МНОГОМЕРНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В пособии изложены необходимые теоретические сведения из линейной алгебры и многомерной геометрии, базовые примеры с подробными решениями и задачи для самостоятельного решения.

Б.В. Заятуев

Введение

В данном пособии изложены необходимые теоретические сведения из линейной алгебры и многомерной геометрии, приведены базовые примеры с подробными решениями и задачи для самостоятельного решения. Как показывает практика, именно эта тема часто вызывает затруднение у студентов. Это пособие как раз преследует цель усвоение знаний и развитие навыков решения задач по разделу многомерной геометрии в ходе самостоятельной подготовки к лекциям и практическим занятиям и непосредственно на самих практических занятиях.

Тематика пособия является актуальной, так как n-мерная геометрия обеспечивает необходимую фундаментальную подготовку студентов для овладения основных идей и методов современной математики.

1. ВЕКТОРНОЕ n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение 1. Непустое множество V называется (абстрактным) <u>векторным пространством</u> над полем действительных чисел **R**, если на нем определены операция сложения «+»:$V\times V\to V$ и операция умножения на число «»: $\mathbf{R}\times V\to V$, удовлетворяющие следующим условиям (*аксиомам векторного пространства*):

I. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из V

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

II. Для любых векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ из V

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c});$$

III. Существует вектор $\vec{0}$ (*нуль-вектор*) такой, что для любого вектора $\vec{a}$

$$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a};$$

IV. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует вектор $(-\vec{a})$ (*противоположный вектор*) такой, что

$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0};$$

V. Для любого вектора $\vec{a}$

$$1\vec{a}=\vec{a};$$

VI. Для любых действительных чисел α, β и любого вектора $\vec{a}$

$$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a};$$

VII. Для любых действительных чисел α, β и любого вектора $\vec{a}$

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a};$$

VIII. Для любого числа α и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$$

Определение 2. Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$ называются <u>линейно зависимыми</u>, если существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и такие, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}. \qquad (1.1)$$

Если равенство (1.1) имеет место *только* при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми.

Определение 3. Упорядоченная система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ называется базисом векторного пространства V, если

1. Система $\{e_i\}$ состоит из линейно независимых векторов;
2. Любой вектор $\vec{x}$ пространства является *линейной комбинацией* векторов данной системы, то есть $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n$.

Число n называется *размерностью* векторного пространства (обозначение $\dim(V) = n$), а упорядоченный набор чисел $(x^i) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называется *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Векторное пространство размерности n обозначается через V^n.

Основные *свойства*:

1°. Если $\vec{x}\,(x^i)$, $\vec{y}(y^i)$, то $(\vec{x} + \vec{y})\,(x^i + y^i)$;

2°. Если $\vec{x}\,(x^i)$, то $(\alpha\vec{x})\,(\alpha\, x^i)$.

Пусть $\{\vec{e}'_i\}$ – другой базис пространства V^n и $\vec{e}'_i = \sum_j A_i^j \vec{e}_j$. Тогда, если вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $\{\vec{e}_i\}$ координаты (x^i), а в базисе $\{\vec{e}'_i\}$ координаты (y^i), то

$$x^i = \sum_j A_j^i y^j \qquad (1.1)$$

Формулы (1.1) называются *формулами преобразования координат вектора*. В матричном виде они примут вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^n & A_2^n & \ldots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \ldots \\ y^n \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Определение 2. Два базиса $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}'_i = \sum_j A_i^j \vec{e}_j\}$ векторного пространства V^n называются <u>одинаково ориентированными</u>, если $\det(A_i^j) > 0$.

Множество всех базисов пространства V^n разбивается на два класса одинаково ориентированных между собой базисов, называемых <u>ориентациями</u>. Векторное пространство V^n с фиксированной ориентацией называется <u>ориентированным</u>. Базис, принадлежащий (не принадлежащий) фиксированной ориентации, называется *правым* (*левым*).

Теорема 1. Если дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$, которые в данном базисе имеют координаты $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, ..., a_1^n)$, $\vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, ..., a_2^n)$, …, $\vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, ..., a_k^n)$, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & ... & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & ... & a_2^n \\ . & . & . & . \\ a_k^1 & a_k^2 & ... & a_k^n \end{pmatrix}$$

равен максимальному числу линейно независимых векторов системы.

Пример 1.

Пусть $\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : где \;\; a_i \in R\}$ – множество, состоящее из упорядоченных наборов из n вещественных чисел. Операции сложения и умножения на число в $\mathbf{R}^n$ определены по законам:

1. $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$;
2. $\lambda(a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$.

Доказать, что множество $\mathbf{R}^n$ образует n-мерное векторное пространство.
($\mathbf{R}^n$ называется n-*мерным арифметическим пространством*).

Решение: Аксиомы I–VIII векторного пространства легко следуют из свойств сложения и умножения вещественных чисел. Так же, как и в Задаче 1, можно показать, что упорядоченная система из n векторов вида {(1,0,…,0), (0,1,0,…,0),…,(0,…,0,1)} линейно независима и любой вектор является линейной комбинацией этих векторов:

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,0,\ldots,0) + \ldots + a_n(0,\ldots,0,1)$.

Базис $\{(1,0,\ldots,0),\ (0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$ называется *стандартным базисом* пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Пример 2.

На множестве всех положительных действительных чисел $\mathbf{R}_+$ введены операции сложения и умножения на действительные числа по законам:

1. $\forall a, b \in \mathbf{R}_+$: $\quad a + b \overset{1.}{=} ab$;
2. $\forall a \in \mathbf{R}_+$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$: $\quad \lambda a \overset{2.}{=} a^{\lambda}$.

Доказать, что это множество является одномерным векторным пространством над полем $\mathbf{R}$.

Решение: Проверим условия I-VIII (аксиомы векторного пространства):

I. $a + b \overset{1.}{=} ab = ba \overset{1.}{=} b + a$, т.е. $a + b = b + a$.

II. $(a+b) + c \overset{1.}{=} (ab)c = a(bc) \overset{1.}{=} a + (b + c)$, т.е. $(a+b) + c = a + (b+c)$.

III. $a + 1 \overset{1.}{=} a1 = a$, т.е. 1 –нулевой вектор в $\boldsymbol{R}_+$.

IV. $a + \frac{1}{a} \overset{1.}{=} a\frac{1}{a} = 1$, т.е. $\frac{1}{a}$ – противоположный a вектор.

V. $1a \overset{2.}{=} a^1 = a$;

VI. $\alpha(\beta a) \overset{2.}{=} (a^{\beta})^{\alpha} = a^{\alpha\beta} \overset{2.}{=} (\alpha\beta)a$;

VII. $(\alpha + \beta)a \overset{2.}{=} a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha}a^{\beta} \overset{1.}{=} a^{\alpha} + a^{\beta} \overset{2.}{=} \alpha a + \beta a$;

VIII. $\alpha(a+b) \overset{1.}{=} \alpha(ab) \overset{2.}{=} (ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha} \overset{1.}{=} a^{\alpha} + b^{\alpha} \overset{2.}{=} \alpha a + \alpha b$.

Покажем, теперь, что любое положительное число $b \neq 1$ является базисом $\mathbf{R}_+$.
Для любого вектора $\forall a \in \boldsymbol{R}_+$ имеем: $a = b^{\log_b a} \overset{2.}{=} (\log_b a)b$, то есть $\{b\}$ – базис $\mathbf{R}_+$.
Значит, пространство $\mathbf{R}_+$ одномерно.

Пример 3.

В V^4 векторы $\vec{e}_1(0,1,1,1)$, $\vec{e}_2(1,0,1,1)$, $\vec{e}_3(1,1,0,1)$, $\vec{e}_4(1,1,1,0)$ и $\vec{x}(3,6,2,4)$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$ сами образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе.

Решение:

1) Определитель матрицы, составленной из координат векторов $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$, отличен от нуля:

$$\det\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=-3\neq 0.$$

Следовательно, согласно Теореме 1, эти векторы линейно независимы и, в силу четырехмерности V^4, они образуют его базис.

2) Найдем координаты вектора $\vec{x}$.

(*1 способ*)

Чтобы найти координаты вектора $\vec{x}$, используем формулу (1.2):

$$\begin{pmatrix}3\\6\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\\y^4\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\\y^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\6\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix},$$

т.е. в новом базисе $\vec{x}(2,-1,3,1)$.

(*2 способ*)

Пусть

$$\vec{x}=\alpha\,\vec{e}_1+\beta\,\vec{e}_2+\gamma\,\vec{e}_3+\delta\,\vec{e}_4.$$

Отсюда

$$\vec{x}(3\,,6\,,2\,,4)=\vec{x}(\beta+\gamma+\delta,\alpha+\gamma+\delta,\alpha+\gamma+\delta,\alpha+\beta+\gamma),$$

то есть

$$\begin{cases} \beta + \gamma + \delta = 3 \\ \alpha + \gamma + \delta = 6 \\ \alpha + \beta + \delta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 4 \end{cases}$$

Решив данную систему линейных уравнений, получим $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, $\delta = 1$, т.е. в новом базисе $\vec{x}(2, -1, 3, 1)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На множестве M(2,**R**) –всех квадратных матриц 2–го порядка над полем вещественных чисел определены операции сложения и умножения на действительные числа по законам:

1. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$,

2. $\lambda \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \lambda a_3 & \lambda a_4 \end{pmatrix}$.

Доказать, что это множество является четырехмерным векторным пространством.

2. Доказать, что все многочлены степени $\leq n$ от одного неизвестного с коэффициентами из поля **R** образуют векторное пространство над **R,** если за операции взять сложение многочленов и умножение многочленов на число. Найти базис и размерность этого пространства.

3. Доказать, что в векторном пространстве M(2,**R**) матриц 2-го порядка векторы

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

4. Найти координаты многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

а) в базисе $\{1, x, \ldots, x^n\}$;

б) в базисе $\{1, x-\alpha, \ldots, (x-\alpha)^n\}$.

5. Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \ldots$, $\vec{e}_n$ и $\vec{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \ldots$, $\vec{e}_n$ сами образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе:

а) $\vec{e}_1(1,1,1)$, $\vec{e}_2(1,1,2)$, $\vec{e}_3(1,2,3)$, $\vec{x}(6,9,14)$;

б) $\vec{e}_1(1,2,-1,-2)$, $\vec{e}_2(2,3,0,1)$, $\vec{e}_3(1,2,1,3)$, $\vec{e}_4(1,3,-1,0)$, $\vec{x}(7,14,-1,2)$.

6. В векторном пространстве V^4 заданы две системы векторов:
$e = \{\vec{e}_1(1,1,1,1), \vec{e}_2(1,2,1,1), \vec{e}_3(1,1,2,1), \vec{e}_4(1,3,2,3)\}$ и $e' = \{\vec{e}'_1(1,0,3,3), \vec{e}'_2(-2,-3,-5,-4), \vec{e}'_3(2,2,5,4)$, $\vec{e}'_4(-2,-3,-4,-4)\}$ в некотором базисе. Показать, что e и e' базисы. Найти формулы преобразования координат вектора при переходе от базиса e к базису e'.

7. Доказать, что если базисы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}'_i$, $\vec{e}'_i$ и $\vec{e}''_i$ одинаково ориентированы, то базисы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}''_i$ также одинаково ориентированы.

2. Подпространство векторного пространства.

Определение 1. Непустое подмножество $W \subset V$ называется <u>подпространством</u> векторного пространства V, если оно есть векторное пространство относительно операции из V.

Теорема 2. (*Критерии подпространства*). Подмножество $W \subset V$ – подпространство пространства V тогда и только тогда, когда

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in W \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in W$;
2. $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall \vec{a} \in W \Rightarrow \lambda \vec{a} \in W$.

Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in V$.

Определение 2. Множество

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k) = \{\vec{a} \in V : \vec{a} = t^1\vec{a}_1 + t^2 a_2 + ... + t^k\vec{a}_k, \text{где } t^i \in R\}$$

есть векторное подпространство *V,* называемое <u>подпространством, натянутым на векторы</u> $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ (или <u>линейной оболочкой</u> векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$).

Из Теоремы 1 получаем

Следствие. Размерность подпространства $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)$, натянутого на векторы $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, ..., a_1^n)$, $\vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, ..., a_2^n)$, …, $\vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, ..., a_k^n)$, равняется рангу матрицы, составленной из координат этих векторов.

Пусть W_1 и W_2 - два подпространства векторного пространства V.

Определение 3. <u>Суммой</u> подпространств W_1 и W_2 называется подпространство $W_1 + W_2 = \{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \in V : \vec{p}_1 \in W_1, \vec{p}_2 \in W_2\}$. Сумма называется <u>прямой</u> (обозначение $W_1 \oplus W_2$), если $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$.

Определение 4. <u>Пересечением</u> подпространств W_1 и W_2 называется подпространство $W_1 \cap W_2 = \{\vec{p} \in V : \vec{p} \in W_1, \vec{p} \in W_2\}$.

Основные *свойства*:

1°. Если $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k$ – базис подпространства W^k, то

$W^k = L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k)$; в частности, $V^n = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

2°. Для любых векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_m$:

$$L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k) + L(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) = L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_m).$$

В частности, если $L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k) \cap L(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) = \{\vec{0}\}$, то

$$L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k) \oplus L(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m) = L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_m).$$

3° $\dim(W^k + W^m) = \dim(W^k) + \dim(W^m) - \dim(W^k \cap W^m)$.

В частности,

$\dim(W^k \oplus W^m) = \dim(W^k) + \dim(W^m)$.

Пример 1.

В V^5 дано подпространство W^3, натянутое на векторы $\vec{a}(2,0,1,0,\ -1)$, $\vec{b}(0,2,3,1,0)$, $\vec{c}(1,\ -1,8,0,0)$. Определить, принадлежит ли вектор $\vec{x}(1,-1,1,-1,2)$ этому подпространству.

Решение. Из векторного равенства $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ находим пять уравнений на координаты вектора $\vec{x}$:

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + \gamma \\ -1 = 2\beta - \gamma \\ 1 = \alpha + 3\beta + 8\gamma \\ -1 = \beta \\ 2 = -\alpha \end{cases}$$

Эта система уравнений несовместна, следовательно, $\vec{x} \notin W^3$.

Пример 2.

В пространстве V^4 заданы векторы $\vec{a}_1(1,1,1,0)$, $\vec{a}_2(1,0,1,0)$, $\vec{a}_3(1,0,0,1)$, $\vec{a}_4(1,1,2,\ -1)$, $\vec{a}_5(1,1,0,1)$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Найти базис подпространства, натянутого на векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$.

Решение: Рассмотрим матрицу, строки которой состоят из координат векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведя ее к ступенчатому виду, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, первые три строки образуют максимальную линейно независимую подсистему векторов и, значит, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис подпространства $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_5)$.

Пример 3.

В векторном пространстве V^n выбран базис. Доказать, что множество всех векторов, координаты которых удовлетворяют однородной системе k линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} a_{11}p^1 + a_{12}p^2 + \ldots + a_{1n}p^n = 0 \\ a_{21}p^1 + a_{22}p^2 + \ldots + a_{2n}p^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}p^1 + a_{k2}p^2 + \ldots + a_{kn}p^n = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

образуют подпространство W пространства V^n размерности (n – k).

Решение:

Используем критерий подпространства пространства V^n.

1. Пусть координаты векторов $\vec{x}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $\vec{y}(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ удовлетворяют системе (1) т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}x^i = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}y^i = 0\ . \qquad (2)$$

Где $\alpha = 1, \ldots, k$. Тогда складывая почленно первое, второе $\ldots k$–ое равенства из (2) и (3), получим

$\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(x^i + y^i) = 0$, т.е. координаты вектора $\vec{x} + \vec{y}$ удовлетворяют системе (1), то есть $\vec{x} + \vec{y} \in W$.

2. Умножив все равенства из (1) на λ, получим $\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(\lambda x^i) = 0$,

т.е. если координаты вектора $\vec{x}$ удовлетворяют системе (2.1), то и координаты вектора $\lambda\vec{x}$ для любого $\lambda \in$ **R** удовлетворяют системе (2.1).

Таким образом, по критерию подпространства получаем, что множество всех векторов, координаты которых удовлетворяют системе (2.1), образуют подпространство W векторного пространства.

Найдем размерность этого подпространства. Как известно ([5]), фундаментальная система решений (2.1) состоит из (*n-k*) линейно независимых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-k}$ и любое решение (2.1) можно представить как линейную комбинацию векторов фундаментальной системы. Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-k}$ образуют базис подпространства W и значит размерность этого подпространства равна (n-k).

Пример 4.

В V^5 дан базис $\vec{e}_i$. Подпространство W^3, задано системой двух линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} p^1 + 2p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 0 \\ 2p^1 - p^2 - p^3 + 3p^4 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

а) Найти базис подпространства W^3;

б) Выяснить, принадлежит ли вектор $\vec{x}$ (–12,1,5,10, –5) подпространству W^3.

Решение.

а) Найдем фундаментальную систему решений (1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$p^1 = \frac{p^3}{5} - \frac{7p^4}{5} - \frac{p^5}{5},$$
$$p^2 = -\frac{3p^3}{5} + \frac{p^4}{5} - \frac{2p^5}{5}.$$

Положив соответственно

1) $p^3 = 5,\ p^4 = p^5 = 0,$

2) $p^3 = 0,\ p^4 = 5,\ p^5 = 0,$

3) $p^3 = 0,\ p^4 = 0,\ p^5 = 5,$

получим базис $\{\vec{a}_1(1,-3,5,0,0),\ \vec{a}_2(-7,1,0,1,0),\ \vec{a}_3(-1,-2,0,0,1)\}$ подпространства W^3.

б) Так как координаты вектора $\vec{x}$ удовлетворяют системе (1), то $\vec{x} \in W^3$.

Пример 5.

В V^n дан базис. Подпространства $W^к$ и W^m заданы системами линейно независимых уравнений

$$W^{\kappa}:\begin{cases} a_{11}p^1 + a_{12}p^2 + \ldots + a_{1n}p^n = 0, \\ a_{21}p^1 + a_{22}p^2 + \ldots + a_{2n}p^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-k1}p^1 + a_{n-k2}p^2 + \ldots + a_{k-n}p^n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$$W^{m}:\begin{cases} a_{11}p^1 + a_{12}p^2 + \ldots + a_{1n}p^n = 0, \\ a_{21}p^1 + a_{22}p^2 + \ldots + a_{2n}p^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-m1}p^1 + a_{n-m2}p^2 + \ldots + a_{n-mn}p^n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Найти пересечение $W^{к} \cap W^{m}$, если $m \geq k$.

Решение. Рассмотри систему (3), состоящую из всех уравнений систем (1) и (2). Если $\vec{p} \in W^{к} \cap W^{m}$, то координаты вектора $\vec{p}$ удовлетворяют системе (3).

Т.к. $m \geq \kappa$, то $n - k \geq n - m$, следовательно, минимальное число линейно независимых уравнений в системе (3) равно $n - k$.

Пусть ранг основной матрицы системы (3) равен r, тогда $n-k \leq r \leq n$.

1. Если $r = n\text{-}k$, то $W^{\kappa} \subset W^{m}$ и $W^{\kappa} \cap W^{m} = W^{\kappa}$.
2. Если $r = n$, то $W^{\kappa} \cap W^{m} =\{\vec{0}\}$.
3. Если $n\text{-}k< r <n$, то $W^{\kappa} \cap W^{m} = W^{n-r}$, где W^{n-r} задается системой, состоящей из всех $n - r$ линейно независимых уравнений системы (3).

Пример 6.

Найти пересечение двух подпространств в V^4, если

$$W^2:\begin{cases} p^1 + 2p^2 + p^3 + p^4 = 0 \\ 2p^1 - p^2 - p^3 + p^4 = 0 \end{cases}$$

$$W^2{}_*:\begin{cases} 3p^1 + p^2 + 2p^4 = 0 \\ p^1 - 3p^2 - 2p^3 = 0 \end{cases}$$

Решение. Пересечение подпространств W^2 и $W^2{}_*$ задается системой

$$\begin{cases} p^1 + 2p^2 + p^3 + p^4 = 0 \\ 2p^1 - p^2 - p^3 + p^4 = 0 \\ 3p^1 + p^2 + 2p^4 = 0 \\ p^1 - 3p^2 - 2p^3 = 0 \end{cases}$$

Найдем ранг ее основной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ранг матрицы равен двум и (см. Пример 5) $W^2 \subset W^2{}_*$. Так как размерности подпространств W^2 и $W^2{}_*$ совпадают, то $W^2 = W^2{}_*$.

Пример 7. Найти уравнения подпространства $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ в V^4, если $\vec{a}_1(1,0,1,1)$, $\vec{a}_2(1,1,0,0)$, $\vec{a}_3(1,1,1,1)$.

Решение. Для любого вектора $\vec{x}(x^1, x^2, x^3, x^4) \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$: $\vec{x} = t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + t^3\vec{a}_3$. Следовательно

$$x^1 = t^1 + t^2 + t^3$$

$$x^2 = t^2 + t^3$$

$$x^3 = t^1 + t^3$$

$$x^4 = t^1 + t^3 .$$

Из первых трех уравнений выражая t^1, t^2, t^3 через x^1, x^2, x^3 и подставляя в последнее уравнение, получим уравнение подпространства $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$:

$$x^3 - x^4 = 0.$$

Пример 8. Найти базис суммы и пересечения подпространств W_1 и W_2, натянутых на векторы $\vec{a}_1(1,3,1)$, $\vec{a}_2(-2,1,-3)$, и $\vec{b}_1(-1,2,3)$, $\vec{b}_2(0,1,2)$.

Решение.

1) Найдем базис подпространства $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Для этого рассмотрим матрицу, составленную из координат векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первые три строки образуют максимальную линейно независимую подсистему векторов и, значит, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\}$ – базис $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

2) Найдем базис подпространства $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \cap L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Для этого найдем уравнения подпространств $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ (см. Пример 7):

$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$: $10x^1 - x^2 - 7x^3 = 0$;

$L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$: $x^1 + 2x^2 - x^3 = 0$.

Следовательно, подпространство $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \cap L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ задается системой

$$\begin{cases} 10x^1 - x^2 - 7x^3 = 0 \\ x^1 + 2x^2 - x^3 = 0 \end{cases}.$$

Находя обычным образом ее фундаментальную систему решений, получим, что вектор $\vec{a}\,(-15,-3,-21)$ – базис $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \cap L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Является ли подпространством векторного пространства V^n все векторы, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x^1 + x^2 + \ldots + x^n = 0$;

б) $x^1 + x^2 + \ldots + x^n = 1$.

2. Найти размерность и базис подпространств, натянутых на следующие системы векторов:

а) $\vec{a}_1(1,0,0,-1)$, $\vec{a}_2(2,1,1,0)$, $\vec{a}_3(1,1,1,1)$, $\vec{a}_4(1,2,3,4)$, $\vec{a}_5(0,1,2,3)$;

б) $\vec{a}_1(1,1,1,10)$, $\vec{a}_2(1,1,-1,-1,-1)$, $\vec{a}_3(2,2,0,0,-1)$, $\vec{a}_4(1,1,5,5,2)$, $\vec{a}_5(1,-1,-1,00)$.

3. В V^6 дано подпространство W^4, натянутое на векторы $\vec{a}_1(1,-1,1,-1,1,-1)$, $\vec{a}_2(0,1,0,1,0,1)$, $\vec{a}_3(2,1,0,0,1,1)$, $\vec{a}_4(0,0,0,0,0,1)$. Найти уравнения подпространства W^4 и определить, принадлежат ли векторы $\vec{x}(2,-1,5,0,3,7)$ и $\vec{y}(-2,-4,2,-2,0,-2)$ этому подпространству.

4. В V^6 подпространство W^4 задано системой

$$\begin{cases} p^1 + 2p^2 - p^4 + 3p^5 = 0 \\ p^1 + p^3 + 4p^4 + p^5 + p^6 = 0 \end{cases}.$$

а) Найти базис подпространства W^4;

б) Проверить, принадлежит ли вектор $\vec{x}(2,-3,-12,2,0,2)$ подпространству W^4.

5. Найти базис суммы и пересечения подпространств в V^4, натянутых на векторы:

а) $\vec{a}_1(1,2,0,1)$, $\vec{a}_2(1,1,1,0)$ и $\vec{b}_1(1,0,1,0)$, $\vec{b}_2(1,3,1,3)$;

б) $\vec{a}_1(1,1,1,1)$, $\vec{a}_2(1,-1,1,-1)$, $\vec{a}_3(1,3,0,1)$ и $\vec{b}_1(1,2,0,2)$, $\vec{b}_2(1,2,1,2)$, $\vec{b}_3(3,1,3,1)$.

6. Доказать, что пространство R^n есть прямая сумма двух подпространств

W^{n-1}: $x^1+x^2+\ldots+x^n=0$ и W^1: $x^1=x^2=\ldots=x^n$.

7. Доказать, что если сумма размерностей двух подпространств n-мерного векторного пространства больше n, то подпространства имеют общий ненулевой вектор.

8. Пусть W_1 и W_2 – два подпространства V. Доказать, что всякий вектор $\vec{x} \in W_1+W_2$ единственным образом записывается в виде $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_i \in W_i$, тогда и только тогда, когда $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$.

3. БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Определение 1. Билинейной формой, определенной на векторном пространстве V, называется отображение g: $V \times V \to \mathbf{R}$, линейное по каждому аргументу, т.е.

1. $g(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha\, g(\vec{x}_1, \vec{y}) + \beta\, g(\vec{x}_2, \vec{y})$;

2. $g(\vec{x}, \alpha\vec{y}_1 + \beta y_2) = \alpha\, g(\vec{x}, \vec{y}_1) + \beta\, g(\vec{x}, y_2)$.

Если $\{\vec{e}_i\}$ $(i = 1,2,...,n)$−базис векторного пространства V^n и $\vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_i y^i \vec{e}_i$, то

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j, \qquad (3.1)$$

где $g_{ij} = g(e_i, e_j)$−*координаты* (*компоненты*) формы g в базисе $\{\vec{e}_i\}$. Матрица (g_{ij}) называется *матрицей билинейной формы* g.

Определение 2. Билинейная форма g называется симметрической, если для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$ выполняется равенство $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$.

В координатном виде это, очевидно, равносильно $g_{ij} = g_{ji}$, то есть симметричности матрицы (g_{ij}).

Если $\vec{e}'_i = \sum_j A_i^j \vec{e}_j$ −другой базис пространства, то

$$g'_{ij} = \sum_{k,l} A_i^k A_j^l g_{ij} \qquad (3.2)$$

В матричном виде соотношения (3.2) примут вид

$$g' = A^t g A \qquad (3.3)$$

где $g = (g_{ij})$, $g' = (g'_{ij})$, $A = (A_i^j)$.

Определение 3. Симметрическая билинейная форма называется положительно определенной, если $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\vec{x}$.

Теорема 3. (*Критерий Сильвестра*) Симметрическая билинейная форма $g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j$ положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:

$$g_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Пример 1.

В V^4 дан базис и векторы $\vec{x}$ (x^i), $\vec{y}(y^i)$. Отображение g: $V^4 \times V^4 \to \mathbf{R}$ задано по законам а) – г). Выяснить, какие из заданных форм являются билинейными.

а) $g(\vec{x},\vec{y}) = x^1y^2 - x^2y^2$,

б) $g(\vec{x},\vec{y}) = x^1/y^1 + x^2/y^2 = x^3/y^3 + x^4/y^4$,

в) $g(\vec{x},\vec{y}) = (x^1)^2 + (y^1)^2 + 2x^3y^3$,

г) $g(\vec{x},\vec{y}) = 2x^1y^1 - 3x^2y^2 + 4x^3y^3 - x^4y^4$.

Решение. Из (3.1) следует, что только формы а) и г) являются билинейными. Причем, в а) $g_{12} = 1$, $g_{22} = -1$, остальные нули; в г) $g_{11} = 2$, $g_{22} = -3$, $g_{33} = 4$, $g_{44} = -1$, остальные нули.

Пример 2.

В V^3 дан базис, векторы $\vec{x}(x^i)$, $\vec{y}(y^i)$ и билинейные формы. Выяснить, какие из данных форм являются симметрическими, положительно определенными.

а) $g(\vec{x},\vec{y}) = 2x^1y^1 + 4x^2y^2 - 3x^3y^3$,

б) $g(\vec{x},\vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + 4x^3y^3 + 5x^1y^2 - 3x^2y^3 - 3x^3y^2$,

в) $g(\vec{x},\vec{y}) = 2x^1y^1 - 2x^1y^2 - 2x^2y^1 + 3x^2y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^3y^3$.

Решение.

а) Эта форма симметрическая, так как ее матрица

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

симметрична. Но ее главный минор $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -24 < 0$. По теореме 3 она не положительно определена.

б) Эта форма не симметрическая, так как ее матрица

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

не симметрична.

в) Данная билинейная форма симметрическая, так как ее матрица

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

симметрична. Кроме того,

$$g_{11} = 2 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = 2 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = 4 > 0\,.$$

Следовательно, эта форма положительна определена.

Пример 3.

В V^4 билинейная форма g задана своей матрицей

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти $g(\vec{a},\vec{b})$, $g(\vec{e}_1, \vec{b})$, где $\vec{a}(1,2,0,3)$, $\vec{b}(0,1,-1,0)$.

Решение. Имеем

$$g(\vec{x},\vec{y}) = x^1y^1 - 2x^1y^2 + 3x^1y^4 + x^2y^3 + 4x^2y^4 + x^3y^1 - x^3y^3 + 5x^4y^4\,.$$

Следовательно, для заданных векторов $\vec{a}$ (1,2,0,3) и $\vec{b}$ (0,1, –1,0) $g(\vec{a},\vec{b}) = -7$.

Вектор $\vec{e}_1$ имеет координаты (1,0,0,0), следовательно, $g(\vec{e}_1,\vec{b}) = -3$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В V^n даны две билинейные формы $g_1(\vec{x},\vec{y})$ и $g_2(\vec{x},\vec{y})$. Является ли билинейной формой отображение

а) $f_1(\vec{x},\vec{y}) = g_1(\vec{x},\vec{y}) + g_2(\vec{x},\vec{y})$;

б) $f_2(\vec{x},\vec{y}) = g_1(\vec{x},\vec{y}) + g_2(\vec{y},\vec{x})$.

2. Если $g(\vec{x},\vec{y})$ – билинейная несимметрическая форма, то будет ли форма $f(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{y},\vec{x})$ симметрической ?

3. Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ не сопряжены относительно симметрической билинейной формы $g(\vec{x},\vec{y})$, то могут ли быть сопряженными относительно этой формы векторы $\vec{x}+\vec{y}$ и $\vec{x}-\vec{y}$, т.е. $g(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}-\vec{y})=0$.

4. В V^3 дана билинейная форма

$$g(\vec{x},\vec{y})=x^1y^1+x^1y^2+x^2y^1+2x^2y^2+2x^2y^3+2x^3y^2+5x^3y^3 .$$

Выписать ее матрицу и найти ее ранг.

5. В базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ матрица билинейной формы g имеет вид

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти компоненты формы g в новом базисе

$$e_1'=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3,$$

$$e_2'=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3,$$

$$e_3'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3.$$

Указание. Использовать формулу (3.3).

6. На евклидовой плоскости в базисе $\vec{e}_1=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{e}_2=\vec{i}+3\vec{j}$ найти компоненты скалярного произведения.

4. ЕВКЛИДОВО n-МЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение 1. Векторное пространство V^n называется <u>евклидовым n-мерным векторным пространством</u>, если на нем фиксирована симметрическая положительно-определенная билинейная форма g. Число $g(\vec{x},\vec{y})$ называется *скалярным произведением* векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Имеет место обозначение $g(\vec{x},\vec{y})$ $=\vec{x}\,\vec{y}$.

Число $|\vec{x}| = \sqrt{g(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^2}$ называется *длиной* вектора $\vec{x}$.

Основные *свойства*:

1° $\vec{x}\vec{y} \le |\vec{x}||\vec{y}|$. (*неравенство Коши-Буняковского*) (4.1)

2° Для ненулевых векторов

$\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \Leftrightarrow \vec{x} = t\vec{y}$, где $t > 0$.

Угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется по формуле

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \qquad (4.2)$$

где $0 \le (\vec{x},\vec{y}) \le \pi$.

Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются *ортогональными* (обозначение $\vec{x} \perp \vec{y}$), если $\vec{x}\,\vec{y}$=0.

Вектор $\vec{x}$ называется *ортогональным* подпространству W (обозначение $\vec{x} \perp$ W), если $\vec{x} \perp \vec{a}, \forall \vec{a} \in$ W.

Подпространства W_1 и W_2 называются *ортогональными* (обозначение $W_1 \perp W_2$), если $\forall \vec{x} \in W_1$ и $\forall \vec{y} \in W_2 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$.

Определение 2. Базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ называется ортонормированным, если все его векторы единичные и попарно ортогональные, т.е. $\vec{e}_i^{\,2} = 1$ и $\vec{e}_i\vec{e}_j = 0$, если $i \ne j$.

В ортонормированном базисе

$$\vec{x}\,\vec{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n. \qquad (4.3)$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2}\,. \qquad (4.4)$$

$$\cos(\vec{x},\vec{y}) = \frac{x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n}{\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}\sqrt{(y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2}}\,. \qquad (4.5)$$

Пример 1. Доказать, что в евклидовом n-мерном векторном пространстве выполняются равенства:

а) $\vec{b} = \lambda\vec{a} \Rightarrow |\vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

б) $\forall \vec{a}, \vec{b}$: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \ge |\vec{a} + \vec{b}|$. (*неравенство треугольника*)

Решение.

а) $|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{\lambda^2\vec{a}^2} = |\lambda|\sqrt{\vec{a}^2} = |\lambda||\vec{a}|$.

б) С учетом неравенства (4.1), имеем

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 \le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}| = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2,$$

т.е.

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Пример 2.

В 4-мерном евклидовом векторном пространстве дан ортонормированный базис и векторы $\vec{a}(1,0,1,0)$, $\vec{b}(0,2,1,2)$. Найти вектор $\vec{c}$ ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Пусть вектор $\vec{c}(x^1,x^2,x^3,x^4)$ ортогонален векторам $\vec{a}(1,0,1,0)$ и $\vec{b}(0,2,1,2)$, то есть $\vec{a}\vec{c}=0$ и $\vec{b}\vec{c}=0$. В координатном виде эти равенства примут соответственно вид:

$x^1 + x^3 = 0$,

$x^2 + x^3 + 2x^4 = 0$.

Любой вектор, координаты которого удовлетворяют этой системе, ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Например $\vec{c}(0,-2,0,1)$.

Пример 3.

В n-мерном евклидовом векторном пространстве V^n дано k-мерное $(0 < к < n)$ подпространство W и подмножество $W^\perp=\{\vec{x}\in V^n : \vec{x}\perp W\}$. Доказать, что

1. $W^\perp$ – (n–к)-мерное подпространство V^n и $W\cap W^\perp=\{\vec{0}\}$;

2. $V^n=W\oplus W^\perp$;

(Подпространство $W^\perp$ называется ортогональным дополнением подпространства W.)

Решение.

1) Пусть $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$– ортонормированный базис данного n-мерного векторного пространства, а $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k\}$–ортонормированный базис подпространства W и $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n), \dots, \vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^n)$ в базисе $\{e_i\}$.

Тогда, вектор $\vec{x}(x^i) \in \mathrm{W}^{\perp} \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{a} = \lambda^1 \vec{a}_1 + \dots \lambda^{\kappa} \vec{a}_k$, $\forall \lambda^1, \dots, \lambda^{\kappa} \in \mathbf{R}$,

т.е. $\lambda^1(\vec{x}\,\vec{a}_1) + \dots + \lambda^{\kappa}(\vec{x}\,\vec{a}_k) = 0$, $\forall \lambda^1, \dots, \lambda^{\kappa} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$

$$\{\vec{x}\,\vec{a}_1 = 0, \dots, \vec{x}\,\vec{a}_k = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 x^1 + a_1^2 x^2 + \dots + a_1^n x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k^1 x^1 + a_k^2 x^2 + \dots + a_k^n x^n = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Т.к. векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – линейно независимы, то ранг матрицы (a_α^i) равен k. Следовательно (*) – однородная система $к$ линейно независимых уравнений с n неизвестными. По задаче 2 из §2 множество всех векторов $\vec{x}$, координаты которых удовлетворяют системе (*), образуют $(n–k)$ –мерное подпространство, т.е. множество векторов $\mathrm{W}^{\perp}$ образует $(n – к)$-мерное подпространство.

Пусть $\vec{x} \in \mathrm{W} \cap \mathrm{W}^{\perp}$. Тогда $\vec{x} = \lambda^1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda^{\kappa} \vec{a}_k$ и $\vec{x}^2 = 0$. Следовательно, $\vec{x}^2 = (\lambda^1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda^{\kappa} \vec{a}_k)^2 = (\lambda^1)^2 + \dots + (\lambda^{\kappa})^2 = 0 \Rightarrow \lambda^1 = \dots = \lambda^{\kappa} = 0$, т.е. $\vec{x} = \vec{0}$,
т.е. $\mathrm{W} \cap \mathrm{W}^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

2) Пусть $\mathrm{W}^{\perp} = L(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n-k})$. Тогда, с учетом свойств 2° и 1° из п.2, получаем

$$\mathrm{W} \oplus \mathrm{W}^{\perp} = L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k) \oplus L(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n-k}) = L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n-k}) = \mathrm{V}^{\mathrm{n}}.$$

Пример 4.

В n-мерном евклидовом векторном пространстве дан ортонормированный базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $(n–к)$-мерное подпространство W, заданное системой линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_1^2 x^2 + \dots + a_1^n x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k^1 x^1 + a_k^2 x^2 + \dots + a_k^n x^n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Доказать, что k векторов $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n), \dots, \vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^n)$ образуют базис ортогонального дополнения $\mathrm{W}^{\perp}$ подпространства W.

Решение. С учетом ортонормированности базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \vec{a}_1 \vec{x} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \vec{a}_k \vec{x} = 0, \end{cases}$$

где $\vec{x}(x^i)$–произвольный вектор, принадлежащий W. Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in W^{\perp}$. Так как ранг основной матрицы системы (1) равен k, то векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независимы и ,кроме того, $\dim W^{\perp} = k$ (см. Пример 4). Следовательно, $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$–базис $W^{\perp}$.

Пример 5.

В 4-мерном евклидовом векторном пространстве дан ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.

а) Найти систему уравнений, определяющую ортогональное дополнение $(W^3)^{\perp}$ подпространства $W^3 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, где $\vec{a}_1(1,0,1,1)$, $\vec{a}_2(1,1,0,0)$, $\vec{a}_3(1,1,1,1)$;

б) Подпространство W^2 задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 - x^4 = 0, \\ x^1 + 2x^2 - x^3 + 3x^4 = 0. \end{cases}$$

Найти систему уравнений, определяющую $(W^2)^{\perp}$.

Решение.

а) Вектор $\vec{x}(x^1, x^2, x^3, x^4) \in (W^3)^{\perp} \Leftrightarrow \{\vec{x}\vec{a}_1 = 0, \vec{x}\vec{a}_2 = 0, \vec{x}\vec{a}_3 = 0\}$, т.е.

$$(W^3)^{\perp}: \begin{cases} x^1 + x^3 + x^4 = 0 \\ x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 0 \end{cases}.$$

б) Из Пример 4 следует, что $(W^2)^{\perp} = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где $\vec{a}_1(2,1,1.1)$ и $\vec{a}_2(1,2,-1,3)$.

Вектор $\vec{x}(x^1, x^2, x^3, x^4) \in (W^2)^{\perp} \Leftrightarrow \vec{x} = t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2$, т.е.

$x^1 = 2t^1 + t^2$,

$x^2 = t^1 + 2t^2$,

$x^3 = t^1 - t^2$,

$x^4 = -t^1 + 3t^2$.

Из последних двух уравнений выразим t^1 и t^2 через x^3 и x^4 и подставим найденные выражения в первые два уравнения. Получим

$(W^2)^{\perp}: \begin{cases} 4x^1 - 7x^3 - x^4 = 0 \\ 4x^2 + x^3 + 3x^4 = 0 \end{cases}.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ пространства V^3 задана билинейная форма g матрицей $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Доказать, что пространство (V^3, g) евклидово.

2. Пусть $\{\vec{e}_i\}$, $\{\vec{e}'_i\}$ – два ортонормированных базиса евклидова векторного пространства V^n и $\vec{e}'_i = \sum_j A_i^j \vec{e}_j$. Доказать, что матрица $A = (A_i^j)$ ортогональна (т.е. $A^{-1} = A^t$) и $\det(A) = \pm 1$.

3. Доказать, что если $W_1 \perp W_2$, то $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$.

4. Доказать, что подпространства $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ и $L(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a}_\alpha \perp \vec{b}_\beta$, $\alpha = 1, \dots, k$; $\beta = 1, \dots, m$.

5. В 5-мерном евклидовом векторном пространстве дан ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_5\}$ и подпространство $W^2 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где $\vec{a}_1(-1,3,-2,0,1)$, $\vec{a}_2(0,-1,2,5,-3)$. Найти систему уравнений, определяющую ортогональное дополнение $(W^2)^{\perp}$ подпространства W^2.

6. В евклидовом векторном пространстве V^6 дан ортонормированный базис и подпространство W^4, заданное системой уравнений

$$W^4: \begin{cases} x^3 - x^4 + 2x^5 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^4 - 5x^6 = 0. \end{cases}$$

Найти систему уравнений, определяющую $(W^4)^{\perp}$.

5. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть V^n –ориентированное n-мерное евклидово векторное пространство и $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$– правый ортонормированный базис.

Определение 1. Смешанным (или косым) произведением n векторов $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, ..., a_1^n)$, $\vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, ..., a_2^n), ..., \vec{a}_n(a_n^1, a_n^2, ..., a_n^n)$ называется определитель, составленный из координат этих векторов, т.е.

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_n^n \end{vmatrix}. \qquad (5.1)$$

Определение 2. Векторным произведением n-1 векторов $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, ..., a_1^n)$, $\vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, ..., a_2^n), ..., \vec{a}_{n-1}(a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, ..., a_{n-1}^n)$ называется вектор

$$\vec{b} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}] = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_{n-1}^1 & \vec{e}_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_{n-1}^2 & \vec{e}_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_{n-1}^n & \vec{e}_n \end{vmatrix}. \qquad (5.2)$$

Выражение (5.2) можно переписать в следующем виде:

$$\vec{b} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}] = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & ... & a_{n-1}^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & ... & a_{n-1}^3 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_{n-1}^n \end{vmatrix} \vec{e}_1 + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_{n-1}^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & ... & a_{n-1}^3 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_{n-1}^n \end{vmatrix} \vec{e}_2 + ...$$

$$+ (-1)^{2n} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 & ... & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^3 & ... & a_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^3 & ... & a_{n-1}^n \end{vmatrix} \vec{e}_n. \qquad (5.3)$$

Из известных свойств определителя следует, что смешанное и векторное произведения обладают *свойствами*:

1^{o}. $(\vec{a}_1,...,\vec{a}_k,...,\vec{a}_l,...,\vec{a}_n) = -(\vec{a}_1,...,\vec{a}_l,...,\vec{a}_k,...,\vec{a}_n)$, т.е. смешанное произведение кососимметрично;

2^{o} $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n) = 0 \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ линейно зависимы;

3^{o} $[\vec{a}_1,...,\vec{a}_k,...,\vec{a}_l,...,\vec{a}_{n-1}] = -[\vec{a}_1,...,\vec{a}_l,...,\vec{a}_k,...,\vec{a}_{n-1}]$, т.е. векторное произведение кососимметрично;

4^{o} $[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}] = \vec{0} \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}$ линейно зависимы;

5^{o} $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n) = [\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]\cdot\vec{a}_n$.

Определение 3. <u>Определителем Грама</u> системы векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ называется определитель вида

$$G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n) = \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_2\vec{a}_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{vmatrix}. \qquad (5.4)$$

где $\vec{a}_i\vec{a}_j$ – скалярное произведение векторов.

Пример 1.

Доказать, что для любой системы векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ n-мерного еклидова векторного пространства V^n выполняется равенство:

$$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)^2 = G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n). \qquad (5.5)$$

т.е.

$$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_2\vec{a}_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{vmatrix}.$$

Решение. С учетом (5.1) имеем

$$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)^2=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_n^n \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_n^n \end{vmatrix}^T\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_n^n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_1\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_2\vec{a}_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \vec{a}_n\vec{a}_1 & \vec{a}_n\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_n\vec{a}_n \end{vmatrix}.$$

Пример 2.

Доказать, что векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]$ векторов евклидова пространства V^n ортогонально каждому сомножителю $\vec{a}_\alpha$, $\alpha=1,...,n-1$.

Решение. С учетом свойств 5° и 2° имеем:

$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]\cdot\vec{a}_\alpha=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1},\vec{a}_\alpha)=0$, т.е.

$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]\perp\vec{a}_\alpha$.

Пример 3.

Доказать, что для любой системы векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}$ n-мерного еклидова векторного пространства V^n выполняется равенство:

$$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]^2=G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}). \qquad (5.6)$$

Решение. С учетом свойства 5° имеем:

$$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]^2=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]\cdot[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1},[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]).$$

Следовательно, в силу (5.5) и Пример 2,

$$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]^2=\begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{a}_1 & \vec{a}_1\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_1\vec{a}_{n-1} & 0 \\ \vec{a}_2\vec{a}_1 & \vec{a}_2\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_2\vec{a}_{n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ \vec{a}_{n-1}\vec{a}_1 & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_2 & ... & \vec{a}_{n-1}\vec{a}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]\right|\sqrt{G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1})},$$

т.е. $\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]\right|=\sqrt{G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1})}$, т.е.

$$[\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}]^2=G(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{n-1}).$$

Пример 4.

В 4-мерном евклидовом векторном пространстве дан ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$. Найти базис ортогонального дополнения $(\mathrm{W}^3)^{\perp}$ подпространства $\mathrm{W}^3 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, где $\vec{a}_1(1,0,1,1)$, $\vec{a}_2(1,1,0,0)$, $\vec{a}_3(1,1,1,1)$.

Решение. Так как dim W^3=3 $\Rightarrow$ dim $(\mathrm{W}^3)^{\perp}$=1 (см. Пример 4 из п.4). Следовательно, вектор $\vec{b} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ – базис подпространства $(\mathrm{W}^3)^{\perp}$.

Из (5.2) имеем

$$\vec{b} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \vec{e}_1 \\ 0 & 1 & 1 & \vec{e}_2 \\ 1 & 0 & 1 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 & \vec{e}_4 \end{vmatrix} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4,$$

т.е. $\vec{b}(0,0,-1,1)$ – базис $(\mathrm{W}^3)^{\perp}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Доказать, что если заменить ортонормированный базис $\{\vec{e}_i\}$ на другой ортонормированный базис $\{\vec{e}\,'_i\}$, то смешанное произведение $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)$ не изменится, если базисы $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}\,'_i\}$ одинаково ориентированы, и меняет знак, если они противоположно ориентированы.

2. Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ – правый ортонормированный базис пространства V^4. Доказать, что $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_4$, $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4] = \vec{e}_1$, $[\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1] = \vec{e}_2$, $[\vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3$.

3. Доказать, что в евклидовом n-мерном векторном пространстве выполняется равенство:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n)\ (\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n) = \begin{vmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \vec{a}_1\vec{b}_2 & ... & \vec{a}_1\vec{b}_n \\ \vec{a}_2\vec{b}_1 & \vec{a}_2\vec{b}_2 & ... & \vec{a}_2\vec{b}_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \vec{a}_n\vec{b}_1 & \vec{a}_n\vec{b}_2 & ... & \vec{a}_n\vec{b}_n \end{vmatrix}.$$

4. В 5-мерном евклидовом векторном пространстве дан ортонормированный базис $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\}$. Найти базис ортогонального дополнения $(W^4)^{\perp}$ подпространства $W^4 = L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)$, если $\vec{a}_1(1,0,-1,1,2)$, $\vec{a}_2(0,1,-2,0,0)$, $\vec{a}_3(3,0,1,0,5)$, $\vec{a}_4(1,0,0,3,0)$.

6. АФФИННОЕ n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение 1. Множество A^n называется n-мерным affинным пространством над n- мерным векторным пространством V^n, если задано отображение $\sigma: A^n \times A^n \to V^n$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре точек A,B из A^n вектор из V^n, который обозначается через $\overrightarrow{AB} = \sigma(A,B)$, и выполнены следующие аксиомы (*аксиомы Вейля*):

1. $\forall A \in A^n,\ \forall \vec{p} \in V^n \Rightarrow \exists! X \in A^n$: $\overrightarrow{AX} = \vec{p}$.
2. $\forall A,B,C \in A^n \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (*аксиома треугольника*)

Определение 2. Множество, состоящее из точки O и произвольного базиса $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$, называется аффинной системой координат пространства A^n и обозначается символом $O\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n$ или короче Oe_i. Точку O называют *началом координат*, а векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – *координатными векторами*.

Пусть *M*- произвольная точка пространства и $\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + ... + x^n\vec{e}_n$. Упорядоченный набор чисел $(x^1,x^2,...,x^n)$ называется координатами точки *M* в аффинной системе координат $O\vec{e}_i$.

Основные *свойства*:

1°. $\forall A \in A^n \Rightarrow \overrightarrow{AA} = \vec{0}$;

2°. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, то $A = B$;

3°. $\forall A,B \in A^n \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

4° Если $A(x^i), B(y^i)$, то $\overrightarrow{AB}(y^i - x^i)$.

Пусть $I = O\vec{e}_i$ и $II = O'\vec{e}'_i$ две аффинные системы координат и $M(x^i)_I, M(y^i)_{II}$, $\overrightarrow{OO'} = \sum\limits_i a^i \vec{e}_i$, $\vec{e}'_i = \sum\limits_j A_i^j \vec{e}_j$. Тогда

$$x^i = \sum_j A^i_j y^j + a^i \qquad (6.1)$$

Формулы (5.1) называются *формулами преобразования координат точки*.

В матричном виде они примут вид:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}. \qquad (6.2)$$

Определение 3. Отрезком, соединяющим точки A и B, называется множество $[AB] = \{M \in A^n : \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ где\ 0 \le t \le 1\}$.

Говорят, что точка C *делит отрезок* $[AB]$ *в отношении* λ (обозначение $(AB, C) = \lambda$), если $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

Если $\lambda = 1$, то точка C называется *серединой* отрезка $[AB]$.

Если $\lambda > 0$, то говорят, что точка C *лежит внутри* отрезка $[AB]$.

Пример 1.

Доказать, что n-мерное арифметическое пространство R^n является n-мерным аффинным пространством.

Решение. Рассмотрим R^n одновременно как точечное множество и векторное пространство. Для произвольных точек $A = (a^1, ..., a^n)$ и $B = (b^1, ..., b^n)$ положим $\sigma(A, B) = (b^1 - a^1, ..., b^n - a^n)$. Относительно этого σ, легко проверить, R^n является n- мерным аффинным пространством.

Пример 2.

В A^n дана система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2 ... \vec{e}_n$ и такие точки E_i, что $\overrightarrow{OE_i} = \vec{e}_i$. Найти

а) координаты точек $O, E_1, E_2, ..., E_n$;

б) координаты точки P, если $M(0,1,-1,0,...,0,1)$ и $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OE_4} + \overrightarrow{E_3E_{n-1}}$.

Решение.

а) Имеем $\overrightarrow{OO} = \vec{0} \Rightarrow O(0,0,...,0)$, $\overrightarrow{OE_i} = \vec{e}_i \Rightarrow E_1(1,0,...,0), \ldots, E_n(0,...,0,1)$.

б) $\overrightarrow{E_3E_{n-1}} = \overrightarrow{OE}_{n-1} - \overrightarrow{OE}_3 = \vec{e}_{n-1} - \vec{e}_3$ и

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_n) + (\vec{e}_4 + \vec{e}_{n-1} - \vec{e}_3) = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4 + \vec{e}_{n-1}$, то есть

$P(0,1,-2,1,0,...,0,1,0)$.

Замечание. Упорядоченная система точек $\{O, E_1, ..., E_n\}$ называется *аффинным репером*.

Пример 3.

В A^n дана система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n$ и две точки $A(a^i)$, $B(b^i)$. Найти координаты точки C, если $(AB, C) = \lambda$.

Решение. Пусть точка C имеет координаты (c^i). Тогда, условие $(AB, C) = \lambda$, т.е. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, примет вид

$$\overrightarrow{AC}(c^i - a^i) = (\lambda\overrightarrow{CB})(\lambda(b^i - c^i)).$$

Следовательно

$$c^i - a^i = \lambda(b^i - c^i).$$

Отсюда

$$c^i = \frac{a^i + \lambda b^i}{1 + \lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка $[AB]$ равны

$$c^i = \frac{a^i + b^i}{2}.$$

Пример 4.

В A^5 дана система координат, точки $M(1,-1,2,3,5)$, $P(0,-2,3,0,1)$ и $(MP, A) = -2$. Найти координаты точки A.

Решение. Пусть $A(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$. По условию $\overrightarrow{MA}(x^1 - 1, x^2 + 2, x^3 - 2, x^4 - 3, x^5 - 5) = -2\overrightarrow{AP}(-x^1, -2 - x^2, 3 - x^3, -x^4, 1 - x^5)$. Приравняв соответствующие координаты равных векторов $\overrightarrow{MA}$ и $-2\overrightarrow{AP}$, найдем координаты точки A: $x^1 = -1, x^2 = -3, x^3 = 4, x^4 = -3, x^5 = -3$.

Пример 5.

В A^4 даны две системы координат $\mathrm{I} = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_4$ и $\mathrm{II} = O\vec{e}_{1'}\vec{e}_{2'}\vec{e}_{3'}\vec{e}_{4'}$. $O'(1,-2,0,2)_I$, $\vec{e}_{1'}(1,2,0,0)_I$, $\vec{e}_{2'}(-1,3,1,1)_I$, $\vec{e}_{3'}(0,1,0,0)_I$, $\vec{e}_{4'}(0,0,0,1)_I$. Найти

а) координаты точки $A(2,0,1,3)_I$ в системе II;

б) точки, имеющие одинаковые координаты в системах I и II.

Решение.

а) С учетом формул преобразования координат (6.2), имеем:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{cases} y^1 - y^2 + 1 = 2 \\ 2y^1 + 3y^2 + y^3 - 2 = 0 \\ y^2 = 1 \\ y^2 + y^4 + 2 = 3 \end{cases}$$

Решив систему, получим $A(2,1,-5,0)_{II}$.

б) Пусть $M(x^i)_I = (x^i)_{II}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} -x^2 + 1 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 + x^3 - 2 = 0 \\ x^2 - x^3 = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Данная система уравнений несовместна, следовательно, такой точки нет.

Пример 6.

В A^n даны три системы координат $I = O\vec{e}_i$, $II = O'\vec{e}'_i$, $III = O''\vec{e}''_i$, $\vec{e}'_i = \sum_j A_i^j \vec{e}_j$, $\vec{e}''_i = \sum_j B_i^j \vec{e}'_j$, $O'(a^i)_I$, $O''(b^i)_{II}$. Найти формулы преобразования координат при переходе от системы I к системе III.

Решение. Если $M(x^i)_I$, $M(y^i)_{II}$ и $M(z^i)_{III}$, то

$x^i = \sum_j A_j^i y^j + a^i$ и $y^i = \sum_j B_j^i z^j + b^i$. Следовательно

$x^i = \sum_{j,k} A_j^i (B_k^j z^k + b^j) + a^i = \sum_{j,k} (A_j^i B_k^j z^k + A_j^i b^j) + a^i$ - формулы преобразования координат при переходе от системы I к системе III.

Пример 7.

Всегда ли формулы вида

$$x^i = \sum_j A_j^i y^j + a^i \ , \qquad (1)$$

являются формулами преобразования координат точки в A^n.

Решение. Формулы (1) являются формулами преобразования координат точки в A^n, если матрица (A_j^i) невырождена. Так как, только в этом случае векторы $\vec{e}'_i = \sum_j A_i^j \vec{e}_j$ образуют базис направляющего пространства A^n.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Доказать, что n-мерное векторное пространство V^n является n-мерным аффинным пространством.

2. Доказать, что в A^n для любых точек $M_1, M_2, \ldots M_k$ выполняется равенство $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \overrightarrow{M_1M_k}$.

3. Определить координаты новых базисных векторов и нового начала координат в старой системе, если даны формулы преобразования координат:

а) $\begin{cases} y^1 = x^1 + x^3 - 1 \\ y^2 = x^2 + 3 \\ y^3 = x^1 - 2x^2 + 6x^3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^1 = y^1 - 3y^2 + 2y^3 \\ x^2 = y^1 - y^3 + 5 \\ x^3 = y^2 - y^4 - 1 \\ x^4 = x^1 + 5x^5 + 3 \end{cases}$.

4. В A^4 даны две системы координат $\mathrm{I} = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_4$ и $\mathrm{II} = O\vec{e}_{1'}\vec{e}_{2'}\vec{e}_{3'}\vec{e}_{4'}$. $O'(1,-2,0,2)_I$, $\vec{e}_{1'}(1,2,0,0)_I$, $\vec{e}_{2'}(-1,3,1,1)_I$, $\vec{e}_{3'}(0,1,0,0)_I$, $\vec{e}_{4'}(0,0,0,1)_I$. Найти координаты точки $B(5,1,0,2)_{\mathrm{II}}$ в системе I.

5. В A^5 дана система координат и точки $M(1,-1,2,3,5)$, $P(0,-2,3,0,1)$, $K(1,-1,1,-1,0)$, $(MP, A) = -2$, $(PB, K) = 3$, $(CK, M) = \dfrac{1}{2}$. Найти координаты точек B, C.

6. Написать формулы преобразования координат в A^3 , если $\vec{e}_{1'}(1,0,0)$, $\vec{e}_{2'}(2,4,0)$, $\vec{e}_{3'}(-3,1,\frac{1}{2})$, $O'(0,0,0)$.

7. Записать формулы преобразования координат $x^i = \sum\limits_{j,k}(A^i_j B^j_k z^k + A^i_j b^j) + a^i$ (см. Пример 5) в матричном виде.

7. k-ПЛОСКОСТИ В A^n

Пусть W^k– k-мерное подпространство n-мерного векторного пространства V^n, где $1 \le k < n$, M_0 – точка аффинного пространства A^n над V^n.

Определение 1. <u>k-плоскостью</u> в A^n, заданной точкой M_0 и *направляющим подпространством* W^k, называется множество $\Pi^k(M_0, W^k) = \{M \in A^n : \overrightarrow{M_0M} \in W^k\}$.

1-плоскость называется *прямой*, а (n–1)-плоскость *гиперплоскостью*.

Основные *свойства*:

1°. Если точка $M_1 \in \Pi^k(M_0, W^k)$, то

$\Pi^k(M_1, W^k) = \Pi^k(M_0, W^k)$.

2°. $\Pi^k(M_0, W^k) \subset \Pi^m(M_0, W^m) \Leftrightarrow W^k \subset W^m$.

3° Любая k-плоскость $\Pi^k(M_0, W^k)$ является k-мерным аффинным пространством над векторным пространством W^k.

Пример 1.

В аффинной системе координат $O\vec{e}_i$ заданы точка $M_0(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ и подпространство $W^к$, системой (n–k) независимых однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{1i}p^i = 0, \\ a_{2i}p^i = 0, \\ .... \\ a_{n-ki}p^i = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Написать уравнение k-плоскости Π^k, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее подпространство $W^к$.

Решение. Произвольная точка $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ принадлежит плоскости Π^k тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}(x^1 - x_0^1, ..., x^n - x_0^n) \in W^k$, т.е. когда

$$\begin{cases} a_{1i}(x^i - x_0^i) = 0, \\ a_{2i}(x^i - x_0^i) = 0, \\ .... \\ a_{n-ki}(x^i - x_0^i) = 0. \end{cases} \qquad (7.1)$$

Таким образом, (7.1) – *уравнения плоскости* $\Pi^k(M_0, W^k)$.

Пример 2.

Доказать, что множество точек пространства A^n, координаты которых удовлетворяют совместной системе (n–k) независимых линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1i}x^i + b_1 = 0, \\ a_{2i}x^i + b_2 = 0, \\ .... \\ a_{n-ki}x^i + b_{n-k} = 0, \end{cases} \qquad (7.2)$$

есть k-плоскость, направляющее подпространство которой задается системой (1).

Решение. Так как система (6.4) совместна, то она имеет хотя бы одно решение $(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$, т.е.

$$\begin{cases} a_{1i}x_0^{\ i} + b_1 = 0, \\ a_{2i}x_0^{\ i} + b_2 = 0, \\ \quad .... \\ a_{n-ki}x_0^{\ i} + b_{n-k} = 0. \end{cases}$$

Выражая отсюда $b_1, b_2, .., b_n$ и подставляя в (7.2), получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{1i}(x^i - x_0^i) = 0, \\ a_{2i}(x^i - x_0^i) = 0, \\ \quad .... \\ a_{n-ki}(x^i - x_0^i) = 0, \end{cases}$$

которая представляет собой уравнения k-плоскости $\Pi^k(M_0, W^k)$ (см. (7.1)). Уравнения (7.2) называются *общими уравнениями k-плоскости*.

Пример 3.

В аффинной системе координат $O\vec{e}_i$ заданы точка $M_0(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ и подпространство $W^k = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)$, где $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n)$, $\vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n)$, $\ldots, \vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n)$. Написать уравнения k-плоскости $\Pi^k(M_0, W^k)$.

Решение.

Произвольная точка

$M(x^1, x^2, ..., x^n) \in \Pi^k \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}(x^1 - x_0^1, ..., x^n - x_0^n) \in W^k \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + ... + t^k\vec{a}_k$, т.е.

в координатном виде:

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + t^1a_1^1 + t^2a_2^1 + ... + t^ka_k^1, \\ x^2 = x_0^2 + t^1a_1^2 + t^2a_2^2 + ... + t^ka_k^2 \\ \quad .... \\ x^n = x_0^n + t^1a_1^n + t^2a_2^n + ... + t^ka_k^n. \end{cases} \qquad (7.3)$$

где параметры $t^1, t^2, ..., t^k$ пробегают все вещественные значения. Уравнения (7.3) называются *параметрическими уравнениями k-плоскости.*

Замечание. Если исключить из уравнений (7.3) все параметры, то, очевидно, получим общие уравнения плоскости $\Pi^k(M_0, W^k)$.

Пример 4.

В аффинной системе координат $O\vec{e}_i$ заданы точка $M_0(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ и подпространство $W^{n-1} = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1})$, где $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n)$, $\vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n)$, $\ldots, \vec{a}_{n-1}(a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, \ldots, a_{n-1}^n)$. Доказать, что уравнение гиперплоскости $\Pi^{n-1}(M_0, W^{n-1})$ можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_{n-1}^1 & x^1 - x_0^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_{n-1}^2 & x^2 - x_0^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_{n-1}^n & x^n - x_0^n \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.4)$$

Решение. Точка

$M(x^1, x^2, ..., x^n) \in \Pi^{n-1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + ... + t^{n-1}\vec{a}_{n-1} \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}, \overrightarrow{M_0M}$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_{n-1}^1 & x^1 - x_0^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_{n-1}^2 & x^2 - x_0^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_{n-1}^n & x^n - x_0^n \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 5.

Составить общие уравнения прямой $\Pi^1(M_0, W^1)$ в A^4, если $M_0(1,-1,1,-1)$ и

$$W^1: \begin{cases} p^1 + 2p^2 + p^4 = 0, \\ p^1 - p^2 - p^3 - p^4 = 0, \\ 4p^1 + 2p^2 - p^3 + 5p^4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

С учетом (7.1), получаем

$$\Pi^1: \begin{cases} (x^1 - 1) + 2(x^2 + 1) + (x^4 + 1) = 0, \\ (x^1 - 1) - (x^2 + 1) - (x^3 - 1) - (x^4 + 1) = 0, \\ 4(x^1 - 1) + 2(x^2 + 1) - (x^3 - 1) + 5(x^4 + 1) = 0 \end{cases}$$

или

$$\Pi^1: \begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^4 + 2 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^3 - x^4 - 2 = 0, \\ 4x^1 + 2x^2 - x^3 + 5x^4 + 4 = 0. \end{cases}$$

- общие уравнения плоскости $\Pi^1(M_0, W^1)$.

Пример 6.

Составить параметрические уравнения плоскости $\Pi^2(M_0, W^2)$ в A^4, если $M_0(1,-3,2,1)$ и $W^2 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где $\vec{a}_1(-1,2,3,-5)$, $\vec{a}_2(0,4,2,3)$.

Решение. С учетом (7.3), получаем

$$x^1 = 1 - t^1$$

$$x^2 = -3 + 2t^1 + 4t^2$$

$$x^3 = 2 + 3t^1 + 2t^2$$

$$x^4 = 1 - 5t^1 + 3t^2$$

- параметрические уравнения плоскости $\Pi^2(M_0, W^2)$.

Пример 7.

В A^5 даны параметрические уравнения Π^2 и общие уравнения Π^3:

$$\Pi^2: \begin{cases} x^1 = 2 + t^1 + 2t^2 \\ x^2 = -1 - t^1 - t^2 \\ x^3 = t^1 - 3t^2 \\ x^4 = 3 + 2x^1 + t^2 \\ x^5 = 4 - 3t^1 + t^2 \end{cases},$$

$$\Pi^3: \begin{cases} x^1 + x^2 + 3x^3 - x^4 + x^5 = 1 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 + 2x^4 = 2 \end{cases}.$$

Найти

а) общие уравнения Π^2;

б) параметрические уравнения Π^3.

Решение.

а) Из пяти параметрических уравнений Π^2 выбираем два уравнения, например, первое и второе, и выражаем t^1 и t^2 через x^1 и x^2. Найденные выражения подставляем в оставшиеся три уравнения. Получаем

$$\Pi^2: \begin{cases} 4x^1 + 5x^2 + x^3 = 3, \\ x^1 + 3x^2 + x^4 = 2, \\ 4x^1 + 7x^2 - x^5 = -3. \end{cases}$$

б) Из общих уравнений Π^3 выражаем x^1 и x^2 через x^3, x^4, x^5. Затем обозначаем $x^3 = t^1$, $x^4 = t^2$, $x^5 = t^3$ и подставляем эти обозначения в найденные выражения для x^1 и x^2. Получаем

$$\Pi^3 : \begin{cases} x^1 = 3 - 2t^1 - t^2 - t^3 \\ x^2 = -\dfrac{7}{3}t^1 - \dfrac{2}{3}t^2 \\ x^3 = t^1 \\ x^4 = t^2 \\ x^5 = t^3 \end{cases}$$

Пример 8.

В A^4 даны 2-плоскости

$$\Pi^2 : \begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 + 3x^4 = 2, \\ 2x^1 - x^2 + 3x^3 + x^4 = 4, \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\Pi_*^2 : \begin{cases} x^1 = 1 + t^1 + 2t^2, \\ x^2 = 2 - t^1 + t^2, \\ x^3 = -1 - 3t^1 + 3t^2, \\ x^4 = 2 + t^1 - t^2. \end{cases} \quad . \quad (3)$$

а) Найти точки, принадлежащие этим плоскостям;

б) Найти векторы, принадлежащие направляющим подпространствам этих плоскостей;

в) Проверить, принадлежат ли точка M(1,2,-1,3) этим плоскостям;

г) Проверить, принадлежит ли вектор $\vec{a}(4,-1,-3,1)$ направляющим подпространствам этих плоскостей.

Решение.

а) Чтобы найти координаты точки $M_1 \in \Pi^2$, надо придать двум переменным из системы (3) конкретные значения и найти значения двух других переменных. Например, если $x^3 = x^4 = 0$, то $x^1 = 2, x^3 = 0$.

Чтобы найти координаты точки $M_2 \in \Pi^2{}_*$, надо придать параметрам t^1 и t^2 конкретные значения и из системы (4) найти координаты точки. Например, если $t^1 = 1, t^2 = 2$, то $x^1 = 4, x^2 = 3, x^3 = 2, x^4 = 1$.

б) Чтобы найти координаты вектора $\vec{a}$ из направляющего подпространства П^2 надо найти хотя бы одно ненулевое решение системы

$$W^2: \begin{cases} p^1 + 2p^2 - p^3 + 3p^4 = 0, \\ 2p^1 - p^2 + 3p^3 + p^4 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Чтобы найти координаты вектора $\vec{a}$ из направляющего подпространства плоскости П$^2{}_*$, надо найти его базис $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ из системы (4): $\vec{a}_1$(1, -1,-3,1), $\vec{a}_2$ (2,1,3,-1) и найти координаты вектора $\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2$ для конкретных значений α и β.

в) Чтобы проверить, принадлежит ли точка *M* плоскости П^2, надо проверить, удовлетворяют ли координаты этой точке системе (1).

Чтобы проверить, принадлежит ли точка *M* плоскости $\Pi^2{}_*$, надо в систему (2) подставить вместо x^i координаты точки М. Из двух уравнений найти t^1 и t^2. Если эти найденные значения t^1 и t^2 удовлетворяют двум оставшимся уравнениям, то точка $M \in \Pi^2{}_*$.

г) Вектор $\vec{a}$ принадлежит направляющему подпространству плоскости П^2, если его координаты удовлетворяют системе (4).

Вектор $\vec{a}$ принадлежит направляющему подпространству плоскости П$^2{}_*$, если он является линейной комбинацией базисных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Пример 9.

Точка В аффинного пространства A^n не принадлежит плоскости $\Pi^k(M_0, W^k)$. Доказать, что существует единственная (k+1)-плоскость Π^{k+1}, содержащая точку В и плоскость Π^k.

Решение. Точка $B \notin \Pi^k \Rightarrow \overrightarrow{M_0B} \notin W^k$. Плоскость $\Pi^{k+1}(B, W^{k+1})$, где $W^{k+1} = W^k \oplus L(\overrightarrow{M_0B})$, очевидно, содержит точку *B* и плоскость Π^k. Докажем ее единственность. Пусть $\Pi_*^{k+1}(B, W_*^{k+1})$ – плоскость, содержащая точку *B* и плоскость Π^k. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0B} \in W_*^{k+1}$ и $W^k \subset W_*^{k+1}$. Следовательно $W^k \oplus L(\overrightarrow{M_0B}) \subset W_*^{k+1} \Rightarrow W^{k+1} = W_*^{k+1}$, т.е. $\Pi^{k+1} = \Pi_*^{k+1}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В A^5 составить уравнения плоскости:

а) $\Pi^3(M_0, W^3)$, если $M_0(1,2,-3,0,5)$ и $W^3 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, где $\vec{a}_1(1,0,1,0,1)$, $\vec{a}_2(2,1,0,3,4)$, $\vec{a}_3(0,2,-3,0,5)$;

б) $\Pi^2(M_0, W^2)$, если M_0 $(2,-1,3,4,1)$ и W^2: $\begin{cases} p^1 + p^2 - p^3 - p^5 = 0, \\ 2p^1 + p^2 + 3p^3 + p^4 - 2p^5 = 0, \\ 3p^1 - p^2 - p^3 - p^4 + p^5 = 0. \end{cases}$

2. Перейти от одного способа задания плоскости к другому

а) В A^4 Π^3 : $\begin{cases} x^1 = 2 + t^1 + t^2 - t^3, \\ x^2 = 1 + 2t^1 - t^2 + 4t^3, \\ x^3 = -3 + t^1 - t^2, \\ x^4 = 5 - 3t^1 - 2t^2 + t^3. \end{cases}$

б) В A^5 Π^3: $\begin{cases} 2x^1 - x^2 - x^3 + 5x^5 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + x^4 + x^4 - x^5 = 1, \\ 4x^1 + 3x^2 + 2x^3 + 2x^4 - 3x^5 = 0. \end{cases}$

3. В A^5 даны плоскости

Π^3: $\begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 + x^4 - 3x^5 = 1, \\ x^1 - x^2 + 2x^3 - x^4 + x^5 = 2, \end{cases}$

$\Pi^4{}_*$: $\begin{cases} x^1 = 1 + t^1 + t^4 \\ x^2 = 2 - t^1 - 2t^3 \\ x^3 = 3 \\ x^4 = -1 + t^1 + t^2 + t^3 + t^4 \\ x^5 = -2 + t^3 + 3t^4 \end{cases}$

а) Найти точки, принадлежащие этим плоскостям.

б) Найти векторы, принадлежащие направляющим подпространствам этих плоскостей.

в) Проверить, принадлежат ли точка M(5/4, 4/3, 0,1,2,) этим плоскостям.

г) Проверить, принадлежит ли вектор $\vec{a}$(1/3, 1, -1/3, 1,1) направляющим подпространствам этих плоскостей.

4. Составить уравнения плоскости $П^3$ в A^5, если M_1(1,-1,2,3,0), M_2(0,1,0,1,0), M_3(2,4,1,0,1) $\in П^3$ и $\vec{a}$ (2,1,0,1,-2) $\in W^3$.

5. Составить уравнения плоскости $П^2$ в A^4, если A(2,3,-1,2), B(1,0,0,0), C(4,1,-3,4) $\in П^2$.

6. Составить уравнения плоскости $П^2$ в A^4, если A(2,1,0,-1)$\in П^2$,

$$П^1: \begin{cases} x^1 = 1 + t, \\ x^2 = -3 - 4t, \\ x^3 = 2 - t, \\ x^4 = 7t. \end{cases}$$

и $П^1 \in П^2$.

7. Точки M_1, M_2, …, $M_к$ аффинного пространства A^n называются <u>линейно независимыми</u>, если система векторов $\{\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, ..., \overrightarrow{M_1M_к}\}$ линейно независима. Докажите, что линейная независимость точек M_1, M_2, …, $M_к$ не зависит от порядка выбора этих точек.

8. В A^n даны k+1 линейно независимых точек M_1, M_2, …, $M_{к+1}$, где $k+1 \le n$. Доказать, что существует одна и только одна k-плоскость, проходящая через эти точки.

9. В репере $O\vec{e}_i$ в A^4 даны точки $A_0(1,0,1,0)$, $A_1(2,1,2,1)$, $A_2(0,0,1,2)$, $A_3(1,2,1,-1)$. Доказать, что эта система точек линейно независима.

8. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Определение 1. Непересекающиеся плоскости $\Pi^{\kappa}(M_1,\mathrm{W}^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(M_2,\mathrm{W}^{m})$ в A^{n} называются <u>скрещивающимися</u>, если $\mathrm{W}^{\kappa}\cap\mathrm{W}^{m}=\{\vec{0}\}$.

Определение 2. Непересекающиеся плоскости $\Pi^{\kappa}(M_1,W^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(M_2,W^{m})$ в A^{n} $(\kappa\le m)$ называются <u>полностью параллельными</u>, если $\mathrm{W}^{\kappa}\cap\mathrm{W}^{m}=\mathrm{W}^{\kappa}$.

Определение 3. Непересекающиеся плоскости $\Pi^{\kappa}(M_1,\mathrm{W}^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(M_2,\mathrm{W}^{m})$ в A^{n} $(\kappa\le m)$ называются <u>частично параллельными</u>, если $\mathrm{W}^{\kappa}\cap\mathrm{W}^{m}=\mathrm{W}^{s}$, где $0<s<\kappa$.

Пример 1.

В A^{n} даны общие уравнения плоскостей $\Pi^{\kappa}(M_1,W^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(M_2,W^{m})$:

$$\Pi^{k}\colon\begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_n^1x^n=a^1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_1^{n-k}x^1+a_2^{n-k}x^2+\ldots+a_n^{n-k}x^n=a^{n-k}.\end{cases}\qquad(1)$$

$$\Pi^{m}\colon\begin{cases} b_1^1x^1+b_2^1x^2+\ldots+b_n^1x^n=b^1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_1^{n-m}x^1+b_2^{n-k}x^2+\ldots+b_n^{n-m}x^n=b^{n-m}.\end{cases}\qquad(2)$$

Выяснить их взаимное расположение.

Решение. Чтобы выяснить пересекаются или нет плоскости Π^{κ} и Π^{m}, надо выяснить имеет ли решения система, состоящая из всех уравнений (1) и (2):

$$\Pi^{\kappa}\cap\Pi^{m}:\begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_n^1x^n=a^1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_1^{n-k}x^1+a_2^{n-k}x^2+\ldots+a_n^{n-k}x^n=a^{n-k},\\ b_1^1x^1+b_2^1x^2+\ldots+b_n^1x^n=b^1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_1^{n-m}x^1+b_2^{n-m}x^2+\ldots+b_n^{n-m}x^n=b^{n-m}.\end{cases}\qquad(3)$$

I) Пусть система (3) совместна, т.е. плоскости Π^{κ} и Π^{m} пересекаются. Как известно, система уравнений совместна тогда и только когда, когда $r=R$, где r – ранг основной матрицы, а R – ранг расширенной матрицы системы. Без ограничения общности, допустим, что $\dim \Pi^m \geq \dim \Pi^к$, т.е. $m \geq к$ или $n–к \geq n – m$. Тогда в (3) $n–к \leq r \leq n$.

а) Если $r = R = n$, то система (3) имеет единственное решение, следовательно, $\Pi^к \cap \Pi^m = \{M\}$.

б) Если $r = R = n–к$, то в системе (3) первые $(n – к)$ уравнений линейно независимы, а оставшиеся $(n–m)$ являются их линейными комбинациями. Поэтому все решения системы (1) являются решениями системы (2). Следовательно, $\Pi^к \subset \Pi^m$.

В) Если $r = R$ и $n – к < r < n$, то система (3) задает $(n – r)$-плоскость Π^{n-r} и только координаты всех общих точек плоскостей $\Pi^к$ и Π^m удовлетворяют этой системе. Следовательно $\Pi^к \cap \Pi^m = \Pi^{n-r}$.

II) Пусть система (3) несовместна, т.е. плоскости $\Pi^к$ и Π^m не пересекаются. Система уравнений несовместна тогда и только тогда, когда $r \neq R$. Чтобы выяснить взаимное расположение плоскостей $\Pi^к$ и Π^m, найдем $W^к \cap W^m$.

Направляющие подпространства плоскостей (1) и (2) задаются, соответственно, системами:

$$W^k : \begin{cases} a_1^1 p^1 + a_2^1 p^2 + \ldots + a_n^1 p^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-k} p^1 + a_2^{n-k} p^2 + \ldots + a_n^{n-k} p^n = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

$$W^m : \begin{cases} b_1^1 p^1 + b_2^1 p^2 + \ldots + b_n^1 p^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1^{n-m} p^1 + b_2^{n-k} p^2 + \ldots + b_n^{n-m} p^n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Чтобы выяснить каким векторным подпространством является $W^к \cap W^m = W^s$, надо выяснить, что является решениями системы, состоящей из всех уравнений (4) и (5):

$$
W^s:\begin{cases}
a_1^1 p^1 + a_2^1 p^2 + \ldots + a_n^1 p^n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1^{n-k} p^1 + a_2^{n-k} p^2 + \ldots + a_n^{n-k} p^n = 0,\\
b_1^1 p^1 + b_2^1 p^2 + \ldots + b_n^1 p^n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_1^{n-m} p^1 + b_2^{n-m} p^2 + \ldots + b_n^{n-m} p^n = 0.
\end{cases} \qquad (6)
$$

Заметим, что в системе (6) ранги основной и расширенной матриц совпадают, поэтому $W^\kappa \cap W^m \neq \varnothing$.

а) Если $r = n$, то система (6) имеет единственное нулевое решение, поэтому $W^\kappa \cap W^m = \{\vec{0}\}$, следовательно, Π^κ и Π^m *скрещиваются*.

б) Если $r = n - \kappa$, то решения системы (6) совпадают с решениями системы (4), поэтому $W^\kappa \subset W^m$, следовательно, плоскости Π^κ и Π^m *полностью параллельны*.

в) Если $n-\kappa < r < n$, то только координаты всех общих векторов W^κ и W^m удовлетворяют линейно независимой однородной системе из r уравнений, поэтому $W^\kappa \cap W^m = W^{n-r}$ и следовательно, плоскости Π^κ и Π^m *частично параллельны*.

Пример 2.

Выяснить взаимное расположение многомерных плоскостей в A^5, если

$$
\Pi^2:\begin{cases}
x^1 + 2x^2 + x^3 - x^4 = 1\\
2x^1 + 3x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = -2\\
x^2 + x^4 = 4
\end{cases}
$$

и

$$
\Pi^3:\begin{cases}
x^1 - x^2 + 5x^3 - x^4 + 6x^5 = 0\\
2x^1 + 4x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 = -2
\end{cases}.
$$

Решение. Рассмотрим систему уравнений состоящую из уравнении плоскостей Π^2 и Π^3:

$$\begin{cases} x^1+2x^2+x^3-x^4=1 \\ 2x^1+3x^2+x^3+x^4+x^5=-2 \\ x^2+x^4=-2 \\ x^1-x^2+5x^3-x^4+6x^5=0 \\ 2x^1+4x^2+5x^3+2x^4+x^5=-2 \end{cases}.$$

Приведем ее расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 46 & 20 & -78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -196 & 194 \end{pmatrix}.$$

Значит, ранги основной и расширенной матриц $r = R=5$. Следовательно (см. Пример 1) плоскости пересекаются и $\Pi^2 \cap \Pi^3 = \{M\}$.

Пример 2.

Доказать, что если две различные гиперплоскости Π^{n-1} и $\Pi^{n-1}{}_*$ аффинного пространства A^n имеют общую точку, то $\Pi^{n-1} \cap \Pi^{n-1}{}_* = \Pi^{n-2}$.

Решение. Пусть общие уравнения гиперплоскостей имеют вид:

Π^{n-1}: $a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+a=0$;

$\Pi^{n-1}{}_*$: $b_1x^1+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+b=0$.

Тогда, пересечение Π^{n-1} и $\Pi^{n-1}{}_*$ задается системой:

$$\Pi^{n-1} \cap \Pi^{n-1}{}_*: \begin{cases} a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+a=0 \\ b_1x^1+b_2x^n+\ldots+b_nx^n+b=0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Так как гиперплоскости имеют общую точку, то система (1) совместна, т.е. $r = R$.

А так как гиперплоскости различны, то $r = R=2$. Следовательно, $\Pi^{n-1} \cap \Pi^{n-1}{}_* = \Pi^{n-2}$.

Пример 3.

Доказать, что через точку B, не принадлежащую k-плоскости $\Pi^{\kappa}(M_0,\mathrm{W}^{\kappa})$ аффинного пространства A^{n}, проходит единственная k-плоскость $\Pi^{\kappa}{}_{*}$, полностью параллельная Π^{κ}.

Решение. Докажем существование. Рассмотрим k-плоскость $\Pi^{\kappa}{}_{*}(B,\mathrm{W}^{\kappa})$ и покажем, что она не пересекается с плоскостью $\Pi^{\kappa}(M_0,\mathrm{W}^{\kappa})$. Допустим, что точка $M\in\Pi^{\kappa}\cap\Pi^{\kappa}{}_{*}$, т.е. $\overrightarrow{M_0M}\in\mathrm{W}^{\kappa}$ и $\overrightarrow{BM}\in\mathrm{W}^{\kappa}$. Тогда $\overrightarrow{M_0B}=\overrightarrow{M_0M}+\overrightarrow{MB}\in\mathrm{W}^{\kappa}$, т.е. $B\in\Pi^{\kappa}$, что противоречит условию задачи. Значит, плоскость $\Pi^{\kappa}{}_{*}$ не пересекается с плоскостью Π^{κ} и, значит, полностью параллельна ей.

Докажем единственность. Если плоскость $\Pi^{\kappa}{}_{**}(B,\ \mathrm{W}^{\kappa}{}_{**})$ полностью параллельна плоскости $\Pi^{\kappa}(M_0,\ \mathrm{W}^{\kappa})$, то $\mathrm{W}^{\kappa}\subset\ \mathrm{W}^{\kappa}{}_{**}$. Следовательно $\mathrm{W}^{\kappa}=\mathrm{W}^{\kappa}{}_{**}$, то есть $\Pi^{\kappa}{}_{**}=\Pi^{\kappa}{}_{*}$.

Пример 4.

В аффинном пространстве A^{n} даны две плоскости $\Pi^{\kappa}(M_1,\mathrm{W}^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(M_2,\mathrm{W}^{m})$. Доказать, что $\Pi^{\kappa}\cap\Pi^{m}\neq\emptyset$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M_2}\in\mathrm{W}^{\kappa}+\mathrm{W}^{m}$.

Решение. Пусть $\mathrm{W}^{k}=L(\vec a_1,\dots,\vec a_k)$ и $\mathrm{W}^{m}=L(\vec b_1,\dots,\vec b_m)$.

$(\Rightarrow)$ Пусть точка $M_3\in\Pi^{\kappa}\cap\Pi^{m}$, т.е.

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\alpha^1\vec a_1+\dots+\alpha^k\vec a_k \text{ и } \overrightarrow{M_2M_3}=\beta^1\vec b_1+\dots+\beta^m\vec b_m.$$

Тогда $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1M_3}+\overrightarrow{M_3M_2}=\alpha^1\vec a_1+\dots+\alpha^k\vec a_k-\beta^1\vec b_1-\dots-\beta^m\vec b_m\in\mathrm{W}^{\kappa}+\mathrm{W}^{m}$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\overrightarrow{M_1M_2}\in\mathrm{W}^{\kappa}+\mathrm{W}^{m}$, т.е.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\alpha^1\vec a_1+\dots+\alpha^k\vec a_k+\beta^1\vec b_1+\dots+\beta^m\vec b_m.$$

Рассмотрим точку $M_3\in\Pi^{\kappa}$: $\overrightarrow{M_1M_3}=\alpha^1\vec a_1+\dots+\alpha^k\vec a_k$.

Тогда $\overrightarrow{M_2M_3}=\overrightarrow{M_2M_1}+\overrightarrow{M_1M_3}=-\beta^1\vec b_1-\dots-\beta^m\vec b_m\in\mathrm{W}^{m}$, т.е $M_3\in\Pi^{m}$ и $M_3\in\Pi^{\kappa}\cap\Pi^{m}$.

Пример 5.

Пусть плоскости $\Pi^{k}(M_1,W^{k})$ и $\Pi^{m}(M_2,W^{m})$ в A^n имеют общую точку M_3. Доказать, что $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}=\Pi^{s}(M_3,W^{s})$, где $W^{s}=W^{k}\cap W^{m}$.

Решение. По условию задачи имеем: $\overrightarrow{M_1M_3}\in W^{k}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}\in W^{m}$.

1) Докажем, что $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}\subset\Pi^{s}$. Пусть $M\in\Pi^{k}\cap\Pi^{m}$, то есть $\overrightarrow{M_1M}\in W^{k}$ и $\overrightarrow{M_2M}\in W^{m}$. Тогда

$$\overrightarrow{M_3M}=\overrightarrow{M_3M_1}+\overrightarrow{M_1M_3}\in W^{k},\ \ \overrightarrow{M_3M}=\overrightarrow{M_3M_2}+\overrightarrow{M_2M}\in W^{m}\Rightarrow\overrightarrow{M_3M}\in W^{k}\cap W^{m}=W^{s},\text{ т.е.}$$

$$M\in\Pi^{s}\ \Rightarrow\ \Pi^{k}\cap\Pi^{m}\subset\Pi^{s}.$$

2) Докажем, что $\Pi^{s}\subset\Pi^{k}\cap\Pi^{m}$. Пусть $M\in\Pi^{s}$, т.е $\overrightarrow{M_3M}\in W^{s}=W^{k}\cap W^{m}$, т.е. $\overrightarrow{M_3M}\in W^{k}$ и $\overrightarrow{M_3M}\in W^{m}$. Тогда

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{M_1M_3}+\overrightarrow{M_3M}\in W^{k},\quad\overrightarrow{M_2M}=\overrightarrow{M_2M_3}+\overrightarrow{M_3M}\in W^{m}\Rightarrow M\in\Pi^{k},\ M\in\Pi^{m},\text{ т.е}$$

$$M\in\Pi^{k}\cap\Pi^{m}\ \Rightarrow\ \Pi^{s}\subset\Pi^{k}\cap\Pi^{m}.$$

Из 1) и 2) следует, что $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}=\Pi^{s}$.

Замечание. Если $W^{k}\cap W^{m}=\{\vec{0}\}$, то $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}=\{M_3\}$.

Пример 6.

В аффинном пространстве A^n даны плоскости $\Pi^{k}(M_1,W^{k})$ и $\Pi^{m}(M_2,W^{m})$ ($k\le m$), где $W^{k}=L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_k)$, $W^{m}=L(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_m)$. Пусть $p=rang(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m)$, $P=rang(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m,\overrightarrow{M_1M_2})$, $\dim(W^{k}\cap W^{m})=s$. Доказать, что

I) $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}\ne\varnothing\ \Leftrightarrow p=P=k+m-s$.

а) $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}=\Pi^{s}\ \Leftrightarrow p=P$ и $s=k+m-p$.

б) $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}=\{M_3\}\ \Leftrightarrow p=P$ и $s=0$, т.е. когда $p=P=k+m$.

II) $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}=\varnothing\Leftrightarrow P=p+1=k+m-s+1$.

а) Π^{k} и Π^{m} – полностью параллельны $\Leftrightarrow P=p+1=m+1$;

б) Π^{k} и Π^{m} – частично параллельны $\Leftrightarrow P=p+1<k+m+1$;

в) Π^{k} и Π^{m} – скрещиваются $\Leftrightarrow P=p+1=k+m+1$.

Решение. С учетом свойства 3° из п.2, имеем

$$p=\dim L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m)=\dim(L(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)+L(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m))=k+m-s.\ (*)$$

I) Из Пример 4 следует, что $\Pi^{k}\cap\Pi^{m}\ne\varnothing\Leftrightarrow p=P$, т.е. когда $p=P=k+m-s$.

Пункты а) и б) следуют из Пример 5 и (*).

II) Из Пример 4 следует, что $\Pi^{\kappa} \cap \Pi^{m} = \emptyset \Leftrightarrow p \neq P$, т.е. когда

$P = p + 1 = k + m - s + 1$.

а) Π^{k} и Π^{m} – полностью параллельны, т.е. $W^{\kappa} \cap W^{m} = W^{\kappa} \Leftrightarrow k = s$, т.е. когда

$P = p + 1 = m + 1$.

б) Π^{k} и Π^{m} – частично параллельны $\Leftrightarrow k > s$, т.е. когда $P = p + 1 < k + m + 1$.

в) Π^{k} и Π^{m} – скрещиваются, т.е. $W^{\kappa} \cap W^{m} = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow s = 0$, т.е. когда

$P = p + 1 = k + m + 1$.

Пример 7.

Выяснить взаимное расположение плоскостей Π^2 и Π^1, заданных параметрическими уравнениями

$$\Pi^2 : \begin{cases} x^1 = 2 + t^1 + 2t^2 \\ x^2 = -1 - t^1 - t^2 \\ x^3 = t^1 - 3t^2 \\ x^4 = 3 + 2x^1 + t^2 \\ x^5 = 4 - 3t^1 + t^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \Pi^1 : \begin{cases} x^1 = 1 + t, \\ x^2 = -3 - 4t, \\ x^3 = 2 - t, \\ x^4 = 7t. \\ x^5 = -1 + 3t \end{cases}$$

Решение. Имеем $\Pi^2(M_1, W^2)$, где $M_1(2,-1,0,3,4)$, $W^2 = L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, $\vec{b}_1(1,-1,1,2,-3)$, $\vec{b}_2(2,-1,-3,1,1)$ и $\Pi^1(M_2, W^1)$, где $W^1 = L(\vec{a}_1)$, $\vec{a}_1(1,-4,-1,7,3)$. Следовательно

$p = rang(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{b}_2) = 3$,

$P = rang(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}) = 4$.

Значит плоскости Π^2 и Π^1 скрещиваются (см. Пример 6).

Пример 9.

Найти пересечение гиперплоскости

$$\Pi^3 : 3x^1 + 2x^2 + x^3 - 2x^4 + 4 = 0, \qquad (1)$$

и прямой

$$\Pi^1 : \begin{cases} x^1 = 1 + t, \\ x^2 = -1 - 2t, \\ x^3 = 3t, \\ x^4 = 2 + t. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Подставив выражения x^1, x^2, x^3, x^4 из (2) в уравнение (1), найдем значения параметра t, соответствующего точке пересечения $П^1$ и $П^3$:

$$3(1+t)+2(-1-2t)+(3t)-2(2+t)+4=0,$$

т.е. $t=1$. Следовательно, $П^1 \cap П^3=\{C\}$, где $C(2,-3,3,3)$.

Пример 10.

Как могут быть расположены многомерные плоскости:

а) $П^3$ и $П^4$ в A^5; б) $П^2$ и $П^4$ в A^6; в) $П^3$ и $П^5$ в A^9.

Решение.

а) Общие уравнения плоскости $П^3$ в A^5 имеют вид:

$$\begin{cases} b_{11}x^1+\ldots+b_{15}x^5=b_1 \\ b_{21}x^1+\ldots+b_{25}x^5=b_2 \end{cases}, \qquad (1)$$

а общее уравнение $П^4$ в A^5:

$$a_1x^1+\ldots+a_5x^5=a\ , \qquad (2)$$

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений (1) и (2). Тогда ранги основной и расширенной матриц этой общей системы могут принимать значения 2 или 3.

Если $r=R=2$, то $П^3 \subset П^4$. Если $r=2$, $R=3$, то плоскости полностью параллельны. Если $r = R = 3$, то $П^3 \cap П^4 = П^2$.

Б) Ранги основной и расширенной матриц системы, состоящей из общих уравнений плоскостей $П^2$ *и* $П^4$ в A^6, могут принимать значения 4,5,6. Если $r = R = 4$, то $П^2 \subset П^4$. Если $r=4$, $R=5$ (или 6) то плоскости полностью параллельны. Если $r=5$, $R=6$, то плоскости частично параллельны. Если $r= R=6$, то плоскости имеют только одну общую точку, т.е. $П^2 \cap П^4 =\{M\}$.

в) Ранги основной и расширенной матриц системы, состоящей из общих уравнений плоскостей $П^3$ *и* $П^5$ в A^9, могут принимать значения 6,7,8,9. Если $r = R = 6$, то $П^3 \subset П^5$. Если $r = R=s$ и $6<s<9$, то $П^3 \cap П^5 = П^{9-s}$. Если $r=6<R$, то плоскости полностью параллельны. Если $r<R$ и $6<r<9$, то плоскости частично параллельны. Если $r<R$ и $r=9$, то плоскости скрещиваются. Если $r=R=9$, то $\Pi^3 \cap \Pi^5 = \{M\}$.

Пример 11.

Могут ли плоскости Π^4 и Π^5 в A^7 скрещиваться?

Решение. В A^7 плоскости Π^4 и Π^5 задаются, соответственно, системами трех и двух линейно независимых уравнений. Система для определения взаимного расположения этих плоскостей состоит из 5 уравнений и ее ранг r не больше 5. Следовательно, скрещиваться плоскости не могут, т.к. r не может быть равен 7.

Пример 12.

Доказать, что через две скрещивающиеся плоскости $\Pi^\kappa(M_1, W^\kappa)$ и $\Pi^m(M_2, W^m)$ ($k+m<n-1$) всегда проходит плоскость Π^{k+m+1} и не существует плоскости $\Pi^s \supset \Pi^\kappa$, $\Pi^s \supset \Pi^m$, $s \le k+m$.

Решение. Так как плоскости скрещиваются, то $W^\kappa \cap W^m = \{\vec{0}\}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} \notin W^\kappa \oplus W^m$ (см. Пример 4). Следовательно, подпространство $W^\kappa \oplus W^m \oplus L(\overrightarrow{M_1M_2})$ ($k+m+1$)-мерно. Плоскость $\Pi^{k+m+1}(M_1, W^{\kappa+m+1})$, где $W^{\kappa+m+1} = W^\kappa \oplus W^m \oplus L(\overrightarrow{M_1M_2})$, очевидно, содержит плоскости Π^k и Π^m.

Если плоскость Π^s с направляющим подпространством W^s ($s \le k+m$), содержит плоскости Π^k и Π^m, то $W^\kappa \subset W^s$, $W^m \subset W^s$ и $\overrightarrow{M_1M_2} \in W^s$. Следовательно,

$W^{\kappa+m+1} = W^\kappa \oplus W^m \oplus L(\overrightarrow{M_1M_2}) \subset W^s$. Но ($k+m+1$)-мерное подпространство не может содержатся в подпространстве размерности $s \le k+m$. Следовательно не существует плоскости Π^s, где $s \le k+m$, содержащей скрещивающиеся плоскости Π^k и Π^m.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Выяснить взаимное расположение многомерных плоскостей:

а) В A^5 $\Pi^3 : \begin{cases} 2x^1 - x^2 + x^3 - x^5 = -1 \\ x^1 + 2x^2 - x^4 - x^5 = 2 \end{cases}$ и

$\Pi^3{}_* : \begin{cases} x^1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 = 0 \\ 3x^1 - x^4 + x^5 = 4 \end{cases}$.

б) В A^4 $\Pi^2 : \begin{cases} x^1 + x^2 = 2 \\ x^3 + x^4 = 1 \end{cases}$ и

$\Pi^2{}_* : \begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 - 2x^4 = 0 \\ x^3 - x^4 = 3 \end{cases}$.

в) В A^5 $\Pi^2 : \begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 = 2 \\ 2x^1 - x^4 + x^5 = 1 \\ x^2 - 2x^3 = -7 \end{cases}$ и

$\Pi^4 : \{ x^1 - x^2 + 3x^3 - x^4 + x^5 = 4$.

г) В A^5 $\Pi^3 : \begin{cases} x^1 + 2x^2 - 3x^3 - 4x^4 = 2 \\ x^1 + x^2 - x^3 - x^4 = 1 \end{cases}$ и

$\Pi^3{}_* : \begin{cases} 2x^1 - x^2 + 3x^3 - 2x^4 = 0 \\ 4x^1 + 4x^2 - x^3 - x^4 = 3 \end{cases}$.

д) В A^4 $\Pi^1 : \begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \\ x^3 + x^4 = 1 \end{cases}$ и

$\Pi^2 : \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 3 \\ x^4 = -1 \end{cases}$

е) В A^5 Π^2: $\begin{cases} x^1+2x^2+x^3-x^4=1 \\ x^1-x^2+x^3-x^4=2 \\ x^4=0 \end{cases}$ и

$$\Pi^2{*}: \begin{cases} 2x^1+x^2=8 \\ 3x^2+2x^3-2x^4=1 \\ 2x^1-2x^2-2x^3-x^4=2 \end{cases}.$$

ж) В A^5 Π^3: $\begin{cases} x^1-3x^2+x^3+2x^5=0 \\ 2x^1-x^4+3x^5=2 \end{cases}$ и

$$\Pi^3{*}: \begin{cases} 4x^1+x^2-x^3+x^4+2x^5=1 \\ 5x^1+4x^2-2x^3+2x^4+4x^5=0 \end{cases}.$$

2. Выяснить взаимное расположение многомерных плоскостей:

а) Π^1: $\begin{cases} x^1=-2+t \\ x^2=2-t \\ x^3=1+2t \\ x^4=-3t. \end{cases}$ и Π^2: $\begin{cases} x^1=2+t^1+2t^2, \\ x^2=-1+t^1+t^2, \\ x^3=3+t^1-2t^2, \\ x^4=1-t^1+t^2. \end{cases}$

б) Π^2: $\begin{cases} x^1=2+t^1 \\ x^2=-1+2t^1+t^2 \\ x^3=3-3t^1 \\ x^4=-4+t^2 \\ x^5=t^2 \end{cases}$ и $\Pi^2{*}$: $\begin{cases} x^1=-1+t^1+3t^2 \\ x^2=2+t^1 \\ x^3=3+t^1+t^2 \\ x^4=1+2t^2 \\ x^5=-4-t^1-2t^2 \end{cases}$

3. Могут ли плоскости

а) Π^3 и Π^4 в A^8 пересекаться по прямой,

б) Π^6 и Π^7 в A^{12} быть полностью параллельны,

в) Π^1 и $\Pi^1{*}$ в A^4 быть частично параллельны,

г) Π^5 и Π^6 в A^7 пересекаться в точке.

4. Как могут быть расположены многомерные плоскости:

а) Π^2 и Π^4 в A^6,

б) Π^3 и Π^5 в A^6.

5. Доказать, что две любые плоскости Π^{κ} и Π^{m} в A^n содержатся в плоскости $\Pi^{\kappa+m+1}$.

6. Доказать, что если в A^n даны плоскости Π^{κ} (A,W^{κ}) и Π^{m} (B,W^{m}) и $W^{\kappa} \oplus W^{m} = V^{n}$, то плоскости Π^{κ} и Π^{m} пересекаются.

7. Доказать, что если в A^5 плоскости Π^2 и $\Pi^2{}_*$ имеют единственную общую точку, то существует единственная гиперплоскость, содержащая эти плоскости.

8. Доказать, что плоскости $\Pi^{\kappa}(M_1, W^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(M_2, W^{m})$ не пересекаются тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M_2} \notin W^{\kappa} + W^{m}$.

9. Доказать, что если две плоскости Π^{κ} и $\Pi^{k}{}_*$ аффинного пространства A^n принадлежат плоскости $\Pi^{\kappa+1}$ и $\Pi^{\kappa} \cap \Pi^{k}{}_* \neq \emptyset$, то $\Pi^{\kappa} \cap \Pi^{k}{}_* = \Pi^{\kappa-1}$.

9. ЕВКЛИДОВО n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Определение 1. Аффинное пространство A^n над векторным пространством V^n, называется <u>евклидовым n–мерным пространством</u>, если V^n– евклидово векторное пространство n–измерений. Евклидово n–мерное пространство обозначается через E^n.

Очевидно, что k-плоскость $\Pi^{\kappa}(M,W^{\kappa})$ в евклидовом пространстве E^n является k-мерным евклидовым пространством над W^{κ}.

Определение 2. <u>Расстоянием</u> $\rho(A,B)$ между точками A и B в E^n называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\rho(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|. \qquad (9.1)$$

<u>Расстоянием</u> между множествами F и F' в E^n называется число

$$\rho(F,F') = \inf_{\substack{M \in F \\ M' \in F'}} \rho(M,M') \qquad (9.2)$$

Основные *свойства*:

1°. $\forall A, B \in \mathrm{E}^{\mathrm{n}} \Rightarrow \rho(A,B) = \rho(B,A)$;

2°. Если $\rho(A,B) = 0$, то $A = B$;

3°. $\forall A, B, C \in \mathrm{E}^{\mathrm{n}} \Rightarrow \rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$.

4°. $\rho(A,B) + \rho(B,C) = \rho(A,C) \Leftrightarrow B$ лежит между A и C.

Определение 3. Система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n$ в E^{n} называется прямоугольной декартовой, если базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ ортонормированный.

В прямоугольной декартовой системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n$ расстояние между точками $A(x^1, x^2, ..., x^n)$ и $B(y^1, y^2, ..., y^n)$ вычисляется по формуле

$$\rho(A,B) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + ... + (y^n - x^n)^2}\,. \qquad (9.3)$$

Определение 4. Плоскости $\Pi^{\kappa}(A,W^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(B,W^{m})$ в E^{n} называются перпендикулярными, если $\exists \vec{x} \neq \vec{0} \in W^{\kappa} : \vec{x} \perp W^{m}$.

Определение 5. Плоскости $\Pi^{\kappa}(A,W^{\kappa})$ и $\Pi^{m}(B,W^{m})$ в E^{n} называются полностью перпендикулярными, если $W^{\kappa} \perp W^{m}$.

Если $\Pi^{\kappa} = \Pi^{1}$, то, очевидно, определения 4 и 5 совпадают.

Определение 6. Прямая Π^{1} называется перпендикуляром к плоскости Π^{κ}, если Π^{1} перпендикулярна плоскости Π^{κ} и $\Pi^{1} \cap \Pi^{\kappa} = \{M\}$.

Пример 1.

Доказать, что в E^{n} через любую точку B проходит единственная плоскость $\Pi^{n-\kappa}$ полностью перпендикулярная плоскости $\Pi^{\kappa}(A,\mathrm{W}^{\kappa})$ и $\Pi^{\kappa} \cap \Pi^{n-\kappa} = \{B_1\}$.

Решение.

1) Докажем сначала существование и единственность. Как известно, $\mathrm{W}^{n-\kappa} = (\mathrm{W}^{\kappa})^{\perp}$ – единственное (n–k)-мерное подпространство ортогональное подпространству W^{κ}. Следовательно, плоскость $\Pi^{n-\kappa}(B,\mathrm{W}^{n-\kappa})$, где $\mathrm{W}^{n-\kappa} = (\mathrm{W}^{\kappa})^{\perp}$, является единственной (n–k)-плоскостью, проходящей через точку B и полностью перпендикулярной плоскости $\Pi^{\kappa}(A,\mathrm{W}^{\kappa})$.

2) Так как $W^k + W^{n-k} = W^k + (W^k)^{\perp} = V^n$ и $W^k \cap W^{n-k} = \{\vec{0}\}$ (см. Пример 3 п.4) $\Rightarrow$ $\Pi^\kappa \cap \Pi^{n-\kappa} = \{B_1\}$ (см. Примеры 4 и 5 п.8).

Пример 2.

Доказать, что через точку $B \notin \Pi^\kappa$ *в* E^n можно провести единственный перпендикуляр Π^1 к плоскости Π^κ.

Решение. Пусть $\Pi^\kappa = \Pi^\kappa(A, W^\kappa)$. Тогда плоскость $\Pi^{n-\kappa}(B, W^{n-\kappa})$, где $W^{n-\kappa} = (W^\kappa)^{\perp}$, полностью перпендикулярна к плоскости Π^κ и $\Pi^\kappa \cap \Pi^{n-\kappa} = \{B_1\}$ (см. Пример 1). Очевидно, что все прямые, проходящие через точку B и перпендикулярные плоскости Π^κ, содержатся в плоскости $\Pi^{n-\kappa}$. Следовательно, прямая (BB_1) −единственный перпендикуляр к плоскости Π^κ.

Замечание. Точка B_1 называется ортогональной проекцией точки B на плоскость Π^κ .

Пример 3. Доказать, что если каждая из двух несовпадающих плоскостей Π^κ и $\Pi^\kappa{}_*$ полностью перпендикулярна плоскости $\Pi^{n-\kappa}$, то Π^κ и $\Pi^\kappa{}_*$ полностью параллельны.

Решение.

Пусть $\Pi^\kappa(M_1, W^\kappa)$, $\Pi^\kappa{}_*(M_2, W^k{}_*)$, $\Pi^{n-\kappa}(M_0, W^{n-\kappa})$. Тогда, по условию

$W^\kappa \perp W^{n-\kappa}$ и $W^k{}_* \perp W^{n-\kappa}$. Следовательно $W^\kappa = (W^{n-\kappa})^{\perp}$ и $W^k{}_* = (W^{n-\kappa})^{\perp}$. Значит $W^\kappa = W^k{}_*$. Так как плоскости Π^κ и $\Pi^\kappa{}_*$ различны, то они полностью параллельны.

Пример 4.

В прямоугольной декартовой системе координат $O\vec{e}_i$ заданы точка $M_0(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$ и подпространство $W^k = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)$, где $\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, ..., a_1^n)$, $\vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, ..., a_2^n), \ldots, \vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, ..., a_k^n)$. Доказать, что уравнения (n−k)-плоскости $\Pi^{n-k}(M_0, W^{n-k})$,где $W^{n-k} = (W^k)^{\perp}$, имеют вид

$$\begin{cases} a_1^1(x^1 - x_0^1) + a_1^2(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_1^n(x^n - x_0^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k^1(x^1 - x_0^1) + a_k^2(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_k^n(x^n - x_0^n) = 0. \end{cases} \qquad (9.4)$$

Решение.

Имеем

$$M(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \Pi^{n-k} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}(x^1 - x_0^1, \ldots, x^n - x_0^n) \in W^{n-k} = (W^k)^{\perp} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{a}_1, \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{a}_2, \ldots, \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{a}_k\}, \text{ т.е. когда } \begin{cases} \vec{a}_1 \overrightarrow{M_0M} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \vec{a}_k \overrightarrow{M_0M} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^1(x^1 - x_0^1) + a_1^2(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_1^n(x^n - x_0^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k^1(x^1 - x_0^1) + a_k^2(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_k^n(x^n - x_0^n) = 0. \end{cases}$$

Пример 5.

Доказать, что расстояние от точки B до плоскости Π^k равно расстоянию между точками B и B_1, где B_1–ортогональная проекция точки B на плоскость Π^k.

Решение. Для любой точки $M \in \Pi^k$ и $M \neq B_1$ имеем $\overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{B_1M}$. Следовательно

$$\overrightarrow{BM}^2 = (\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1M})^2 = \overrightarrow{BB_1}^2 + \overrightarrow{B_1M}^2 \Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 > \overrightarrow{BB_1}^2 \Rightarrow |\overrightarrow{BM}| > |\overrightarrow{BB_1}|, \text{ т.е.}$$

$$\rho(B, B_1) = \inf_{M \in \Pi^k} \rho(B, M), \text{ т.е. } \rho(B, B_1) = \rho(B, \Pi^k).$$

Пример 6.

Доказать, что расстояние от точки $B(x_0^{\,1}, x_0^{\,2}, \ldots, x_0^{\,n})$ до гиперплоскости

Π^{n-1}: $a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + b = 0$

вычисляется по формуле

$$\rho(B, \Pi^{n-1}) = \frac{|a_1x_0^{\,1} + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + b|}{\sqrt{(a_1)^2 + \ldots + (a_n)^2}}. \qquad (9.4)$$

Замечание. Во всех задачах этого пункта, где заданы координаты точек и уравнения плоскостей, предполагается, что данная система координат прямоугольная декартова.

Решение. Пусть точка $B_1(x_1^{\,1}, x_1^{\,2}, ..., x_1^{\,n})$ – ортогональная проекция точки B на плоскость Π^K. Направляющее подпространство плоскости Π^{n-1} задается уравнением

$$W^{n-1}:\ a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0,$$

Следовательно, вектор $\vec{h}(a_1, a_2, ..., a_n)$ – базис подпространства $(W^{n-1})^{\perp}$ и коллинеарен вектору $\overrightarrow{B_1B_0}$.

По определению скалярного произведения

$$\overrightarrow{B_1B_0}\ \vec{h} = (x_0^{\,1} - x_1^1)a_1 + (x_0^{\,2} - x_1^2)a_2 + ... + (x_0^{\,n} - x_1^n)a_n$$

$$= a_1x_0^{\,1} + a_2x_0^{\,2} + ... + a_nx_0^{\,n} - (a_1x_1^1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n) =$$

$$= a_1x_0^{\,1} + a_2x_0^{\,2} + ... + a_nx_0^{\,n} + b.$$

С другой стороны, согласно (4.2)

$$\overrightarrow{B_1B_0}\ \vec{h} = \left|\overrightarrow{B_1B_0}\right|\,\left|\vec{h}\right|\cos(\overrightarrow{B_1B_0}, \vec{h}) = \pm\left|\overrightarrow{B_1B_0}\right|\,\left|\vec{h}\right| = \pm\,\rho(B, \Pi^{n-1})\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + ... + (a_n)^2}\ .$$

Следовательно,

$$\rho(B, \Pi^{n-1}) = \frac{\left|a_1x_0^{\,1} + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n + b\right|}{\sqrt{(a_1)^2 + ... + (a_n)^2}}\ .$$

Пример 7.

Доказать, что расстояние от точки B до гиперплоскости $\Pi^{n-1}(M_0, W^{n-1})$, где $W^{n-1} = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1})$, вычисляется по формуле

$$\rho(B, \Pi^{n-1}) = \frac{\left|(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., a_{n-1,} \overrightarrow{M_0B})\right|}{\left|[\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}]\right|}. \qquad (9.5)$$

или

$$\rho(B, \Pi^{n-1}) = \sqrt{\frac{G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}, \overrightarrow{M_0B})}{G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1})}}\ . \qquad (9.6)$$

где $G(.....)$ – определитель Грама.

Решение. Пусть B_1 – ортогональная проекция точки B на гиперплоскость Π^{n-1}. Тогда вектор $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}]$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{BB_1}$. Значит

$$[\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1}]\overrightarrow{BB_1} = \pm\|[\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1}]\|\left|\overrightarrow{BB_1}\right| = \pm\|[\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1}]\|\rho(B,\Pi^k).$$

С другой стороны (с учетом свойств 5° и 2° из п.5),

$$[\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1}]\overrightarrow{BB_1} = (\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1},\overrightarrow{BB_1}) = (\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1},\overrightarrow{M_0B_1}-\overrightarrow{M_0B}) = -(\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1},\overrightarrow{M_0B}).$$

Следовательно,

$$\rho(B,\Pi^{n-1}) = \frac{\left|(\vec a_1,\vec a_2,...,a_{n-1,}\overrightarrow{M_0B})\right|}{\|[\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_{n-1}]\|}.$$

Формула (9.6) следует из (9.5) и (5.5), (5.6).

Пример 8.

Доказать, что расстояние от точки B до k-плоскости $\Pi^k(M_0,W^k)$, где $W^k = L(\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_k)$, вычисляется по формуле

$$\rho(B,\Pi^k) = \sqrt{\frac{G(\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_k,\overrightarrow{M_0B})}{G(\vec a_1,\vec a_2,...,\vec a_k)}}. \qquad (9.7)$$

Решение. Пусть точка $B\notin\Pi^k$. Тогда (см. Пример 9 из п.6), существует (k+1)-плоскость Π^{k+1}, содержащая точку B и плоскость Π^k. Рассмотрим Π^{k+1} как евклидово пространство. В этом евклидовом пространстве, согласно (9.6), расстояние от точки B до $\Pi^k(M_0,W^k)$ вычисляется по формуле (9.7).

Пример 9.

Вычислить координаты ортогональной проекции B_1 точки B(1,1,1,-1) на гиперплоскость Π: $x^1+x^2-2x^3+x^4-1=0$.

Решение. Найдем уравнения прямой Π^1, проходящей через точку B и полностью перпендикулярной гиперплоскости Π. Вектор $\vec h(1,1,-2,1)$ ортогонален гиперплоскости Π. Следовательно, параметрические уравнения прямой Π^1 имеют вид:

$$\Pi^1:\begin{cases} x^1 = 1+t \\ x^2 = 1+t \\ x^3 = 1-2t \\ x^4 = -1+t \end{cases}$$

Согласно Пример 2, ортогональная проекция $B_1 = \Pi^1 \cap \Pi$. Подставив выражения x^1, x^2, x^3, x^4 из уравнений прямой в уравнение гиперплоскости Π, получим $t = \frac{2}{7}$.

Следовательно $B_1(\frac{9}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7})$ – ортогональная проекция точки B.

Пример 10.

Вычислить координаты ортогональной проекции точки $B(2,-1,3,1)$ на прямую

$$\Pi^1: \begin{cases} x^1 = -2 + t \\ x^2 = 2 - t \\ x^3 = 1 + 2t \\ x^4 = -3t. \end{cases}$$

Решение. Найдем уравнение гиперплоскости Π^3, проходящей через точку B и полностью перпендикулярной прямой Π^1. Так как вектор $\vec{a}(1,-1,2,-3)$ является базисом направляющего подпространства прямой Π^1, то точка $M(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \Pi^3 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \vec{a}$, т.е.

$$\Pi^3: \ x^1 - x^2 + 2x^3 - 3x^4 - 6 = 0.$$

Подставив выражения x^1, x^2, x^3, x^4 из уравнения прямой в уравнение гиперплоскости Π^3, получим $t = \frac{8}{15}$. Следовательно, $B_1(-\frac{22}{15}, \frac{22}{15}, \frac{31}{15}, -\frac{24}{15})$ – ортогональная проекция точки B.

Пример 11.

Вычислить координаты ортогональной проекции точки $B(2,-1,3,1)$ на плоскость

$$\Pi^2: \begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 - x^4 + 1 = 0, \\ 2x^1 + x^2 - 2x^3 + x^4 + 2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Найдем уравнения плоскости $\Pi^2{*}$, проходящей через точку B и полностью перпендикулярной плоскости Π^2. Векторы $\vec{a}_1(1,1,1,-1)$ и $\vec{a}_2(2,1,-2,1)$ ортогональны плоскости Π^2 и образуют базис направляющего подпространства плоскости $\Pi^2{*}$ (см. Пример 5 из п.5). Следовательно, параметрические уравнения плоскости $\Pi^2{*}$ имеют вид:

$$\Pi^2{}_*:\begin{cases} x^1 = 2 + t^1 + 2t^2, \\ x^2 = -1 + t^1 + t^2, \\ x^3 = 3 + t^1 - 2t^2, \\ x^4 = 1 - t^1 + t^2. \end{cases}$$

Подставив выражения x^1, x^2, x^3, x^4 из уравнений плоскости $\Pi^2{}_*$ в уравнения гиперплоскости Π^2, получим $t^1 = -1$, $t^2 = 0$. Следовательно $B_1(1,-2,2,2)$ – ортогональная проекция точки B.

Пример 12.

Вычислить расстояние от точки $B(1,3,5,-1,2)$ до координатных плоскостей $Ox^1x^2x^3x^4$ и $Ox^1x^2x^3$.

Решение.

1) Общее уравнение гиперплоскости $Ox^1x^2x^3x^4$, очевидно, имеет вид: $x^5 = 0$. Воспользовавшись формулой (9.4), получаем

$$\rho(B, Ox^1x^2x^3x^4) = \frac{|2|}{1} = 2.$$

2) С учетом формулы (9.7), имеем:

$$\rho(B, Ox^1x^2x^3) = \sqrt{\frac{G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \overrightarrow{OB})}{G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}}.$$

$$G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 40 \end{vmatrix} = 25.$$

$$G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно

$$\rho(B, Ox^1x^2x^3) = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Доказать, что если плоскость Π^k перпендикулярна плоскости Π^m, то плоскость Π^m перпендикулярна Π^k.

2. В евклидовом пространстве E^4 дана плоскость

$$\Pi^2:\begin{cases}2x^1+x^2+x^3-x^4+5=0\\ x^1+x^2-2x^3+2x^4-1=0\end{cases}$$

и точка $M_0(1,-3,2,5)$. Написать уравнения 2-плоскости, проходящей через точку M_0 и полностью ортогональной Π^2.

3. В E^4 дана точка $M(2,1,3,-1)$ и гиперплоскость Π^3: $x^1+x^2-2x^3-x^4+1=0$. Написать общие уравнения прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной плоскости Π^3.

4. В E^5 даны плоскости Π^2 и $\Pi^2{*}$. Доказать, что они полностью перпендикулярны.

$$\Pi^2:\begin{cases}x^1=2+t^1\\ x^2=-1+2t^1+t^2\\ x^3=3-3t^1\\ x^4=-4+t^2\\ x^5=t^2\end{cases}$$

$$\Pi^2{*}:\begin{cases}x^1=-1+t^1+3t^2\\ x^2=2+t^1\\ x^3=3+t^1+t^2\\ x^4=1+2t^2\\ x^5=-4-t^1-2t^2\end{cases}$$

5. Вычислить координаты ортогональной проекции B_1 точки $B(0,-1,2,1)$ на гиперплоскость Π: $2x^1+x^2+x^4-3=0$.

6. В E^5 даны плоскости Π^2 и $\Pi^2{*}$. Доказать, что они полностью перпендикулярны.

$$\Pi^2: \begin{cases} x^1 = 2 + t^1 \\ x^2 = -1 + 2t^1 + t^2 \\ x^3 = 3 - 3t^1 \\ x^4 = -4 + t^2 \\ x^5 = t^2 \end{cases}$$

$$\Pi^2{}_*: \begin{cases} x^1 = -1 + t^1 + 3t^2 \\ x^2 = 2 + t^1 \\ x^3 = 3 + t^1 + t^2 \\ x^4 = 1 + 2t^2 \\ x^5 = -4 - t^1 - 2t^2 \end{cases}$$

7. Вычислить расстояние от точки A до плоскости Π^2:

а) $A(2,3,-1,1)$, $\Pi^2: \begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 + x^4 = 0 \\ -x^1 + 2x^2 + x^3 - 1 = 0; \end{cases}$

б) $A(3,-1,1,0)$, $\Pi^2: \begin{cases} x^1 + 2x^2 + x^4 = 0 \\ -2x^1 + 1 = 0. \end{cases}$

8. Найти центр и радиус гиперсферы в E^4, проходящей через точки $A(0,0,1,1)$, $B(-1,-1,0,0)$, $C(2,1,0,-1)$, $Д(1,1,2,3)$, $E(-2,1,3,-1)$.

9. Написать уравнения общего перпендикуляра прямой (AB) и плоскости (PQR):

а) $A(1,1,1,1)$, $B(-2,-1,0,0)$,
$P(2,1,-1,0)$, $Q(3,1,0,-1)$, $R(0,0,-1,1)$;

б) $A(0,0,1,1)$, $B(2,-1,0,0)$,
$P(3,1,0,-2)$, $Q(-2,0,-1,3)$, $R(1,1,1,-1)$.

10. Вычислить расстояние от прямой (AB) и плоскости (PQR):

а) $A(2,1,0,0)$, $B(-1,2,3,1)$,
$P(0,0,0,1)$, $Q(-2,1,-1,0)$, $R(1,1,1,-1)$;

б) $A(0,0,0,0)$, $B(-3,2,1,1,)$,
$P(1,1,1,1)$, $Q(2,-3,-1,1)$, $R(-1,1,2,-2)$.

11. В евклидовом пространстве E^3 относительно аффинной системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ скалярное произведение имеет вид:

$$g(\vec{x},\vec{y}) = 2x^1y^1 - 2x^1y^2 - 2x^2y^1 + 3x^2y^2 + x^2y^3 + x^3y^2 + 3x^3y^3.$$

Найти расстояние между точками $A(2,1,5)$ и $B(2,-3,1)$.

Вопросы к зачету.

1. Векторное n-мерное пространство. Подпространства векторного пространства. Уравнения подпространства.
2. Нахождение базиса линейной оболочки системы векторов.
3. Нахождение базиса суммы и пересечения подпространств векторного пространства.
4. Евклидово n-мерное векторное пространство. Свойства.
5. Ортогональное дополнение векторного подпространства. Нахождение базиса ортогонального дополнения.
6. Векторное и смешанное произведения в евклидовом вектором пространстве. Свойства.
7. Аффинное n-мерное пространство. Аффинная система координат. Вывод формулы преобразования аффинной системы координат.
8. k-мерные плоскости в A^n. Уравнения k-плоскостей.
9. Взаимное расположение многомерных плоскостей в аффинном пространстве.
10. Евклидово n-мерное пространство. Существование и единственность перпендикуляра к k-плоскости.
11. Доказать, что расстояние от точки B до k-плоскости равно расстоянию между точками B и B_1, где B_1 –ортогональная проекция B на k-плоскость.
12. Вывод формулы расстояния от точки до гиперплоскости, заданной общим уравнением.
13. Вывод формулы расстояния от точки до гиперплоскости.
14. Вывод формулы расстояния от точки до k-плоскости.

Вопросы к экзамену по теме «Многомерная геометрия».

1. Векторное n-мерное пространство.
2. Подпространства векторного пространства.
3. Уравнения подпространства.
4. Нахождение базиса линейной оболочки системы векторов.
5. Нахождение базиса суммы и пересечения подпространств векторного пространства.
6. Евклидово n-мерное векторное пространство. Свойства.
7. Ортогональное дополнение векторного подпространства.
8. Нахождение базиса ортогонального дополнения.
9. Векторное произведение в евклидовом вектором пространстве. Свойства.
10. Смешанное произведение в евклидовом вектором пространстве. Свойства.
11. Аффинное n-мерное пространство.
12. Аффинная система координат.
13. Преобразование аффинной системы координат.
14. k-мерные плоскости в A^n. Уравнения k-плоскостей.
15. Взаимное расположение многомерных плоскостей в аффинном пространстве.
16. Евклидово n-мерное пространство.
17. Существование и единственность перпендикуляра к k-плоскости.
18. Расстояние от точки до k-плоскости.
19. Расстояние от точки до гиперплоскости, заданной общим уравнением.
20. Расстояние от точки до гиперплоскости, заданной точкой и направляющим подпространством.
21. Вывод формулы расстояния от точки до k-плоскости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. Геометрия. Ч.I. М.: Просвещение, 1986.

2. В.Т. Базылев, К.И. Дуничев, В.П. Иваницкая. Геометрия, Ч.I., М.: Просвещение, 1974.

3. Н.С. Денисова. Многомерная геометрия (материалы для практических занятий). М.: МПГУ, 2005.

4. Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.

5. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., 1963.

6. М.М. Постников. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1973.

7. Б.А. Розенфельд. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.

8. Сборник задач по геометрии под редакцией В.Т.Базылева. М.: Просвещение, 1980.