 с.

102. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1970.- 492 с.
103. Вамберский М.В., Абрамов В.П., Казанцев В.И. Конструирование ферритовых развязывающих приборов СВЧ / Под ред. М.В. Вамберского.- М.: Радио и связь, 1982. – 132 с.
104. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. Изд. 2-е, испр. и дополн. М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. – 320 с.