Бурятский государственный университет

Кафедра математических и естественных наук

Рыбдылова Д.Д., Лубсанова Л.Б., Габеева Л.Н.

Подготовка к ЕГЭ по математике

Улан-Удэ

2008г.

Описание курса

Предлагаемый курс подготовлен преподавателями кафедры математических и естественных наук Бурятского государственного университета. Он призван помочь ученикам одиннадцатых классов подготовиться к ЕГЭ по математике. Подобранный материал позволяет повторить важнейшие вопросы школьной программы, закрепить умения, необходимые для успешного выполнения тестовых заданий на экзамене. На основе опыта подготовки школьников к выпускным экзаменам авторы подобрали задачи, привели их решения с пояснениями и обоснованием основных шагов рассуждений. После повторения определенной порции учебного материала ученик должен самостоятельно решить приведенные задачи. Большинство заданий дано в тестовой форме, есть также и задания, в которых требуется привести рассуждения, доказательства.

Материал пособия разбит на 32 темы. К каждой теме прилагается глоссарий, который поможет школьнику систематизировать знания по геометрии, алгебре, началам анализа. На эти знания необходимо опираться при решении задач. Формулы, формулировки теорем, свойств, правил и др., которые также являются основой решения задач, приведены в текстах объяснений. Кроме рекомендованной в данном пособии литературы можно пользоваться и другими книгами, в т.ч. школьными учебниками. Авторы постарались показать, как важно уметь использовать теоретические знания при решении конкретных математических задач, дали практические рекомендации, обратили внимание на факторы, способствующие успешному выполнению заданий.

Надо помнить, что математику невозможно выучить за те несколько дней, которые отведены на подготовку к экзамену. К успеху приведут регулярные систематические занятия.

Содержание

Тема I. Действия над действительными числами. Алгебраические выражения, тождественные преобразования выражений. (Формулы разложения на множители).

Алгебраическим выражением называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Одночленом называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями – умножением и возведением в натуральную степень.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его членами. Одночлен есть частный случай многочлена.

Два выражения называются **тождественно равными** на данном множестве, если на этом множестве они имеют смысл и все их соответственные значения равны.

Свойство тождественно равных выражений: если два выражения тождественно равны одному и тому же выражению, то они тождественно равны между собой.

Равенства, в которых левая и правая части - тождественно равные выражения, называются **тождествами.**

Тождественное преобразование выражения – это замена выражения другим, тождественно равным ему.

Одним из видов тождественных преобразований выражений является *разложение многочленов на множители,* которое включает в себя три вида: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, применение формул сокращенного умножения, разность и сумма кубов двух выражений.

Разложить многочлен на множители – это значит представить многочлен в виде произведения одночлена и многочлена или произведения двух и более многочленов, которое тождественно данному многочлену.

1. *Вынесение общего множителя за скобки*

Правило. Чтобы вынести общий множитель за скобки, нужно каждый член многочлена разделить на общий множитель и делитель взять одним из множителей произведения, а вторым множителем произведения будет многочлен, составленный из частных.

Например*,*

$$\underbrace{6x^4-12x^2+24x}_{\text{многочлен}}=\underbrace{6x(x^3-2x+4)}_{\substack{\text{произведение}\\ \text{одночлена}\\ \text{многочлена}}}$$

Разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки возможно, только если такой множитель есть в каждом члене многочлена.

2. *Способ группировки*

Правило. Способ группировки предполагает перевод многочлена в тождественное заданному многочлену произведение многочленов.

Из нескольких одночленов, объединив их в группы (многочлены в многочлене), нужно вынести общий множитель для каждой группы, а многочлены «из остатков» (частных) должны быть одинаковы.

Одинаковые многочлены-множители в группах составят общий множитель для заданного многочлена. Его записываю первым множителем произведения.

«Остатки» или частные (общие множители для каждой группы многочленов) нужно записать многочленом – вторым множителем произведения.

Например*,*

$3x^3 + 5y^3 - 5x^3 - 3y^3 = 3(x^3 - y^3) – 5(x^3 - y^3) = (x^3 - y^3)(3 – 5) = -2(x^3 - y^3) =$

$= -2 (x – y)(x^2 + xy + y^2) = 2 (y – x)(x^2 + xy + y^2)$

3. *Применение формул сокращенного умножения*

Формулы сокращенного умножения

Правило. По формулам сокращенного умножения не всякий многочлен можно перевести в произведение, а только те многочлены, которые после всех преобразований полностью соответствуют многочлену формулы.

Например, многочлены, разлагаемые на множители по формулам:

1) $x^3 + 2y^3 + 2xy^2 + x^2y – 3y^3 + xy^2 – 4x^2y = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 – y^3 = (x – y)^3$

2) $2x^2 + xy + xy – x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

Многочлены, не разлагаемые на множители по формулам:

$x^3 + 2y^3 + 2xy^2 – 3y^3 + xy^2 – 4x^2y = x^3 - 4x^2y + 3xy^2 – y^3 = x^3 - y^3 + xy(3y – 4x) = (x – y)(x^2 + xy + y^2) + xy(3y – 4x)$

4. *Разность и сумма кубов двух выражений*

Формулы разности и суммы кубов могут быть представлены в многочлене так, что каждый член многочлена представляет собой алгебраическое выражение.

Вычисление по формулам сокращенного умножения сводится к записи членов многочлена в виде выражений и дальнейшего их преобразования как двух множителей-многочленов (раскрыть скобки, привести подобные члены в каждом многочлене), сохраняя произведение.

Правило. Разность и сумма кубов двух выражений по формулам сокращенного умножения преобразуется в произведение двух многочленов или в произведение многочлена и одночлена.

Например,

$(x^2 + y^2)^3 + (x^2 - y^2)^3 = ((x^2 + y^2) + (x^2 - y^2))\times((x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2 + x^2 - y^2)\times(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^4 + y^4 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 2x^2(3y^4 + x^4)$

Задания для самопроверки с ключами:

1. Упростите выражение, отметив правильный ответ:

   -6x + 5xy -2(x + 2xy)

   А. -8x + xy Б. -8x – xy

   В. -4x + xy Г. -4x + 7xy.

2. Какое из четырех равенств не является тождеством:

   1) $x^3 – 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

   2) $x^3 +8 = (x+2) (x^2 - 2x + 4)$

   3) $x^2 -10x + 25 = (x - 5)^2$

   4) $x^2 + 3xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$

   А. Первое Б. Второе

   В. Третье **Г. Четвертое**

3. Разложите на множители и выберите правильный ответ:

1) $2/3y^5 – 2y^4 + 5/6y^3 + 8y$

   А. $2/3y(y^4 – 1/3y^3 + 5/2y + 8)$ Б. $2/3y(y^4 + 5/2y^2 - 3y^3 + 8)$

   В. $\mathbf{y(5/6y^2 + 2/3y^4 - 2y^3 + 8)}$ Г. $y(2/3y^4 - 2y^3 + 5/6y + 8)$

2) $a^3b^2 +4a - 4ab^2 - a^3$

   А. $b(a-1)(a+1)(b-2)(b+2)$ **Б.** $\mathbf{a(b-1)(b+1)(a-2)(a+2)}$

   В. $b(b-1)(b+1)(a-2)(a+2)$ Г. $a(a-1)(a+1)(b-2)(b+2)$

3) $\frac{1}{2}x^3 - y^3 + 0,5x^3$

   А. $\mathbf{(x –y)(x^2 + xy + y^2)}$ Б. $(x –y)(x^2 - xy + y^2)$

   В. $(x+y)(x^2 + xy + y^2)$ Г. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

4) $x^2(y - z) + y^2(z – x) + z^2(x – y)$

   А. $(x –y)(z – x)(y – x)$ Б. $(y - x)(z – x)(x – z)$

   В. $(x –y)(z – y)(z – x)$ **Г.** $\mathbf{(y - x)(z – y)(x – z)}$

Тема II. **Решение неравенств, содержащих одну переменную. Системы и совокупности неравенств. Дробно-линейные неравенства. Решение рациональных неравенств методом промежутков.**

Решением неравенства с одной переменной называется значение этой переменной, удовлетворяющее данному неравенству. Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что их не существует.

Часто, решая данное неравенство, полезно заменить его более простым, эквивалентным (равносильным) неравенством.

Два неравенства называются эквивалентными (равносильными), если они имеют одни и те же решения (или не имеют их вовсе).

Свойства неравенств, содержащих одну переменную:

Пусть дано неравенство вида $f(x) < g(x)$, определенного на множестве A.

Свойство 1. Если к обеим частям неравенства определенного на множестве A, прибавить(или вычесть)одно и то же выражение $h(x)$, имеющее смысл на множестве A, то получится неравенство

$f(x)+h(x) = g(x) + h(x)$, равносильное данному.

Следствие. Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

Свойство 2. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$, определенного на множестве A, умножить или разделить на одно и то же выражение $h(x)$, которое имеет смысл на множестве A и положительно при всех значениях $x \in A$, и знак неравенства оставить без изменения, то получится неравенство равносильное данному.

Свойство 3. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$, определенного на множестве A, умножить или разделить на одно и то же выражение $h(x)$, которое имеет смысл на множестве A и отрицательно при всех значениях $x \in$

А и при этом поменять знак неравенства на противоположный, то получится неравенство f(x)·h(x)<g(x)·h(x), равносильное данному на множестве А.

Следствие. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменяется на противоположный.

Например, $\frac{x-2}{2}+5>\frac{5x}{2}$

Перенесем в левую часть неравенства члены, содержащие переменную x, а в правую - не содержащие x.

Получим $\frac{x-2}{2}-\frac{5x}{2}$ > -5

После приведения подобных слагаемых в левой части, неравенство примет вид:

$\frac{x-5x}{2}-1$ > -5

Перенесем число -1 в правую часть неравенства, поменяв знак числа на противоположный, и найдем значение выражения:

$\frac{-4x}{2}$ > -4

Обе части неравенства умножаем на 2:

-4x > -8

Далее, обе части неравенства делим на одно и то же число -4, меняя знак неравенства на противоположный:

x < 2

Таким образом, x < 2

Системы и совокупности неравенств с одной переменной

Общий вид системы неравенств:

$$\begin{cases} f_1(x)>\varphi_1(x) \\ f_2(x)>\varphi_2(x) \end{cases}$$

Например, $\begin{cases} 5x-2\geq 2x+1 \\ 2x+3>18x-3 \end{cases}$

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, удовлетворяющее каждому неравенству системы. Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

$$\begin{cases} 5x-2\ge 2x+1 \\ 2x+3>18x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\ge 3 \\ -16x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x<-\dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{нет решения}$$

Общий вид совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)>\varphi_1(x) \\ f_2(x)>\varphi_2(x) \end{array}\right.$$

Например, $\left[\begin{array}{l} 2x-3>5x+4 \\ 7-7x>5x-4 \end{array}\right.$

Решением совокупности неравенств с одной переменной называется значение переменной, удовлетворяющее первому или второму неравенству совокупности. Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Пример 1:

$$\left[\begin{array}{l} 2x-3>5x+3 \\ 7-7x>5x-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x>6 \\ -12x>-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \mathrm{x}<1$$

Пример 2:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{4x}>\frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{4x}>\frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{x}>1 \Leftrightarrow \frac{2}{x}-1>0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x}>0$$

или

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x>0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x<0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<x<2$$

Таким образом, решением является промежуток 0 < x < 2

Метод интервалов (метод промежутков)

Рассмотрим неравенство вида: $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) > 0$, где $x_1, x_2, \ldots x_n$ – действительные числа, для которых выполняются следующие условия: $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$. Тогда для $x > x_n$ все множители левой части неравенства будут положительны и их произведение также. Для $x_{n-1} < x < x_n$ последний множитель – отрицательный, но все остальные множители остаются положительными, и поэтому все произведение будет отрицательно. Аналогично, для $x_{n-2} < x < x_{n-1}$ только последний и предпоследний множители будут отрицательны, все же другие сохранят положительное значение и произведение в целом тоже. Продолжая последовательно исследовать все остальные интервалы, приходим к заключению, что знак левой части неравенства будет меняться от интервала к интервалу.

Метод интервалов состоит в разделении числовой оси на интервалы, во внутренних точках которых выражения (или множители) не меняют знака.

Например, в предыдущем примере неравенство, полученное на промежуточном этапе решения, можно решить методом интервалов:

$$\frac{2-x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x(x-2) < 0, \text{ т.к. } x^2 > 0$$

Первый множитель и второй множитель обращаются в нуль в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. соответственно. Проверив знаки выражения в интервалах $(\infty;0)$; $(0;2)$; $(2;\ \infty)$, которые чередуются, начиная с «+», окончательно получим интервал: $(0;2)$.

Неравенство вида $\frac{x-2}{x} < 0$ является дробно-линейным.

Правило: Чтобы решить дробно-линейное неравенство вида $\frac{\alpha x+b}{cx+d} > 0 (< 0)$, где a, b, c, d – действительные числа, x – неизвестное число, нужно:

1) умножить на знаменатель cx + d как числитель, так и знаменатель дроби $\frac{\alpha x+b}{cx+d}$,

2) отбросить знаменатель и решить получившееся неравенство методом интервалов.

Замечание 1: При решении дробно-линейных неравенств методом интервалов следует учитывать ОДЗ (область допустимых значений переменной).

Замечание 2: К вышеперечисленным свойствам неравенств, содержащих переменные, следует добавить: если $f(x) \geq 0$ и $\varphi(x) \geq 0$ и $f(x) > \varphi(x)$, то $f^2(x) > \varphi^2(x)$

Задания для самопроверки с ключами:

1. Решите систему неравенств и выберите правильный ответ:

$$\begin{cases} 2x + 10 > 0 \\ 1 - 3x > 13 \end{cases}$$

А. $(\infty;-5) \cup (-4;\ \infty)$ **Б. (-5; -4)**

В. $(\infty;-4)$ Г. $(-5;\ \infty)$

2. Решите совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}x + 9 \geq 5 - 7\frac{1}{4}x \\ 6 - \frac{2}{3}x < 5\frac{1}{3}x - 4 \end{array}\right.$$

А. $[-\frac{16}{31};-1\frac{2}{3})$ Б. Нет решения

В. $\mathbf{[-\frac{16}{31};\ \infty)}$ Г. $(-1\frac{2}{3};\ \infty)$

3. Сколько решений неравенства (x - 2)(2x - 1) $\leq$ 0 содержится среди чисел -2, 0, 1, 3?

А. 1 **Б. 2**

В. 3 Г. 4

4. Решите неравенство $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

А. x < 2 Б. x > 2

В. 0 < x < 2 Г. x < 0; x > 2

5. Решите неравенство $\frac{-20}{(x+4)(3-10x)} > 0$

А. (∞; -4) $\cup$ (0,3; ∞) Б. (∞; 0,3)

В. (-4; ∞) **Г. (∞; ∞)**

6. Решите неравенство $\frac{2x-7}{(5x-2)(x-4)} < 0$

А. (∞; $-3\frac{1}{2}$) $\cup$ ($\frac{2}{5}$; ∞) Б. (∞; 4)

В. ($\frac{2}{5}$; $3\frac{1}{2}$)$\cup$(4; ∞) **Г. (∞; $\frac{2}{5}$)$\cup$($3\frac{1}{2}$; 4)**

Тема III. Модуль числа. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, неравенства с модулями

Модулем действительного числа называется расстояние от начала отсчета до точки на числовой оси, которая изображает это число.

Модулем положительного числа и нуля называют само это число, а модулем отрицательного - число, ему противоположное, то есть:

$$|x| = \begin{cases} x, & если\, x \geq 0 \\ -x, & если\, x < 0 \end{cases}$$

Например, $|-6| = -(-6) = 6$

Модуль числа называют *абсолютной величиной* числа.

Правила “знаков”.

1) Суммой двух действительных чисел с одинаковыми знаками называется действительное число того же знака, модуль которого равен сумме модулей слагаемых.

Например, 3,1 + 2,5 = 5,6

2) Суммой двух действительных чисел с разными знаками называют действительное число, модуль которого равен разности модулей слагаемых, а знак совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль,

Например, –32 + 2,8 = –29,2

3) Произведением двух действительных называется число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, взятое со знаком “+”, если множители имеют одинаковые знаки и со знаком “–”, если множители имеют разные знаки.

Например, $(+4) \cdot (+1{,}2) = 4{,}8$

$(-2) \cdot (-0{,}3) = 0{,}6$

$(+9) \cdot (-5{,}1) = -45{,}9$

Свойства модуля

1. $|x| \geq 0$; $|x| = |-x|$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. $|x - y| \leq |x| + |y|$
6. $|x - y| \geq |x| - |y|$

Определение модуля и его свойства применяются при решении уравнений и неравенств, содержащих переменную под его знаком.

Пример 1: Решить уравнение $|-3 + x| = 2$

Решение: По определению модуля числа имеем,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

1 случай: если $-3 + x \geq 0$, то $-3 + x = 2$

$x \geq 3$ $\quad\quad$ $x = 5$

Так как $x = 5$ принадлежит промежутку $x \geq 3$, то является корнем данного уравнения.

2 случай: если $-3 + x < 0$, то $-(-3 + x) = 2$

$x < 3$ $\quad\quad$ $x = 1$

Так как $x = 1$ принадлежит промежутку $x < 3$, то является корнем данного уравнения.

Ответ: $\{1; 5\}$

Пример 2: Решить неравенство $|2x - 5| < 7$

Решение:

1 случай: если $2x - 5 \ge 0$, то $2x - 5 < 7$ или составляется система

$$\begin{cases} 2x - 5 \ge 0 \\ 2x - 5 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2{,}5 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2{,}5 \le x < 6$$

2 случай: если $2x - 5 < 0$, то $-(2x - 5) < 7$ или составляется система

$$\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -(2x - 5) < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2{,}5 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < 2{,}5$$

Решением данного неравенства будет служить объединение промежутков, полученных в каждом из случаев, т.е. $-1 < x < 6$

Ответ: (-1;6)

Рассмотрим еще один метод решения уравнений и неравенств, содержащих модуль.

Пример 3. Решить неравенство $|x| \le 2|x - 4| + x - 2$ (*)

Решение: Сначала решим уравнение $|x| = 2|x - 4| + x - 2$ (**)

Точки 0 и 4 разбиваю числовую ось на промежутки $(\infty;0)$, $[0; 4)$, $(4; \infty)$.

На промежутке $(\infty;0)$ $x < 0$ и $x - 4 < 0$, поэтому уравнение примет вид: $-x = -2(x - 4) + x - 2$ и решением будет являться пустое множество корней.

На промежутке $[0; 4)$ $x > 0$ и $x - 4 < 0$ и уравнение примет вид: $x = -2(x - 4) + x - 2$, решением которого является $x = 3$, которое принадлежит промежутку $[0; 4)$. Значит $x = 3$ является корнем уравнения (**).

На промежутке $(4; \infty)$ $x > 0$ и $x - 4 > 0$ и уравнение примет вид: $x = 2(x - 4) + x - 2$, решением которого является $x = 5$, которое принадлежит промежутку $(4; \infty)$. Значит $x = 5$ является корнем уравнения (**).

Итак уравнение имеет два корня $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Они разбивают числовую ось на промежутки $(\infty;3)$; $[3; 5)$; $(5; \infty)$. Методом пробных точек устанавливаем, что неравенство (*) выполняется на промежутке $(\infty; 3] \cup [5; \infty)$.

Ответ: $(\infty; 3] \cup [5; \infty)$

Задания для самопроверки:

1. Решить уравнение: $-|5x - 6| - 4 = x$

А. $\{ \frac{1}{3}; \frac{5}{2} \}$ **Б. $\{ \frac{1}{3} \}$**

В. Нет решения Г. $\{ \frac{5}{2} \}$

2. Решить уравнение: $|3x - 1| = |2x + 3|$

А. $\{ 4 \}$ Б. $\{ \frac{1}{3}; -1\frac{1}{2} \}$

В. $\{ 4; -\frac{2}{5} \}$ Г. $\{ 0; 4 \}$

3. Решить уравнение: $|x| = |3 - 2x| - x - 1$

А. $\{ \frac{1}{2} \}$ Б. $\{ 0; 1\frac{1}{2} \}$

В. $\{ 0; 4 \}$ Г. $\{ 1\frac{1}{2} \}$

4. Решить неравенство: $7x - 1 \leq 3|6x + 5|$

А. $[-\frac{5}{6}; \infty)$ Б. $(\infty; \infty)$

В. $[\infty; -\frac{14}{25}]$ **Г. $(\infty; -\frac{5}{6})$**

5. Решить неравенство: $|13 - 2x| \geq |4x - 9|$

А. Нет решения Б. $(\infty; -2] \cup [\frac{11}{3}; \infty)$

В. $[-2; \infty)$ **Г. $[-2; \frac{11}{3}]$**

Тема 4. Степень с рациональным показателем

Определение. Степенью числа a>0 с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m - целое число, а n - натуральное (n>1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a > 0$

$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Свойства степени с рациональным показателем:

$a > 0,\ b > 0,\ p \in \mathbf{Q},\ q \in \mathbf{Q}$

1. $a^p a^q = a^{p+q}$;
2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(ab)^p = a^p b^p$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

При упрощении выражений, содержащих корни и степени с дробным показателем, можно переходить только к корням или только к степеням. Свойства степеней имеют более простую форму и уменьшают вероятность совершения ошибки при преобразовании.

При выполнении упражнений на вычисление, упрощение выражений, содержащих степени с рациональным показателем, используют определение и свойства степени.

Пример 1. Вычислить: $9^{0,5} \cdot 16^{-0,25} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$

Решение: $9^{0,5} \cdot 16^{-0,25} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} =$

$$= 9^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt{9} \cdot \sqrt[4]{16^{-1}} - \sqrt[3]{8^{-2}} \cdot \sqrt[3]{27} = 3\sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2^6}} \cdot \sqrt[3]{3^3} = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$5.

Пример 2. Упростить выражения: $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

Решение: $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \dfrac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab$.

Ответ: ab.

Пример 3. Упростить выражение: $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}$

Решение:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)} = 1 + a - (1-a) = 2a$$

Ответ: $2a$.

Задания для самопроверки к теме 4:

1. Чему равно значение числового выражения $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{27}}$.

А. 9 Б. 1 **В. 3** Г. 1,5

2. Найдите значение выражения $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$ при $a = -\sqrt{2}$.

А. 2 **Б. -1** В. 4 Г. 1

3. Сократите дробь и выберите правильный ответ: $\dfrac{a^{\frac{1}{6}} + 5}{25 - a^{\frac{1}{3}}}$

А. $\dfrac{1}{5 - a^{\frac{1}{3}}}$ Б. $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{6}} - 5}$ В. 5 **Г.** $\dfrac{1}{5 - a^{\frac{1}{6}}}$

4. Упростите выражение $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}} \div \left(\dfrac{c^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{b^{-\frac{5}{6}}c^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}} \right)$

А. a^2bc **Б.** abc В. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c$ Г. ab^2c^2

5. Докажите неравенство $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}} > \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[15]{\frac{1}{8}}}}$

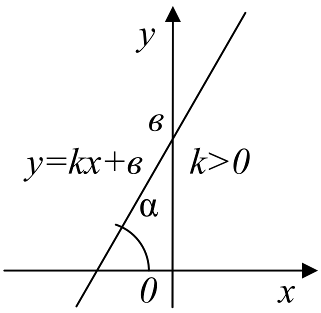
6. Найдите значение выражения $\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$, если $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$

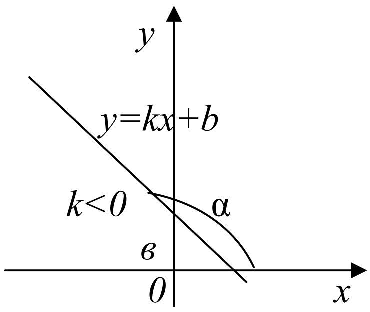
А. 0 Б. 1 В. 2 Г. 3

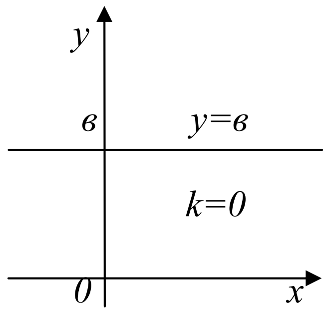
Тема 5. Линейная функция. Обратная пропорциональность. Квадратичная функция. Квадратные уравнения

Графиком линейной функции *y=kx+b* является прямая.

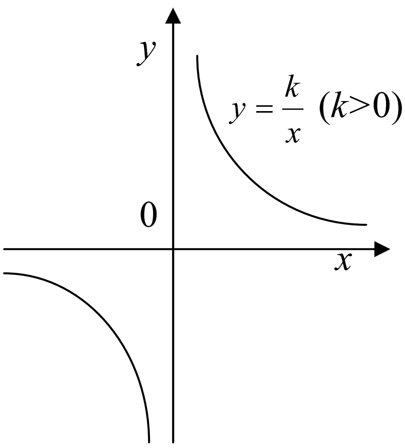
$k=tg\alpha$ - угловой коэффициент.

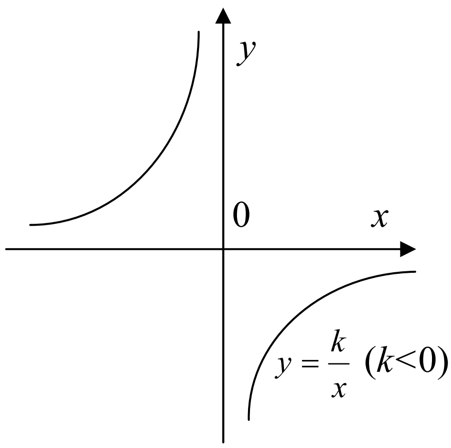




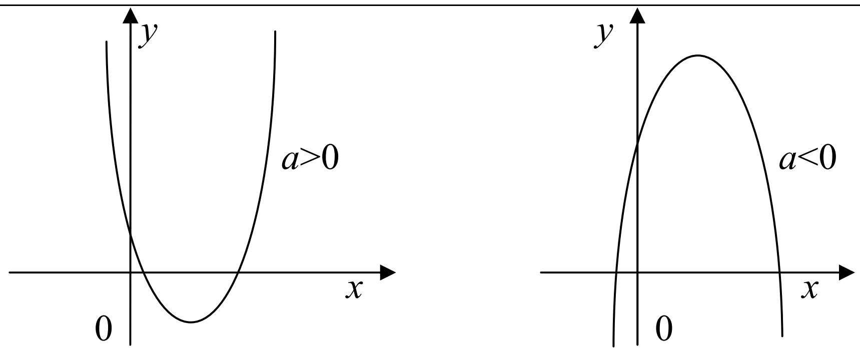


Графиком функции $y=\frac{k}{x}$ является гипербола с асимптотами $x=0$, $y=0$.





Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с ветвями, направленными вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$. Осью симметрии параболы служит прямая $x=-\frac{b}{2a}$.



Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Число b^2-4ac — дискриминант квадратного уравнения, обозначается буквой D.

Теорема Виета. Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Примеры

1. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 - 2x$ **на промежутке** [-1; 3].

Решение. Данная функция убывает, т.к. k<0. Поэтому наибольшее значение функция принимает в точке x=-1.

Искомое значение равно y=5-2·(-1)=7.

2. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{1}{x}$**. Укажите все значения *x*, для которых выполняется неравенство** $f(x) + 1 \geq 0$**.**

Решение. На $(0;+\infty)$ функция $f(x)$ принимает положительные значения, поэтому $f(x)+1$ на этом промежутке больше нуля. На $(-\infty;0)$ данная функция $f(x)$ принимает отрицательные значения, а $f(x)+1$ больше или равно нулю на $(-\infty;-1]$ и меньше нуля на (-1;0).

Ответ. $(-\infty;-1] \cup (0;+\infty)$.

3. На каком промежутке возрастает функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **?**

Решение. Осью симметрии соответствующей параболы служит прямая $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2}$. На $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ данная функция возрастает.

4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=x^2-3x+2$ с осями координат.

Решение. Чтобы определить точки пересечения графика с осью *Ox*, необходимо определить, при каких значениях *x* значения функции равны нулю. Решив уравнение $x^2-3x+2=0$, получим: x_1=1, x_2=2. Значит, точки пересечения с *Ox* следующие: (1; 0), (2; 0).

Чтобы определить точки пересечения графика с осью *Oy*, найдем значение функции при *x*=0. $f(0)=2$, значит, точка пересечения с *Oy* – точка (0; 2).

Задачи для самостоятельного решения к теме 5

1. Найдите наименьшее значение функции $y=2x-5$
на промежутке [-1; 3].

А. 0. Б. -5. В. 1. **Г. -7.**

2. Функция задана формулой $f(x)=-\frac{1}{x}$**. Укажите все значения *x*, для которых выполняется неравенство** $f(x)+1\geq 0$**.**

А. $(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$. Б. $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **В.** $(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$**.** Г. (0; 1).

3. При каких значениях параметра *a* уравнение *a*x^2 - 5*x* + 1 = 0 имеет 2 корня?

А. *a* < 6,25. Б. *a* > 6,25. В. *a* = 6,25. Г. *a* ≤ 6,25.

4. При каких *x* выражение $\frac{7}{x^2-4x-5}$ **не имеет смысла?**

А. {0}. **Б. {-1; 5}.** В. {7} . Г. {-5; 1}.

Тема 6. Степенная функция. Функция $y=\sqrt[n]{x}$

Степенная функция с натуральным показателем: функцию вида

$y = x^n$, где $n\in N$ называют *степенной функцией* с показателем n, которая непрерывна на множестве действительных чисел.

Поскольку $0^n = 0$ и $1^n = 1$, то график функции $y = x^n$ проходит через точки O(0;0) и A(1;1) при любом $n\in N$.

Если *n*- четное число, n = 2k, то $(-x)^{2k} = x^{2k}$ и отсюда следует, что x^{2k} – четная функция и ее график симметричен относительно оси ОУ.

Если *n*- нечетное число, n = 2k-1, то $(-x)^{2k-1} = -x^{2k-1}$ и значит, что x^{2k-1} – нечетная функция и ее график симметричен относительно начала координат. Эта функция строго возрастает и потому обратима.

Обратной к ней является функция $y = \sqrt[n]{x}$.Степенная функция с четным показателем необратима. Однако если сузить ее область определения до области неотрицательных чисел, то обратной к ней функцией также будет $y = \sqrt[n]{x}$ при $x \geq 0$. На множестве (–∞; 0) функцией, обратной к функции $y = \sqrt[n]{x}$, n∈N будет $y = -\sqrt[n]{x}$.

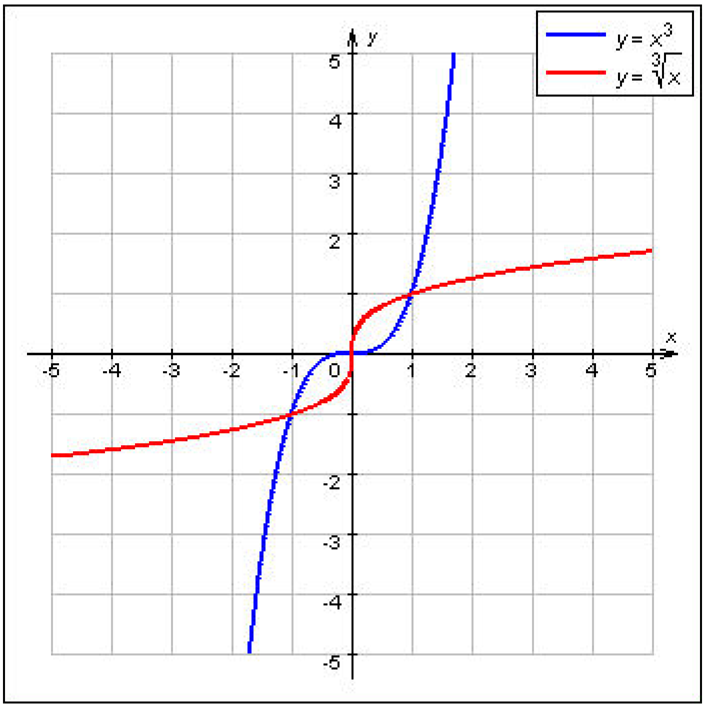


График степенной и обратной ей функции

Итак, если $x > 0$, то при любом натуральном *n* функция $y = x^n$ обратима, а обратная к ней функция обозначается как $\sqrt[n]{x}$ или $x^{\frac{1}{n}}$. Функция $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ также определена и непрерывна на множестве положительных чисел.

Пусть $r = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$. Тогда *степенной функцией с рациональным показателем* x^r называют функцию

$$x^r = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m.$$

Эта функция определена на множестве чисел $x > 0$ и непрерывна на всей области определения, строго возрастает при $r > 0$ и строго убывает при $r < 0$. Перечислим некоторые свойства рациональных степеней.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$a > 0$
$a^r > 1$	$a > 1$, $r > 0$ или $0 < a < 1$, $r < 0$
$a^r < 1$	$a > 1$, $r < 0$ или $0 < a < 1$, $r > 0$
$a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$	$a > 0$
$\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 r_2}$	$a > 0$
$a^{r_1} > a^{r_2}$	$a > 1$, $r_1 > r_2$
$a^{r_1} < a^{r_2}$	$0 < a < 1$, $r_1 > r_2$

Задания для самопроверки к теме 6:

1. Среди заданных функций укажите нечетные:

   1) $y = x^7$ 2) $y = x^{-2}$ 3) $y = x^{-5}$ 4) $y = x^4$

   А. 1) и 4) Б. 2) и 3) **В. 1) и 3)** Г. 2) и 4)

2. Среди заданных функций укажите те, которые возрастают при $x<0$

   1) $y = x^5$ 2) $y = x^{-10}$ 3) $y = x^6$ 4) $y = x^{-7}$

   А. 1) и 4) Б. 2) и 3) В. 1) и 3) **Г. 1) и 2)**

3. Найдите наибольшее значение функции $y = x^{-5}$ на отрезке [-1;1]

   А. 1 Б. 0 В. 5 Г. -1

4. Сколько среди заданных функций тех, которые ограничены снизу:

   1) $y = x^7$ 2) $y = x^{-8}$ 3) $y = -2x^4$ 4) $y = x^2$

   А. 3 **Б. 2** В. 1 Г. 0

5. Найдите область значений функции $y = \begin{cases} x^{-5}, x < 0 \\ x^6, x \geq 0 \end{cases}$

   А. $(0;\ \infty)$ Б. $[0;\ \infty)$

В. (∞; ∞) Г. (∞;0)$\cup$(0; 4)

6. Упростите выражения:

1) $(3{,}1x^n - 6{,}5y^m)(3{,}1x^n + 6{,}5y^m)$

2) $(4x^{2n}y^{3m} + 0{,}1x^{3m}y^{2n})^2$

Ответ: 1)$(3{,}1x^n - 6{,}5y^m)(3{,}1x^n + 6{,}5y^m)= 9{,}61x^{2n} - 42{,}25\,y^{2n}$

2) $(4x^{2n}y^{3m} + 0{,}1x^{3m}y^{2n})^2 =(x^ny^m)^4 \cdot(4x^m +0{,}1y^n)^2$

Тема 7. Свойства функций. Построение графиков функций с помощью преобразований известных графиков.

Знание различных качественных особенностей изучаемых функций позволяет получить более точную информацию о тех процессах, которые эти функции описывают.

Рассмотрим некоторые общие свойства функций, знание которых позволит строить графики широкого класса функций.

Определение 1. Функция *f* называется *четной*, если при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т.е. *f(-x) = f(x).*

График четной функции симметричен относительно оси ОУ.

Определение 2. Функция *f* называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента значение функции изменяет только знак, т.е. *f(-x) =- f(x).*

График четной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 1.

Выяснить, четной или нечетной является функция $\frac{2x^3 - x}{x^2+1}, \infty < x < \infty$

Рассмотрим *f(-x)* $= \frac{2(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x^3+x}{x^2+1} = -\frac{2x^3+x}{x^2+1} = -f(x)$

Доказано, что функция нечетная.

Определение 3. Функция *f* называется *возрастающей* на промежутке *I*, если для любых $x_1, x_2 \in I$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 3. Функция *f* называется *убывающей* на промежутке *I*, если для любых $x_1, x_2 \in I$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Функции, возрастающие или убывающие на промежутке I, называют *монотонными* на этом промежутке.

Пример 2. Исследовать на возрастание и убывание функцию $\frac{x}{1+x^2}, \infty < x < \infty$

Решение. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим разность

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2^2} - \frac{x_1}{1+x_1^2} = \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_2 x_1)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}$$

В правой части равенства знаменатель положителен, множитель $x_2 - x_1 > 0$ и знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ зависит от знака множителя $(1 - x_2 \cdot x_1)$, который положителен при $x_1 \cdot x_2 < 1$, отрицателен при $x_1 \cdot x_2 > 1$.

Поэтому рассмотрим следующие промежутки:

1) $(\infty; -1]$. На нем $x_1 < -1$, $x_2 \le -1$. Отсюда, $(1 - x_2 \cdot x_1) < 0$ и поэтому $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т.е. $f(x_2) < f(x_1)$ и функция $\frac{x}{1+x^2}$ убывает на этом промежутке.

2) $[-1; 1]$. На нем $(1 - x_2 \cdot x_1) > 0$ и поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. $f(x_2) > f(x_1)$ и функция $\frac{x}{1+x^2}$ возрастает на этом промежутке.

3) $[1; \infty]$. На нем $(1 - x_2 \cdot x_1) < 0$, т.е. множитель $(1 - x_2 \cdot x_1)$ снова отрицательный и поэтому и функция $\frac{x}{1+x^2}$ убывает на этом промежутке.

Ответ: Функция $\frac{x}{1+x^2}$ убывает на этом промежутках $(\infty; -1]$ и $[1; \infty]$ и возрастает на отрезке $[-1; 1]$.

Определение 4. Окрестностью точки x_0 называют интервал $(x_0 - h; x_0 + h)$.

Определение 5. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции *f*, если ее значение в точке x_0 меньше всех других ее значений, принимаемых в некоторой окрестности этой точки: $f(x_0) < f(x), x \neq x_0$.

Значение функции f в точке x_0 называют *минимумом* и обозначают

$$y_{\min} = f(x_0)$$

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции *f*, если ее значение в точке x_0 больше всех других ее значений, принимаемых в некоторой окрестности этой точки: $f(x_0) > C,\ x \neq x_0.$

Значение функции f в точке x_0 называют *максимумом* и обозначают

$$y_{\max} = f(x_0)$$

Точки минимума и максимума называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами.*

Определение 6. Самое большое среди всех значений, которое функция *f* принимает на заданном промежутке *I*, называется *наибольшим значением* функции на заданном промежутке и обозначается M = max *f*(x)

Определение 7. Самое маленькое среди всех значений, которое функция *f* принимает на заданном промежутке *I*, называется *наименьшим значением* функции на заданном промежутке и обозначается m = min *f*(x)

Пример 4.

Найти точки экстремума функции $\frac{x}{1+x^2}, \infty < x < \infty$

В третьем примере были найдены интервалы монотонности функции, т.е на промежутках (∞; -1] и [1; ∞] функция убывает и возрастает на отрезке [-1; 1]. Рассмотрим точку x=1. левее этой точки на промежутке [-1; 1] функция возрастает, а правее убывает. Это означает, что точка x=1 – точка максимума.

Определение 8. Функция *f* называется *ограниченной* на промежутке *I*, если существуют числа A и B, такие, что для всех значений $x \in I$ справедливо

$$A \le f(x) \le B$$

Определение 9. Если существует число A, такое, что для всех значений $x \in I$ справедливо $f(x) \ge A$, то функция *f* называется *ограниченной снизу* на промежутке *I.*

Если существует число B, такое, что для всех значений $x \in I$ справедливо $f(x) \leq B$, то функция f называется *ограниченной сверху* на промежутке *I*.

Преобразование графиков

В математике существуют различные способы построения графиков функций. Один из способов построения графиков состоит в том, что если известен график функции *f*, то с помощью геометрических преобразований можно построить графики многих других функций, связанных с функцией *f*.

1. Параллельный перенос

Пусть имеется график функции $y = f(x), x \in X$.

Цель: построить график функции $y = f_1(x)$, где $f_1(x) = f(x) + B, x \in X$. Пусть $A(x_0; y_0)$ – точка на графике функции $y = f(x)$. Соответствующая ей точка $A'(x_0; y_1)$ с той же абсциссой имеет координаты $A'(x_0; y_0+B)$.

Точка A′ получается из точки A сдвигом на B вертикально вверх, если B>0, и на |B| вниз, если B<0.

Алгебраически для каждой точки графика это можно записать системой $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + B \end{cases}$ где x и y – координаты какой-либо точки старого графика, x ′ и y ′ – соответствующей ей точки нового.

Аналогично график функции $y = f(x - b) + B$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом, при котором начало координат O (0, 0) переходит в точку O′(b, B). Обычно находят точку O ′ и проводят через нее вспомогательные координатные оси, относительно которых строят график функции $y = f(x)$.

Таким образом, чтобы построить точку A ′, нужно сместить точку A вправо, если b > 0, и влево, если b < 0.

Алгебраически это записывается системой: $\begin{cases} x' = x + b \\ y' = y \end{cases}$

Область определения функции, соответствующей новому графику, также смещается на а по отношению к области определения функции, задающей старый график.

Пример 1:

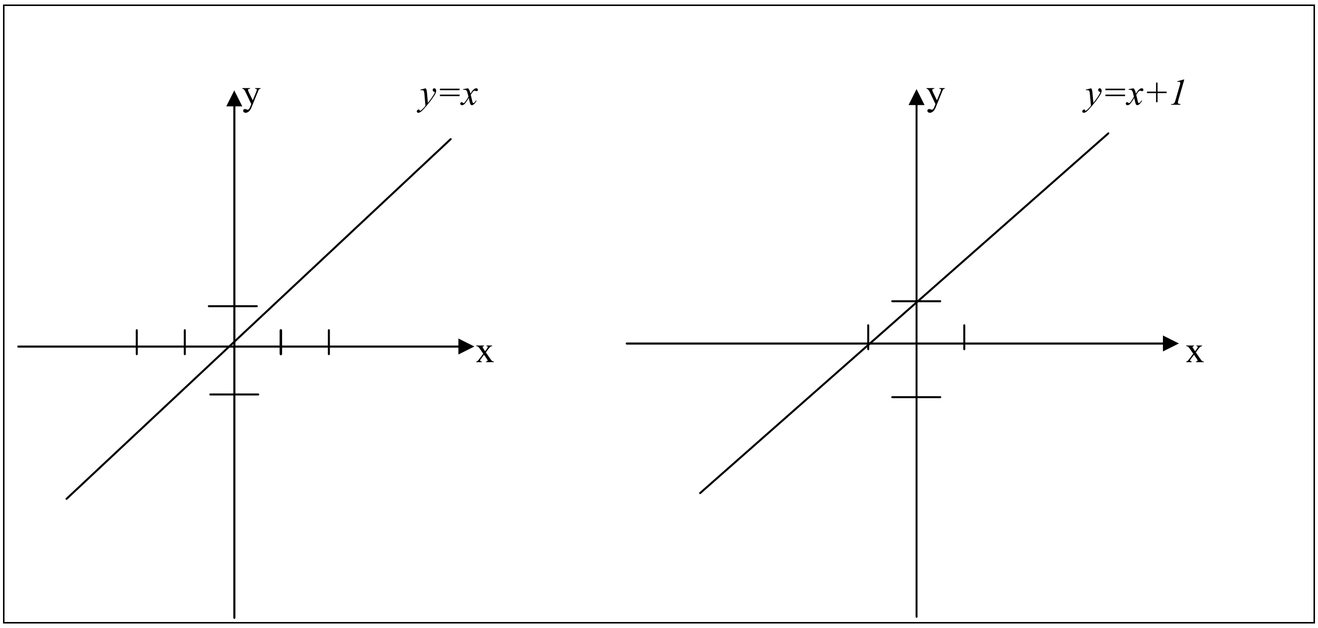


Рис. 1 Параллельный перенос графиков

2. Растяжение и сжатие

Сжатие (растяжение) графика к оси ОХ задается с помощью системы уравнений $\begin{cases} x' = x \\ y' = Ay \end{cases}$

График функции у =А·f(x) получается из графика функции y=f(x):

- растяжением в А раз от оси ОХ при А > 1;

- сжатием в $\frac{1}{A}$ раз к оси ОХ при 0 < А < 1;

При А = 1 исходный и конечный графики совпадают. При А < 0 график не только растягивается (сжимается), но и отражается относительно оси ОХ .

Пример2: Построить график функции $y=(x-1)^2-1$ и используя его, построить график функции $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$

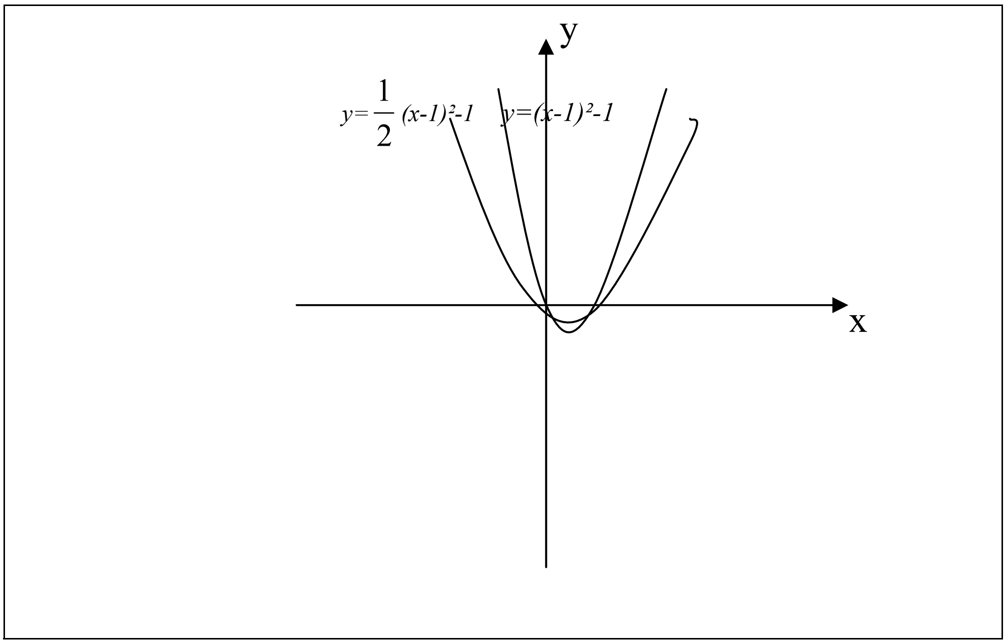


Рис.2 Растяжение графика функции

Аналогичным образом задается сжатие (растяжение) графика к оси OY : $\begin{cases} x' = \frac{x}{a} \\ y' = y \end{cases}$

График функции y = f(ax) получается из графика функции y = f(x):

- сжатием в a раз к оси OY при $a > 1$;

- растяжением в $\frac{1}{a}$ раз от оси OY при $0 < a < 1$.

При $a = 1$ исходный и конечный графики совпадают. При $a < 0$ график не только растягивается (сжимается), но и отражается относительно оси OY .

3. Отражение относительно осей и точек

Пусть дан график функции y =f(x). Чтобы получить график функции, симметричный данному:

- *относительно оси OX:* $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Графики функций y = f(x) и y =–f(x) симметричны относительно оси абсцисс.

- *относительно оси OY*: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

Графики функций y = f (x) и y = f (– x) симметричны относительно оси ординат.

- *относительно начала координат*: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Симметричными относительно начала координат являются графики функций y = f(x) и y = –f(– x).

Пример 3:

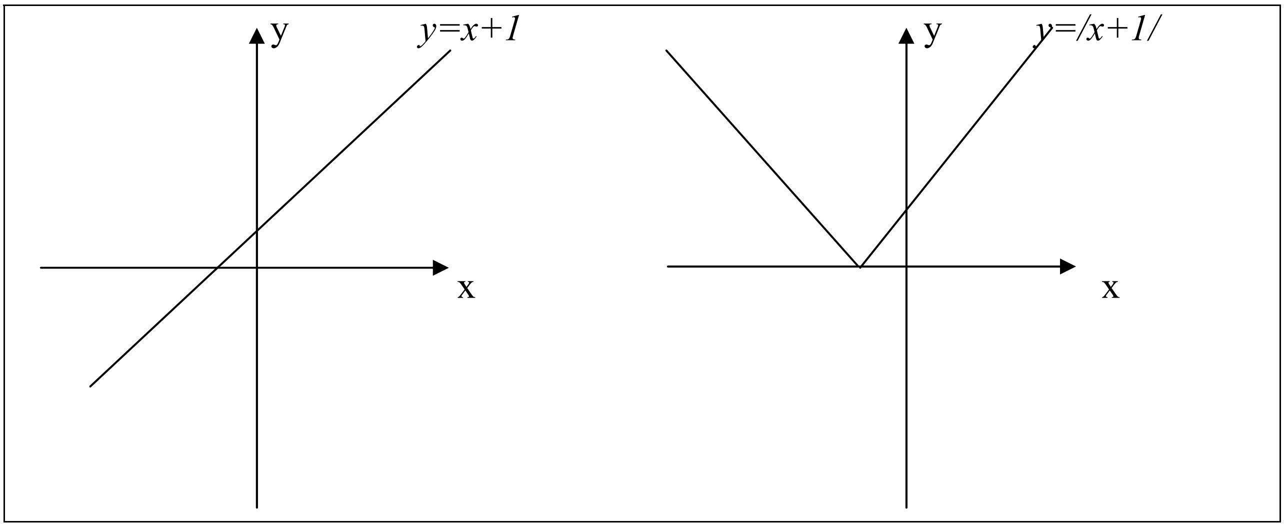


Рис. 3 Отражение графика относительно оси абсцисс при f(x)<-1

- *относительно произвольных вертикальных и горизонтальных осей.* Справедливы следующие утверждения:

- Графики функций y =f(x) и y =2b –f (x) симметричны относительно горизонтальной оси y = b.
- Графики функций y =f (x) и y = f (2a –x) симметричны относительно вертикальной оси x = a .

Системы уравнений, соответствующие этим преобразованиям, выглядят так: $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2a - y \end{cases}$ и $\begin{cases} x' = 2b - x \\ y' = y \end{cases}$

- *относительно произвольной точки (a, b)* задается сначала отражением относительно горизонтальной оси y = b , затем отражением относительно вертикальной оси x =a: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

Графики функций y =f (x) и y =2b –f (2a –x) симметричны относительно точки (a; b).

Задания для самопроверки к теме 7:

1. Какие из функций являются четными:

А. $3 - x^2 + x^4$

Б. $\frac{x-1}{x^2+1}$

В. $\frac{1}{x^4+5}$

Г. $\frac{x^2+1}{x^2-1}, x \neq \pm 1$

Д. $\frac{|x|}{x^2+1}$

Е. $\frac{x^3-1}{x^2+1}$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $\frac{2x-1}{4x+1}$

А. Возрастает на промежутке (∞; -$\frac{1}{4}$)

Б. Возрастает на промежутке (∞; -$\frac{1}{4}$), убывает на промежутке

(-$\frac{1}{4}$; ∞)

В. Возрастает на промежутке (∞; -$\frac{1}{4}$) U (-$\frac{1}{4}$; ∞)

Г. Всюду убывает

3. Постройте график функции *f.* С его помощью найдите точки экстремума и значения M и m, если они существуют.

а) $2|x-3|+5, x \in [-5;2]$

б) $x^2 - 7x + 12$, x є (∞; ∞)

Задания для самопроверки:

1. Опишите, каким образом будет получен график функции их графика функции *y= x²*

а) *y= (x+2)²+4* б) *y=2(x-1)* в) *y= (x-$\frac{1}{2}$)²-6*

2. Опишите, каким образом будет получен график функции их графика функции $y = \frac{2}{x}$

а) $y = \frac{2}{x-1}$ б) $y = \frac{2}{x+1} - 3$ в) $y = \frac{2}{x-6} + 5$

Тема 8. Прогрессии: арифметическая и геометрическая

Рассмотрим ряд натуральных чисел 1, 2, 3, … , $n - 1$, n , … .

Если заменить каждое число n в этом ряду некоторым числом u_n, следуя некоторому закону, мы получим новый ряд чисел:

u_1 , u_2 , u_3 , …, u_{n-1} , u_n , … , называемый *числовой последовательностью*. Число u_n называется *общим членом* числовой последовательности.

Примеры числовых последовательностей:

а) 2, 4, 6, 8, 10, … , $2n$, … ;

б) 1, 4, 9, 16, 25, … , n^2 , … ;

в) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, … , $1/n$, … .

Арифметическая прогрессия. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется *арифметической прогрессией.*

Обозначение: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Число $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} = \ldots$ называется *разностью арифметической прогрессии.*

Для того чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n), достаточно знать ее первый член a_1 и разность d.

$d = a_{n+1} - a_n$ - формула разности прогрессии

$a_n = a_1 + d(n-1)$ - формула n-го члена арифметической прогрессии

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ - формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

Если в предыдущую формулу подставить вместо a_n его выражение $a_n = a_1 + d(n-1)$, то получится соотношение

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Из определения разности арифметической прогрессии следует, что

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$, т.е. сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.

Свойство арифметической прогрессии. Каждый член арифметической прогрессии, кроме первого, равен полусумме двух соседних с ним членов, т.е. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Геометрическая прогрессия. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется *геометрической прогрессией*.

Обозначение: $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

Число $q = b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \ldots = b_n : b_{n-1} = \ldots$ называется *знаменателем геометрической прогрессии.*

Для того чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n), достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q.

$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, \quad b_n \neq 0$ - формула знаменателя геометрической прогрессии

$b_n = b_1 q^{n-1}$ - формула n-го члена геометрической прогрессии

$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad q \neq 1$, $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \quad q \neq 1$ - формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии

Из формулы n-го члена следует, что $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots$

Пусть (x_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $|q| < 1$ и $q \neq 0$. Суммой бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой удовлетворяет условию | q| < 1, называется предел суммы n первых ее членов при $n\to\infty$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при | q | < 1 находится по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Свойство геометрической прогрессии. Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух ее соседних членов, т.е. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

Пример1. Найти сумму первых ста нечётных чисел.

Решение . Применим последнюю формулу. Здесь $a_1 = 1$, $d = 2$. Тогда

$$S_{100} = \frac{2\cdot 1 + 2(100-1)}{2} \cdot 100 = 10000.$$

Пример2. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}, \ldots .$$

Решение. Применим последнюю формулу. Здесь $b_1 = 1$, $q = 1/2$. Тогда:

$$S = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Задания для самопроверки к теме 8:

1. В геометрической прогрессии с положительными членами произведение второго и шестого членов равно 1, первый член равен $\frac{1}{27}$. Знаменатель прогрессии равен:

А. 3 Б. 6 В. $\frac{1}{3}$ Г. 2

2. В арифметической прогрессии сумма третьего и седьмого членов равна 10, первый член равен –3. Разность прогрессии равна:

А. 3 Б. 1 **В.2** Г. -2

3. Сумма третьего и шестого членов арифметической прогрессии равна 18. Чему равна сумма первых восьми членов прогрессии?

А. 72 Б. 180 В.36 Г. 144

4. Разность между вторым и первым членами геометрической прогрессии равна -3, а разность между третьим и вторым ее членами равна -6. Чему равна сумма первых пяти членов прогрессии?

А. -27 Б. -33 В.93 **Г. -93**

5. Сколько нужно взять членов арифметической прогрессии с первым членом, равным 3 и разностью, равной 9, чтобы сумма равнялась 168?

А. 11 **Б. 12** В.10 Г. 8

6. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, если $b_n = 3 \cdot 2^n$?

А. 1530 Б. 980 В.1500 Г. 1350

7. На множестве натуральных чисел задано уравнение

$\frac{x-1}{x^2}+\frac{x-2}{x^2}+\frac{x-3}{x^2}+...+\frac{1}{x^2}=\frac{7}{15}$. Его корнем является число:

А. 10 **Б. 15** В.20 Г. 25

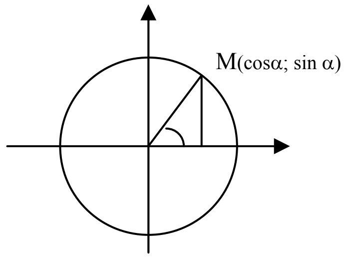
8. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Седьмой член данной геометрической прогрессии равен одному из чисел:

А. 5103 Б. $\{\frac{7}{81}; 5100\}$

В. $\{5103; \frac{7}{81}\}$ Г. 125

Тема 9.
Тригонометрические функции

Рассмотрим единичную окружность, то есть окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Возьмем на этой окружности точку М (x;y).



Определение 1. Ординату точки M назовем синусом угла α и обозначим sinα = y.

Определение 2. Абсциссу точки M назовем косинусом угла α и обозначим cos α = x.

Определение 3. Тангенсом угла α называется отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и обозначается tg α.

таким образом, $tga = \dfrac{\sin a}{\cos a}$.

Область определения функции tgα состоит из всех тех углов, для которых cosα≠0, то есть тангенс не существует для углов α=$\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, n∈Z.

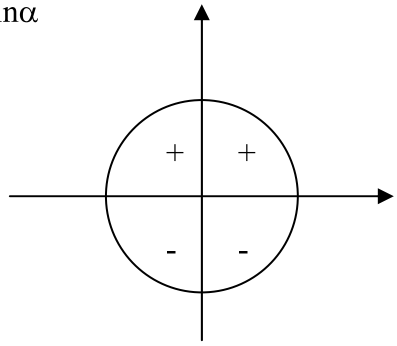
Определение 4. Котангенсом угла α называется отношение $\dfrac{\cos a}{\sin a}$ и обозначается ctgα.

Итак, ctg=$\dfrac{\cos a}{\sin a}$

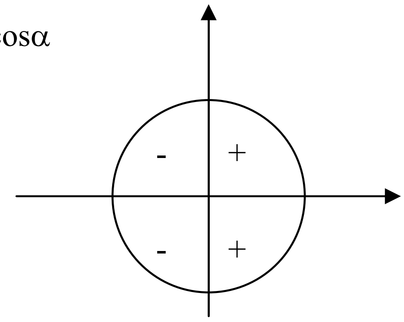
Область определения функции ctgα состоит из всех тех углов, для которых sinα≠0, то есть котангенс не существует для углов α=πn, n∈Z.

Знаки значений функций sinα, cosα определяются знаками ординаты y и абсциссы x точки M единичной окружности.

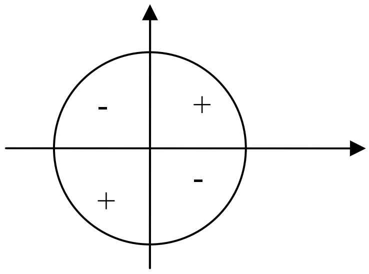
sinα



cosα



tgα,
ctgα



Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы тригонометрии

Формулы приведения:

$\sin(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(\pi/2+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\mathrm{tg}(\pi/2+\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi/2-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}(\pi/2+\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi/2-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$

Формулы сложения и вычитания

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{ctg\beta+ctg\alpha}{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1},\ \alpha+\beta\neq\pi/2+\pi n,\ n\in Z$

tg(α-β)= $\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{ctg\beta - ctg\alpha}{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}$, α-β≠ π/2 + πn, n∈Z

Тригонометрические функции двойного аргумента

sin2α=2 sinα cosα
cos2α=$\cos^2$α - $\sin^2$α = 2$\cos^2$α -1= 1- 2 $\sin^2$α
tg2α=$\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha - 1}$

ctgα=$\frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$

Тригонометрические функции половинного аргумента

1+cosα=2$\cos^2\frac{\alpha}{2}$

1-cosα=2$\sin^2\frac{\alpha}{2}$

tg$\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

tg$\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Формулы понижения степени:

$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

Применение основных тригонометрических формул к преобразованиям выражений

Пример: Упростить выражение sin(π/2 -α) - cos(π-α) + tg(π-α) - ctg(3π/2 +α)
Решение: Используем формулы приведения: sin(π/2 -α) - cos(π-α) + tg(π-α) - ctg(3π/2 +α)=
= cosα - (- cosα) + (- tgα) – (- tgα)= cosα+ cosα - tgα + tgα= 2 cosα

Пример. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

Решение: Приведем к общему знаменателю: $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1 + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)} =$

$$=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}$$

Пример. Доказать тождество $tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha \sin^2\alpha$

Решение: Преобразуем левую часть данного равенства:

$tg^2\alpha - \sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=\sin^2\alpha(1+tg^2\alpha-1)=\sin^2\alpha\ tg^2\alpha$

Мы получили выражение, стоящее в правой части равенства. Таким образом, тождество доказано.

Задания

1. Упростить выражение $\cos^2\alpha - (ctg^2\alpha+1)\sin^2\alpha$			
а) $\sin^2\alpha$	**б) $-\sin^2\alpha$**	в) $1/\sin^2\alpha$	г) $-1/\sin^2\alpha$

2. Найти значение выражения cos 17п/4			
а) $\sqrt{2}/2$	**б) 1/2**	в) $-\sqrt{2}/2$	г) – 1/2

Тема 10.

10.1 Тригонометрические уравнения

Решение простейших тригонометрических уравнений

1. **$\sin x = m$, $|m| \le 1$**

   $x = (-1)^n \arcsin m + \pi n$, $n \in Z$.

2. **$\cos x = m$, $|m| \le 1$**

   $x = \pm \arccos m + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. **$tg\ x = m$, $m \in R$**

   $x = arctg\ m + \pi n$, $n \in Z$.

4. **$ctg\ x = m$, $m \in R$**

   $x = arcctg\ m + \pi n$, $n \in Z$.

Решение уравнений разложением на множители

Пример: **$2\cos x \cos 2x = \cos x$**

Решение: Данное уравнение равносильно уравнению

$$\cos x\,(2\cos 2x - 1) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

а) $\cos x = 0$ или б) $\cos 2x = 1/2$

$x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z.$ $2x = \pm\,\pi/3 + 2\pi k, \quad k \in Z.$

$x = \pm\,\pi/6 + \pi k, \quad k \in Z.$

Ответ: $\pi/2 + \pi n$; $\pm\,\pi/6 + \pi k$, $(n, k \in Z)$.

Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример: $3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$

Решение: Пусть $\cos x = y$, тогда данное уравнение примет вид:

$$3y^2 - 10y + 3 = 0$$

Решив его, найдем $y_1 = 1/3$, $y_2 = 3$.

Значение $y_2 = 3$ не удовлетворяет условию, так как $|\cos x| \le 1$. Следовательно,

$$\cos x = 1/3$$

$$x = \pm \arccos 1/3 + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\pm \arccos 1/3 + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Решение однородных и сводящихся к ним уравнений

Уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, называются однородными относительно sin x и cos x.

Пример: **$6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$**

Решение: $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$$

Так как значения $x = \pi/2 + \pi n$ не являются корнями уравнения и $\cos x \neq 0$, то разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$3\,tg^2x - tgx - 4 = 0$, которое сводится к квадратному и, откуда находим

tg x = -1 и tg x = 4/3

$x = -\pi/4 + \pi n,\ n\in Z$ $x = \text{arctg}\ 4/3 + \pi k,\ k\in Z$

Ответ: $-\pi/4 + \pi n$; $\text{arctg}\ 4/3 + \pi k$, $(n, k\in Z)$.

Пример: cos 3x + sin 3x = 0

Решение: sin 3x = - cos 3x

Так как значения x, при которых cos3x равен нулю, не являются корнями данного уравнения, то разделив обе части исходного уравнения на cos3x, получим уравнение, равносильное исходному:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = -\frac{\cos 3x}{\cos 3x}$$

tg 3x = -1

$3x = -\pi/4 + \pi n,\quad n\in Z$

$x = -\pi/12 + \pi/3\, n,\ n\in Z$

Ответ: $-\pi/12 + \pi/3\, n,\quad n\in Z$

Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента

Пример: sin x + cos x = $\sqrt{2}$

Решение: $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}$

$\sin x\cos(\pi/4) + \cos x\sin(\pi/4) = 1$

По формуле суммы синусов имеем:

$\sin(x+\pi/4) = 1$

$x+\pi/4 = \pi/2 + 2\pi n,\ n\in Z$

$x = \pi/2 - \pi/4 + 2\pi n,\ n\in Z$

$x = \pi/4 + 2\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $x = \pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z$

Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение

Пример: $\mathbf{\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0}$

Решение: $\cos 3x + (\sin 2x - \sin 4x) = 0$

Преобразовав выражение в скобках по формуле разности синусов, имеем:

$$\cos 3x + (-2 \sin x \cos x) = 0$$

$$\cos 3x\,(1 - 2 \sin x) = 0$$

а) $\cos 3x = 0$ или б) $\sin x = 1/2$

$3x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ $\qquad x = (-1)^k \pi/6 + \pi k,\ k \in Z$

$x = \pi/6 + \pi/3\, n,\ n \in Z$

Множество решений $x = (-1)^k \pi/6 + \pi k,\ k \in Z$ целиком содержится во множестве решений $x = \pi/6 + \pi/3\, n,\ n \in Z$, поэтому только последнее множество и является решением уравнения.

Ответ: $\pi/6 + \pi/3\, n,\ n \in Z$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример: $\mathbf{\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x}$

Решение: Применим к обеим частям уравнения формулу произведения синуса на косинус

$$\tfrac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \tfrac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x)$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены, получим

$$\sin 2x - \sin 4x = 0$$

применим формулу разности синусов:

-2 sin x cos 3x = 0, откуда

а) sin x = 0 или б) cos 3x = 0

$x = \pi n,\ n \in Z$ $3x = \pi/2 + \pi k, \quad k \in Z$

$x = \pi/6 + \pi/3\ k, \quad k \in Z$

Ответ: $\pi n;\ \pi/6 + \pi/3\ k, \quad n, k \in Z$

Решение уравнений с применением формул понижения степени

Пример: $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$

Решение: $\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 4x}{2} = 1$

cos 2x + cos 4x = 0

По формуле суммы косинусов имеем

2 cos 3x cos x = 0

а) cos 3x = 0 или б) cos x = 0

$3x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ $x = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = \pi/6 + \pi/3\ n, \quad n \in Z$

Множество решений уравнения б) является подмножеством множества решений уравнения а), поэтому в ответе запишем лишь корни уравнения а).

Ответ: $\pi/6 + \pi/3\ n, \quad n \in Z$

Пример: $\cos x - 2\sin^2(x/2) = 0$

Решение: cos x – (1-cos x) = 0

2 cos x – 1 = 0

cos x = ½

$x = \pm \pi/3 + 2\pi\ n, \quad n \in Z$

Ответ: $\pm \pi/3 + 2\pi\ n, \quad n \in Z$

Решение уравнений с применением формул двойного и тройного аргументов

Пример: $\sin 2x = \sqrt{2} \cos x$

Применив формулу синуса двойного аргумента к левой части уравнения, будем иметь

$2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x$

Разделить обе части на cos x нельзя, так как это приведет к потере корней, поэтому перенесем $\sqrt{2}$ cos x в левую часть и вынесем за скобки как общий множитель

$$\sqrt{2}\cos x\,(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0,$$ откуда имеем совокупность уравнений

а) $\cos x = 0$ или б) $\sqrt{2}\sin x = 1$

$x = \pi/2 + \pi n,\quad n\in Z$ $x = (-1)^k \pi/4 + \pi k,\quad k\in Z$

Ответ: $\pi/2 + \pi n,\quad (-1)^k \pi/4 + \pi k,\quad k\in Z$

Пример: $2\sin(x/2)\cos^2 x - 2\sin(x/2)\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Решение: Вынесем за скобку общий множитель 2 sin(x/2) в левой части уравнения

$$2\sin(x/2)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2\sin(x/2)\cos 2x = \cos 2x$$

$$2\sin(x/2)\cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x\,(2\sin(x/2) - 1) = 0$$

а) $\cos 2x = 0$ или б) $\sin(x/2) = ½$

$x = \pi/4 + \pi/2\, n,\quad n\in Z$ $x = (-1)^k \pi/3 + 2\pi k,\quad k\in Z$

Ответ: $\pi/4 + \pi/2\, n,\quad n\in Z$ $(-1)^k \pi/3 + 2\pi k,\quad k\in Z$

Решение уравнений с помощью замены переменных

1. Уравнения вида $P(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$, где $P(y, z)$ - многочлен, решаются заменой $\sin x \pm \cos x = t \Rightarrow 1 \pm 2\sin x \cos x = t^2$

Пример: $\mathbf{\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x}$

Решение: Обозначим $\sin x + \cos x = t$. Тогда $(\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow 1+2\sin x\cos x = t^2$

$$\sin x \cos x = (t^2 - 1)/2$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$t = 1 + (t^2-1)/2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=1$$

$\sin(\pi/4)\sin x + \cos(\pi/4)\cos x = 1/\sqrt{2}$

$\cos(x - \pi/4)=\sqrt{2}/2$

$x - \pi/4 = \pm\pi/4 + 2\pi n,\ n\in Z$

$x = \pi/4 \pm \pi/4 + 2\pi n,\ n\in Z$

$x_1=\pi/4 + \pi/4 + 2\pi n = \pi/2 + 2\pi n,\ n\in Z$

$x_2= \pi/4 - \pi/4 + 2\pi n = 2\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $\pi/2 + 2\pi n;\ 2\pi n,\ n\in Z$

2. Уравнения вида $a\sin x + b\cos x + d = 0$, где , $a, b, d \in R$ $a,b\neq 0$, решаются заменой

$\cos x =\dfrac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$, $\sin x = \dfrac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$, $x\neq \pi + 2\pi n,\ n\in Z$

Пример: 3 cos x + 4 sin x = 5

Решение: Делаем замену

$$3\ \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}+4\ \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=5$$

$3 - 3\,tg^2(x/2) + 8\,tg(x/2) = 5 + 5\,tg^2(x/2)$

$4\,tg^2(x/2) - 4\,tg(x/2) + 1 = 0$

$(2\,tg(x/2) - 1)^2 = 0$

$tg(x/2)= 1/2$

$x = 2\,arctg(1/2) + 2\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $2\,arctg(1/2) + 2\pi n,\ n\in Z$

Пример: $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x\cos 2x$

Решение: $(\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x = \sin 2x \cos 2$

Выражение в скобках согласно основному тригонометрическому тождеству равно 1. Поменяем знаки в уравнении, имеем:

$$2\sin^2 2x\cos^2 2x + \sin 2x\cos 2x - 1$$

Обозначим $\sin 2x \cos 2x = y$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$2y^2+y-1=0,$$

откуда найдем $y_1= -1$ и $y_2= ½$

Перейдем к переменной x:

1) $\sin 2x \cos 2x = -1$

$2 \sin 2x \cos 2x = -2$

$\sin 4x = -2$

$\varnothing$

2) $\sin 2x \cos 2x = ½$

$2 \sin 2x \cos 2x = 1$

$\sin 4x = 1$

$4x = \pi/2 + 2\pi n, n\in Z$

$x = \pi/8 + \pi/2 n, n\in Z$

Ответ: $\pi/8 + \pi/2 n, n\in Z$

Решение тригонометрических уравнений вида f(x)=$\sqrt{\varphi(x)}$

Пример: $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$, $x\in[\pi, 3\pi]$

Решение: $\begin{cases} 1-\cos x \ge 0 \\ \sin x \ge 0 \end{cases}$

При условии, что обе части уравнения неотрицательны, возведем их в квадрат:

$$1- \cos x = \sin^2 x$$

$$1- \cos x = 1- \cos^2 x$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 1) = 0$$

а) $\cos x = 0$

$x= \pi/2 + \pi n, n\in Z$

б) $\cos x = 1$

$x=2\pi k, k\in Z$

Но так как $\sin x \ge 0$ и $x\in[\pi, 3\pi]$, то оставляем $x=2\pi, 5\pi/2$

Ответ: $2\pi, 5\pi/2$

Решить уравнения:

1) $\sqrt{2}\cos^2 7x-\cos 7x=0$

а) п(8n±1)/28,	б) п/7±пk/7,	в) п/14±пk/7,	г) 2/7пn±п/28,
п(2k+1)/14, n,k∈Z	8пn+п/28, n,k∈Z	п(2k+1)/14, n,k∈Z	2пk+1/14, n,k∈Z

2) $4\cos^3 x - 4\cos^2 x - \cos(\pi+x) - 1 = 0$

а) 2пn, n∈Z	б) 2пn; п/3+2пk, k,n∈Z	в) 2пn; п/3+пk, k,n∈Z	г) пn; п/3+2пk, k,n∈Z

3) $\mathbf{6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0}$

а) $(-1)^n$ arcsin (1/3)+пn,	б) $(-1)^n$ п/4 + пk,	в) п/3±пk,	г) п/6±пk,
$(-1)^k$п/6 +пk, n k∈Z	$(-1)^n$ п/3+пn, n,k∈Z	п/6±2пn, n,k∈Z	п/3±2пn, n,k∈Z

4) **1+cos x + cos2x = 0**

г) пn;	б) 2пn;	в) 2пn;	**г) п/2 +2пn,**
п/3+2пk, k,n∈Z	2п/3+2пk, k,n∈Z	п/3+пk, k,n∈Z	**2п(3m ±1)/3, n,m ∈Z**

10.2 Тригонометрические неравенства

Решения неравенств $\sin x \le a$, $\sin x \ge a$

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \le x \le \arcsin a + 2\pi k$$

$$\arcsin a + 2\pi k \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi k$$

Решения неравенств $\cos x \le a$ и $\cos x \le a$

$$\arccos a + 2\pi k \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi k$$

$$-\arccos a + 2\pi k \le x \le \arccos a + 2\pi k$$

Решения неравенств $\mathrm{tg}\, x \le a$ и $\mathrm{tg}\, x \ge a$

$$-\pi/2 + \pi k \le x \le \mathrm{arctg}\, a + \pi k$$

$$\mathrm{arctg}\, a + \pi k \le x \le \pi/2 + \pi k$$

Решения неравенств $\mathrm{ctg}\, x \le a$ и $\mathrm{ctg}\, x \ge a$

$\operatorname{arcctg} a + \pi k \le x \le \pi + \pi k$

$\pi k \le x \le \operatorname{arcctg} a + \pi k$

При решении неравенств удобно пользоваться формулой введения вспомогательного угла:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi),$$ где φ находится из условия:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Пример. Решить неравенство sin t > -1/2

Решение: Все точки P_t единичной окружности при значениях t, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, большую или равную -1/2. Множество всех таких точек – дуга *l*, выделенная на рис.1.Найдем условие принадлежности точки P_t этой дуге.

Точка P_{t1} лежит на правой полуокружности, ордината P_{t1} равна -1/2 и, следовательно, в качестве t_1 удобно взять значение t_1=arcsin (-1/2) = -п/6.

Представим, что совершаем обход дуги l от точки P_{t1} к P_{t2} против часовой стрелки. Тогда $t_2 > t_1$ и t_2 = п – arcsin(-1/2) = 7п/6. Итак, решения неравенства, принадлежащие промежутку [-п/2; 3п/2] длиной 2п, таковы: -п/6 < t < 7п/6.

Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида 2пn, n∈Z. Итак:

-п/6 +2пn < t < 7п/6 +2пn, n∈Z

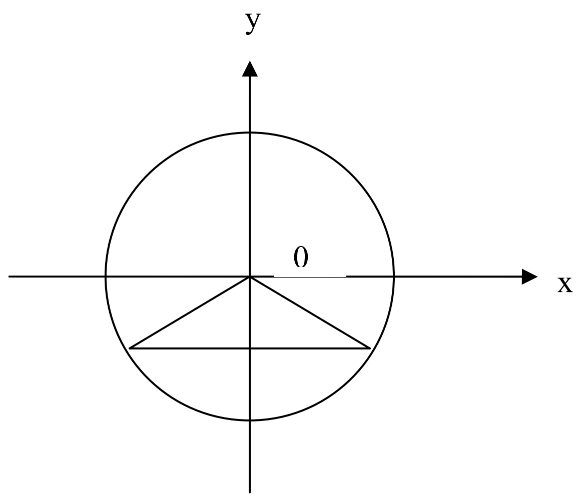


Рис.1.

Решить неравенства:

1. sin x ≥ 1/2	
а) п/3+2пk ≤ x ≤ 2/3п + 2пk	**б) п/6+2пk ≤ x ≤ 5/6п + 2пk**
в) п/2+2пk ≤ x ≤ 3/2п + 2пk	г) п/4+2пk ≤ x ≤ 5/3п + 2пk

2. ctg x ≤ - $\sqrt{3}$	
а) 5/6 п+пk ≤ x ≤ п+пk, k∈Z	б) 2/3 п+пk ≤ x ≤ п/2+пk, k∈Z
в) п/6 +пk ≤ x ≤ п+пk, k∈Z	г) 3/2 п+пk ≤ x ≤ п/3+пk, k∈Z

3. cos 2x ≥ - $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
а) -3п/8 +пk ≤ x ≤ 3п/8 +пk, k∈Z	б) -п/4 +пk ≤ x ≤ п/4 +пk, k∈Z
в) -п/3 +пk ≤ x ≤ п/3 +пk, k∈Z	г) -3п/4 +пk ≤ x ≤ 3п/4 +пk, k∈Z

4. tg x - 1 ≤ 0	
а) -п/2 +пk< x ≤ п/4 +пk, k∈Z	б) -п +пk< x < п/2 +пk, k∈Z
в) -3п/2 +пk< x < п/2 +пk, k∈Z	г) -п /2+пk< x < п/3 +пk, k∈Z

Тема 11. Производная. Формулы дифференцирования. Правила дифференцирования

Если существует предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке *x*, а этот предел называется значением производной функции $y = f(x)$ в точке *x* и обозначается $f'(x)$ или y'.
Формулы дифференцирования:

$C' = 0$ $(kx+b)' = k$ $(x^r)' = rx^{r-1}$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1)$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1)$ $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования:

$(u+v)' = u' + v'$,

$(uv)' = u'v + uv'$,

$(Cu)' = Cu'$,

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

Примеры

1. Найти $\left(\frac{1}{x^2}\right)'$ **;** $\left(\sqrt[5]{x^3}\right)'$**.**

Решение. Выражения можно переписать в виде степени x и воспользоваться формулами дифференцирования.

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}. \quad \left(\sqrt[5]{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}.$$

2. Найти $(4\sin x - x^4 \log_3 x)'$**.**

Решение. Применив правила дифференцирования, получим

$$(4\sin x - x^4 \log_3 x)' = 4\cos x - 4x^3 \log_3 x - x^4 \frac{1}{x \ln 3}.$$

3. Найти производную следующей сложной функции $(3x+5)^4$**.**

Решение. $((3x+5)^4)' = 4(3x+5)^3 \cdot (3x+5)' = 12(3x+5)^3$**.**

Тема 12. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Физический смысл производной

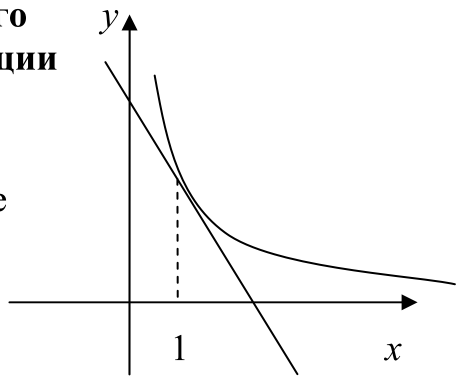
Геометрический смысл производной. Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x{=}a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x{=}a$:

$f'(a) = tg\alpha = k$, где k – угловой коэффициент касательной.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x=a$ имеет вид $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
Физический смысл производной. Производная функции f в точке X выражает скорость изменения функции в точке X, т.е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$.

Примеры

1. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{4}{x}$ в точке с абсциссой, равной единице.



Решение. $y' = -\frac{4}{x^2}$; $y'(1) = -4$. Значит, уравнение касательной: $y = \frac{4}{1} - 4(x-1) = -4x + 8$.

При $x = 0$ получим $y = 8$. $y = 0$ при $x = 2$.

$$S_{\Delta} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8.$$

2. Точка движется по оси Оx по закону $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 2t^2 - 5$. При каких t ускорение будет равно нулю?

Скорость $v(t) = x'(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t$. Ускорение $a(t) = v'(t) = -t + 4$.

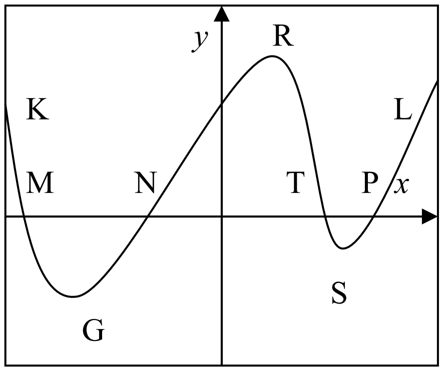
a(t)=0 при *t*=4.

Тема 13. Исследование функций с помощью производной

Исследование на монотонность. Если $f'(x) > 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ возрастает на X. Если $f'(x) < 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ убывает на X.
Исследование на экстремум. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x=a$, то либо $f'(a) = 0$,

либо $f'(a)$ не существует.
Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке. Говорят, что функция $y = f(x)$, определенная на промежутке *X*, достигает на нем своего наибольшего (наименьшего) значения, если существует точка *c*, принадлежащая этому промежутку, такая, что для всех *x* из *X* выполняется неравенство $f(x) \le f(c) \quad (f(x) \ge f(c))$. Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Примеры



1. Найти количество интервалов возрастания функции *f*(*x*) на отрезке [*a*; *в*], если график ее производной на этом отрезке имеет вид:

Решение. При $f' > 0$ функция возрастает. Интервалов возрастания 3: KM, NT, PL.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ **на отрезке: а) [-4; 4]; б) [-4; 0].**

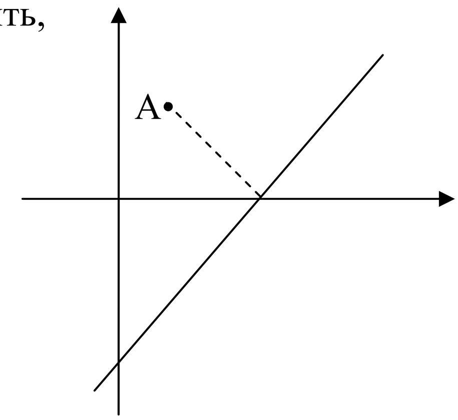
Решение. $f'(x)=0$ при $x_1=-3$ и $x_2=1$. В точке $x_2=1$ минимум функции, т.к. до нее функция убывала ($f' < 0$), а после нее возрастала ($f' > 0$).

а) *f*(-3) = 27	б) *f*(-3) = 27 - наибол.
f(-4) = 20	*f*(-4) = 20
f(1) = -5 - наимен.	*f*(0) = 0 -наимен.
f(4) = 76 - наибол.	

3. Определить расстояние от точки A(1; 2) до прямой *y*=*x*-3.

Решение. Пусть B(*x;y*) – такая точка на данной прямой, что расстояние от A до B - наименьшее из расстояний от A до точек прямой. Искомое расстояние обозначим буквой *l*.

$l = \sqrt{(x-1)^2 + (x-3-2)^2}$. Достаточно определить, при каких *x* выражение под знаком корня принимает наименьшее значение.



$F(x) = (x-1)^2 + (x-5)^2 = 2x^2 - 12x + 26$
$F'(x) = 4x - 12.$
$4x - 12 = 0, x = 3, y = 0.$
$l = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}.$

B(*x;y*)

y=x-3

4. Найти точку графика функции $y = x^2 - \frac{3}{2}$, ближайшую к точке А(2; -1).

Решение. $F(x) = (x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (x^2 - \frac{3}{2} + 1)^2 = x^4 - 4x + \frac{17}{4}.$
$F'(x) = 4x^3 - 4.$

F ' (x)=0 при $x = 1$. Тогда $y = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $B(1; -\frac{1}{2})$.

Тема 14. Первообразная. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на промежутке *X*, если для любого *x* из *X* выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.
Если *F(x)* – первообразная для *f(x)* на промежутке *X*, то множество всех первообразных для *f(x)* имеет вид {*F(x)+C*}, где *C* – любое действительное число. Это множество называют неопределенным интегралом функции *f(x)* и обозначают $\int f(x)dx$.
Если *F(x)* – первообразная для *f(x)* на промежутке *X* и если *a, b* – точки из этого промежутка *X*, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (формула Ньютона-Лейбница), где $\int_a^b f(x)dx$ - определенный интеграл; *a, b* – пределы интегрирования; *f(x)* – подынтегральная функция.
Вычисление площадей плоских фигур с помощью интеграла. Если фигура представляет собой часть плоскости *xOy*, ограниченную прямыми

$x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и графиками непрерывных на отрезке $[a;\ b]$ функций $y=f(x), y=h(x)$ таких, что для любого x из $[a;\ b]$ выполняется неравенство $h(x)\le f(x)$, то площадь S фигуры вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b (f(x)-h(x))dx\,.$$

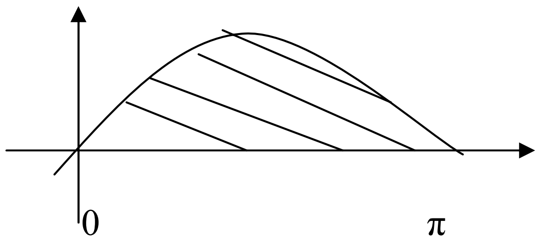
Примеры

1. Найти первообразную для функции *f(x)=x³* и неопределенный интеграл данной функции.

Решение. Первообразная имеет вид $F(x)=\frac{x^4}{4}$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3=f(x)$. Множество всех первообразных для *f(x)* имеет вид $\int f(x)dx=\frac{x^4}{4}+C$.

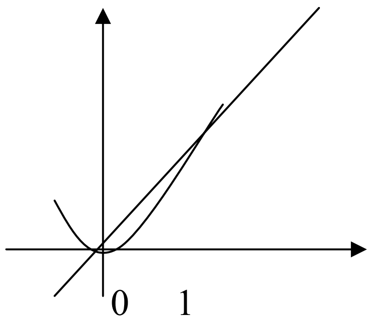
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой *y=sinx* и осью абсцисс на отрезке [0; π].

$$\int_0^\pi \sin x dx=-\cos x\ \Big|_0^\pi=$$
$$=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2$$



3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой *y=x²* и прямой *y=x*.

$$\int_0^1 (x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$



Тема 15. Декартовы координаты. Уравнение прямой

Координаты середины отрезка. Пусть $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ – две произвольные точки плоскости, $C(x;y)$ – середина отрезка AB. Тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Для точек пространства эти формулы аналогичны.

Расстояние между точками. Пусть точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ лежат на плоскости. Расстояние между ними находится по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Уравнение прямой. Любая прямая в декартовых координатах на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$.

Прямую можно задать уравнением $y = kx + q$; коэффициент k в этом уравнении называется угловым коэффициентом прямой.

Пусть $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ – точки некоторой прямой. Угловой коэффициент этой прямой можно вычислить по формуле: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Примеры

1. Найдите координаты одного из концов диаметра окружности, если другим его концом является точка (2;3), центром окружности – точка (0;1).

Решение. Обозначим искомые координаты буквами *x и y*. Центр окружности является серединой диаметра, поэтому

$0 = \dfrac{2 + x}{2},\ \ 1 = \dfrac{3 + y}{2}$. Отсюда получим: x= -2, y=-1.

2. Найдите расстояние между точками плоскости *A*(-1;2) и *B*(2;-4). Найдите расстояние между точками пространства *C*(1; 2; -3) и *O*(0; 0; 0).

Решение. $AB = \sqrt{(2+1)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$CO = \sqrt{(0-1)^2 + (0-2)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{14}$.

3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки *A(1;2)* и *B(3;5)*.

Решение. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + q$.

Угловой коэффициент $k = \dfrac{5-2}{3-1}$= 1,5.

Точка *A(1;2)* принадлежит прямой, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Тогда 2=1,5·1+q. Отсюда q=0,5.

Искомое уравнение: y=1,5x+0,5.

Тема 16. Векторы

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или <u>вектором</u>.

Углом между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом.

Длина отрезка, изображающего вектор $\overline{a}$, называется длиной вектора (абсолютной величиной, модулем).

Пусть точка $A(x_1;\ y_1)$ – начало вектора $\overline{a}$, точка $B(x_2;\ y_2)$ – конец этого вектора. Координатами вектора называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что абсолютная величина вектора $\overline{(a_1;a_2)}$ равна $\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}$.

<u>Суммой векторов</u> $\overline{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1;\ b_2)$ на плоскости называется вектор $\overline{c}$ с координатами $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$.

<u>Разностью векторов</u> $\overline{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1;\ b_2)$ на плоскости называется такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$; координаты вектора $\overline{c}$: $(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$.

<u>Произведением вектора</u> $\overline{(a_1;a_2)}$ <u>и числа</u> λ называется вектор $\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$.

<u>Скалярным произведением векторов</u> $\overline{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1;\ b_2)$ на плоскости называется число $a_1 b_1 + a_2\ b_2$.

Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.

Примеры

1. Найти координаты и длину вектора с началом в точке *K(4;-5)* и концом в точке *M(10; -1).*

Решение. Координаты вектора: 10-4=6 и (-1)-(-5)=4. $\overline{KM}(6;4)$.

Длина вектора $\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

2. Найти угол между векторами $\overline{a}(1;4)$ и $\overline{b}(8;-2)$. Найти угол между векторами $\overline{c}(2;2\sqrt{3})$ и $\overline{d}(2;0)$.

Решение. Косинус угла между векторами можно найти, разделив скалярное произведение векторов на произведение их абсолютных величин.

Косинус угла между $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\cos\alpha = \dfrac{1\cdot 8 + 4\cdot(-2)}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{68}} = 0$. Скалярное произведение данных векторов равно 0, значит, векторы перпендикулярны.

Косинус угла между $\overline{c}$ и $\overline{d}$: $\cos\gamma = \dfrac{2\cdot 2 + 2\sqrt{3}\cdot 0}{\sqrt{4+12}\cdot\sqrt{4}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. Косинус угла равен 0,5, значит, $\gamma = 60°$.

Тема 17 . Многоугольники. Треугольники. Теорема косинусов. Теорема синусов. Признаки подобия треугольников. Замечательные линии в треугольнике.

Многоугольник - геометрическая фигура с несколькими сторонами. *Многоугольник* - геометрическая фигура, состоящая из трех или более отрезков, лежащих в одной плоскости; каждый отрезок пересекает ровно два других отрезка в их концах, которые являются концами данного отрезка; никакие два пересекающихся отрезка не лежат на одной прямой.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Названия многоугольников.

3 стороны - треугольник

4 стороны - четырехугольник

5 сторон - пятиугольник

6 сторон - шестиугольник

7 сторон - семиугольник

8 сторон - восьмиугольник

9 сторон - девятиугольник

10 сторон - десятиугольник

20 сторон – двадцатиугольник

………………………………..

n сторон - n-угольник

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны.

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n - 2)\times 180^{\circ}$.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. У n-угольника $2n$ внешних углов.

Сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна 720°.

Градусная мера любого внешнего угла правильного n-угольника равна 360º/n.

Градусная мера любого внутреннего угла правильного n-угольника равна (n - 2)180º/n.

Периметром многоугольника называется сумма длин его сторон. Для того чтобы найти периметр прямоугольника необходимо сложить длины всех его сторон.

Треугольники.

Виды треугольников:

Треугольник называется *равнобедренным,* если у него две сторны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами,* а третья сторона называется *основанием* треугольника.

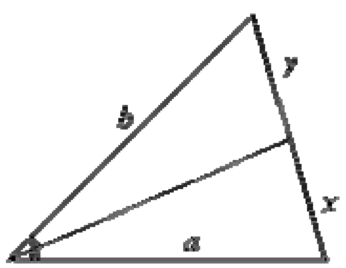
Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним* или *правильным.*

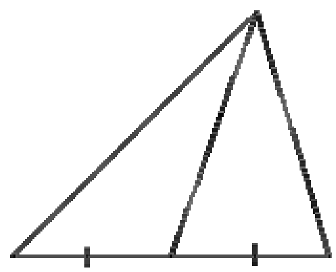
Треугольник называется *прямоугольным,* если у него есть прямой угол, то есть угол в 90°. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой,* две другие стороны называются *катетами.*

Треугольник называется *остроугольным,* если все три его угла — острые, то есть меньше 90°.

Треугольник называется *тупоугольным,* если один из его углов — тупой, то есть больше 90°.

Линии треугольника





Медиана

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника.

Свойства медиан треугольника

1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Биссектриса

Биссектриса угла — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.

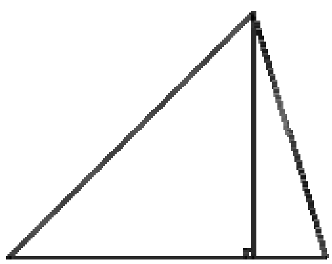
Свойства биссектрис треугольника

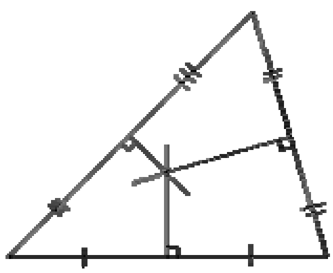
1. Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.

2. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

3. Точка пересечения биссектрис треугольника является *центром окружности, вписанной в этот треугольник.*

Высота





Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.

Свойства высот треугольника

1. В *прямоугольном треугольнике* высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, *подобные* исходному.
2. В *остроугольном треугольнике* две его высоты отсекают от него *подобные* треугольники.

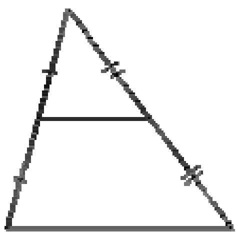
Срединный перпендикуляр

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* к отрезку.

Свойства серединных перпендикуляров треугольника

1. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.
2. Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром *окружности, описанной около этого треугольника*.

Средняя линия



Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Признаки равенства треугольников

Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

- две стороны и угол между ними;
- два угла и прилежащая к ним сторона;
- три стороны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:

- гипотенуза и острый угол;
- катет и противолежащий угол;
- катет и прилежащий угол;
- два катета;
- гипотенуза и катет.

Подобие треугольников

Два треугольника *подобны,* если выполняется одно из следующих условий, называемых *признаками подобия:*

- два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
- две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны;
- три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т. п.) пропорциональны.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной около треугольника окружности:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Формулы площади треугольника

Произвольный треугольник

Пусть *a, b, c* — стороны; α — угол между сторонами *a* и *b*; $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; *R* — радиус описанной окружности; *r* — радиус вписанной окружности; *S* — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне *a*, тогда

$$S=\frac{1}{2}ah_a$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S=pr$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

Прямоугольный треугольник

Пусть *a, b* — катеты; *c* — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к стороне *c,* тогда

$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$S = \frac{1}{2}ch_c$$

Равносторонний треугольник

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Замечательные точки и линии в треугольнике

Точки:

1. Высоты треугольника пересекаются в одной точке – *ортоцентре.*
2. Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке – *центре окружности, описанной около треугольника.*
3. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – *центре окружности, вписанной в треугольник.*
4. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке - *центроиде* и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Линии:

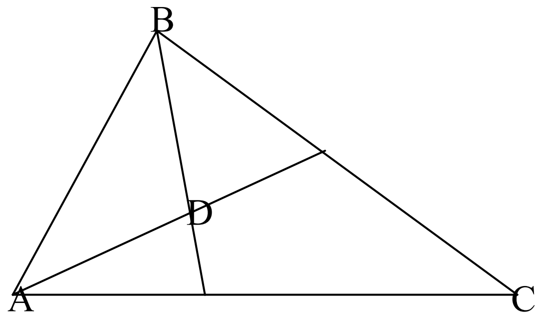
*Ортоцентр, центроид и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой – это прямая называется прямой ЭЙЛЕРА.

Два частных случая прямой Эйлера:

1. Если треугольник АВС – равнобедренный, АВ=ВС, то прямая Эйлера – это ось симметрии треугольника.

2. Если треугольник АВС прямоугольный, $\angle$С=90º, то прямая Эйлера – это прямая, проходящая через вершину С прямого угла и середину О гипотенузы АВ.

Пример 1: В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B. Точка их пересечения обозначена D. Найдите угол ADB, если $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$.



Решение:

Рассмотрим ΔADB. В нем $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}, \angle ABD = \frac{\beta}{2}$, т.к. AD и BD биссектрисы углов соответственно. Так как сумма углов треугольника равна 180º, то в ΔADB

$\angle ADB = 180^0 - \angle BAD - \angle ABD = 180 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180 - \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Таким образом, $\angle ADB = 180 - \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Задания для самопроверки к теме 17:

1. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и C пересекаются в точке M. Найдите $\angle$ AMC, если $\angle$ A=70º, C=80º.

А. 10º В. 30 º

Б. 130º **Г. 150º**

2. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

А. 4 ab В. 2 ab/(a+b)

Б. 4 ab/(a+b) Г. a^2+b^2

3. Чему равна площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см?

А. 600 см² В. 50 см²

Б. 576 см² Г. 500 см²

1. Серединный перпендикуляр к стороне АВ равнобедренного треугольника АВС пересекает сторону ВС в точке Е. Найдите основание АС, если периметр треугольника АСЕ равен 27 см, а АВ=18 см.

А. 9 см В. 25 см

Б. 10 см Г. 18,25 см

Тема 18. Четырехугольники

Четырехугольник - геометрическая фигура с четырьмя сторонами. *Четырехугольником* называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки - сторонами четырехугольника.

Если четырехугольник лежит по одну сторону относительно прямой, содержащей любую из его сторон, то он называется *выпуклым.* Диагональю четырехугольника называется отрезок, соединяющий две противолежащие вершины.

Виды четырехугольников

1. **Параллелограммом** называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.

Свойства параллелограмма

- Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
- Противоположные стороны параллелограмма равны.
- Противолежащие углы параллелограмма равны.

- Соседние углы параллелограмма дополняют друг друга до 180º.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Если в четырехугольнике противолежащие стороны равны, то четырехугольник - параллелограмм.
- Если в четырехугольнике противолежащие углы равны, то четырехугольник - параллелограмм.
- Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.
- Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его четырёх сторон

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2.$$

2. **Ромб** - параллелограмм, у которого все стороны равны.

Так как ромб является параллелограммом, то для него справедливы все свойства параллелограмма. Таким образом, все теоремы, сформулированные в предыдущем разделе для параллелограммов, верны также и для ромбов. Кроме того, по определению все стороны ромба равны.

Приведем две теоремы, которые характеризуют дополнительные свойства ромбов:

- Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали пересекаются под прямым углом.
- Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали являются биссектрисами его углов.

<u>Площадь параллелограмма</u>

$$S_{ABCD} = |AD| \cdot h_{AD} = |AB| \cdot |AD| \sin\alpha = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \sin\beta.$$

<u>Площадь ромба</u>

а) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

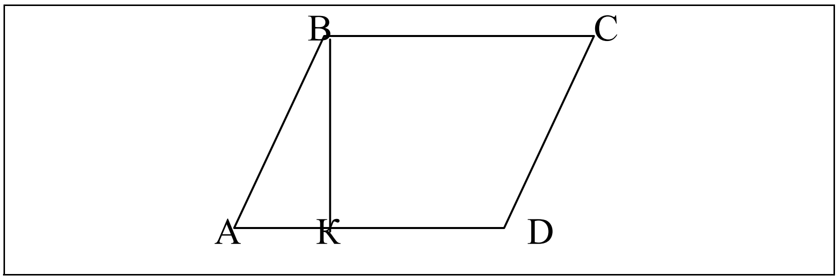
$$S = \frac{AC \times BD}{2}$$

б) Поскольку ромб является параллелограммом, его площадь также равна произведению его стороны на высоту.

$$S = AB \times h_{AB}$$

$S = AB^2 \times \sin\alpha$, где α — угол между сторонами ромба.

Пример. Периметр параллелограмма равен 44 см. Разность двух его углов равна 120º, а разность двух его сторон – 2 см. Найдите площадь параллелограмма.



Решение: Площадь параллелограмма находим по формуле: $S = AD \times h_{AD}$. Длину стороны AD найдем из известных данных: P=2AB+2AD=44(см) и AD-AB=2(см)

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{AD - AB = 2 \to AB = } AD - 2 \\ \mathrm{2AA + 2AA = 44 \to } AB + AD = 22 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ AD - 2+AD=22→AD=12(см) →AB=10(см)

Высоту ВК найдем из треугольника АВК из отношения sin∠ВАК=$\frac{BK}{AB}$→ ВК= АВ·sin∠ВАК= 10·sin∠ВАК. Угол ВАК найдем из известных данных:

$$\left.\begin{array}{r} \angle ABC - \angle BAK = 120 \\ \angle BAK + \angle ABK = 90 \\ \angle ABK = \angle ABC - 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \angle ABK + 90 - \angle BAK = 120 \\ \angle BAK + \angle ABK = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BAK = 30$$

Отсюда, $\sin\angle BAK = \sin 30^{o} = \frac{1}{2}$ и $BK = 10\cdot\frac{1}{2} = 5$(см)

$S =$ 12 см · 5 см = 60 см²

Ответ: S = 60 см²

Задания для самопроверки к теме 18:

1. В параллелограмме ABCD $AD = 7\frac{1}{3}$ м, BD=4,4м, $\angle A = 22^{o}30'$. Найдите $\angle BDC$ и $\angle DBC$/

А. $\approx 39^{o}38'$ *и* $117^{o}\,52'$ В. $\approx 140^{o}22'$ и $17^{o}\,08'$

Б. $\approx 39^{o}\,38'$ *и* $17^{o}\,08'$ **Г.** $\approx 39^{o}\,38'$ ***и*** $117^{o}\,52'$ ***или*** $140^{o}22'$ ***и*** $17^{o}\,08'$

2. Меньшая сторона параллелограмма равна 29 см. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит ее на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

А. 900 см ^{2} В. 450 см ^{2}

Б. 950 см ^{2} Г. 890 см ^{2}

3. Докажите, что четырехугольник – ромб, если его вершинами являются середины сторон прямоугольника.

Тема 19. Прямоугольник. Свойства трапеции

Прямоугольник - параллелограмм, у которого все углы прямые.

Квадрат - прямоугольник, у которого все стороны равны.

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми сторонами.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*.

Следующие теоремы описывают свойства равнобоких трапеций:

- В равнобокой трапеции углы при основании равны.
- Диагонали равнобокой трапеции равны.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Площадь трапеции

а) В случае, если a и b — основания и h высота, то формула площади:

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

б) В случае, если a, b, c и d — стороны трапеции:

$$S = \frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{(a+b-c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c+d)}$$

Пример. Периметр прямоугольника равен 52 см, а его стороны относятся как 4 : 9.

а) Найдите площадь прямоугольника.

б) Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника.

Решение:

а) Площадь прямоугольника найдем по формуле: S = a ·b, где a, b – стороны прямоугольника. Стороны прямоугольника найдем из данных:

P = 2(a+b)=52(см) и стороны относятся как 4 : 9.

Пусть k – коэффициент пропорциональности, тогда *4k* - выражение для длины одной стороны прямоугольника, а *9k* – выражение для длины другой стороны прямоугольника. Отсюда, $a=4k$ и $b=9k$, $2(4k+9k)=52 \rightarrow k=2$

Имеем, a = 4 · 2 = 8(см), b = 9 ·2 = 18(см), S = 8см · 18см = $144см^2$

б) Площадь квадрата находится по формуле: $S = a^2$, где a – длина стороны квадрата. Так как площадь известна, найдем длину стороны квадрата из равенства $a^2=144 \rightarrow a=12$ (см)

Ответ: $S_{прямоуг-ка}$ =144 см², $a_{квадрата}$ =12 см

Задания для самопроверки к теме 19:

1. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.

А. 45º **В. 30 º**

Б. 60 º Г. 90 º

2.Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные – 13 см и 37 см.

А. 240 см² В. 580 см²

Б. 960 см² **Г. 480 см²**

3. Найдите сторону ромба, зная, что его диагонали относятся как 1:2, а площадь ромба равна 12 см².

А. 15 см В. 14 см

Б. $\sqrt{15}$ **см** Г. $2\sqrt{3}$ см

Тема 20. Окружность и круг

Геометрическое место точек – совокупность всех точек, удовлетворяющих заданным условиям.

Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от одной ее точки.

Касательная к окружности – это прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку.

Хорда окружности – отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр окружности – хорда, проходящая через центр.

Секущая окружности – прямая, проходящая через две точки окружности.

Свойства касательных к окружности:

1) Касательная к окружности не имеет с ней других общих точек.

2) Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла.

Метрические соотношения в окружности:

1) Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.

2) Две дуги окружности, заключенные между двумя параллельными ее хордами, равны между собой.

3) Если две хорды пересекаются внутри окружности, то произведение отрезков хорд равны.

4) Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

Теоремы об окружностях и треугольниках:

1) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

$$R = \frac{1}{2}c$$

2) Радиус описанной окружности равен отношению произведения всех сторон треугольника к учетверенной площади, т.е.

$$R = \frac{abc}{4S}$$

3) Радиус вписанной окружности равен отношению площади треугольника к его полупериметру, т.е.

$$R = \frac{S}{p}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

4) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности суммы катетов и гипотенузы, т.е.

$$r = \frac{a+b+c}{2} = p - c$$

5) Квадрат расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей равен разности квадрата радиуса описанной окружности и удвоенного произведения радиусов, т.е.

$$OO_1^2 = R^2 - 2Rr$$

6) В равностороннем треугольнике:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}R = \sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}h$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2r = 2\sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}} = \frac{2}{3}h$$

7) $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{hc}$$

<u>Теоремы об окружностях и четырехугольниках</u>

1) Для того, чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противолежащих углов четырехугольника была равна 180º.

2) Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных сторон четырехугольника были равны.

3) Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим оснований:

$$h^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 = ab$$

4) Площадь любого описанного многоугольника, в частности четырехугольника, равна S=pr, где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности.

<u>Длина окружности</u>

Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π: $\frac{1}{2R}=\pi$. Отсюда *формула длины окружности:*

$$\boxed{l=2\pi R}$$

*Радианная мера угла

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.

Единицей радианной меры углов является РАДИАН.

Угол в один радиан – это угол, у которого длина дуги равна радиусу.

Градусная мера угла в один радиан равна $180°/\pi \approx 57°$.

Углу в 1° соответствует дуга длины πR/180, а углу в n° $l=\pi$R/180·n

Площадь круга

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного.

Границей круга является окружность с тем же центром и радиусом.

Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус.

$$S=\frac{lR}{2}=\pi R^2$$

Сектором круга называется часть круга, ограниченная двумя его радиусами.

Площадь сектора с угловой величиной дуги α вычисляется по формуле:

$$S_{сект.}=\frac{\pi R^2}{360}\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\alpha$$

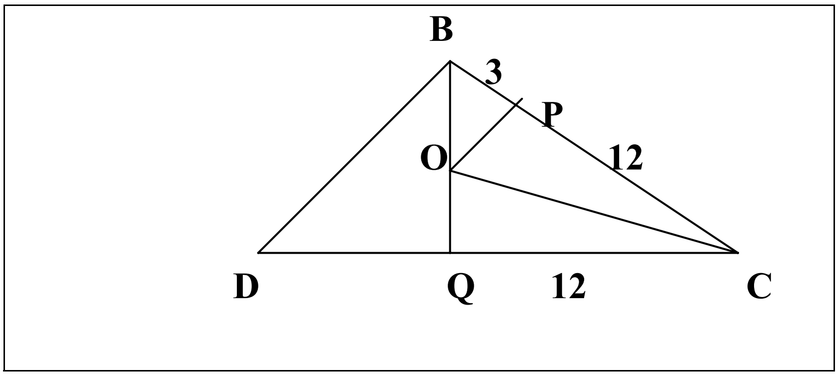
Сегментом называется часть круга, ограниченная хордой и стягиваемой ею дугой.

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$S_{сегм.} = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\Delta$, где S_Δ - площадь треугольника, образованного данной хордой и центральным углом, опирающегося на нее.

$S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$, где α - градусная мера центрального угла, опирающегося на данную хорду.

Пример: Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, если она касается стороны BC в точке P и известно, что BD+BC=15, CP=12.



Решение:

Так как треугольник BCD равнобедренный, то вписанная окружность касается основания CD в его середине, точке Q. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, QC=PC=12. Высоту BQ треугольника BCD найдем по теореме Пифагора: BQ=$\sqrt{225-144} = \sqrt{81} = 9$. Значит площадь S $_{ABC}$ = 9·12 (ед.^{2}), а P=15+12=27(ед.). Радиус r вписанной окружности найдем по формуле $S=p\cdot r \rightarrow r=\frac{S}{p}$, $r = \frac{9\cdot 12}{27} = 4$ (ед.)

Задания для самопроверки к теме 20

1. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями *a* и *b*.

А. *ab* | **В.** ***ab/(a+b)***

Б. *a+b* | Г. *(a+b)/ab*

2. Треугольник ВМР с углом В, равным 45°, вписан в окружность радиуса $6\sqrt{2}$. Найдите длину медианы ВК, если луч ВК пересекает окружность в точке С и СК=3

А. 11 В. 10,5

Б. 12 Г. 15

3. Радиус ОМ окружности с центром в точке О делит хорду АВ пополам. Докажите, что касательная, проведенная через точку М, параллельна хорде АВ.

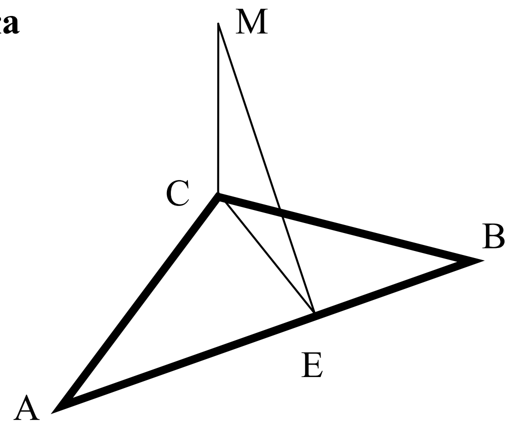
Тема 21. Прямые и плоскости в пространстве. Теоремы, используемые для обоснования чертежа

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая l не принадлежит плоскости α и параллельна некоторой прямой, принадлежащей плоскости α , то $l \parallel \alpha$. Если плоскость α проходит через прямую l, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β, то линия пересечения плоскостей параллельна прямой l.
Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая l перпендикулярна двум непараллельным прямым, принадлежащим плоскости α , то $l \perp \alpha$.
Признак перпендикулярности плоскостей. Если плоскость α проходит через прямую l, перпендикулярную плоскости β, то $\alpha \perp \beta$. Если две плоскости пересекаются по прямой l и каждая из плоскостей перпендикулярна третьей плоскости α, то $l \perp \alpha$.
Теорема о трех перпендикулярах. Прямая l, принадлежащая плоскости α, перпендикулярна прямой m тогда и только тогда, когда прямая l перпендикулярна проекции прямой m на плоскость α. Если плоскости α и β перпендикулярны и из точки $M \in \alpha$ проведен перпендикуляр l к плоскости β, то $l \subset \alpha$.

Теоремы помогают определить перпендикулярность или параллельность прямых и плоскостей при решении задач .

Примеры

1. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 20. Из вершины прямого угла C проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр CM=35. Найти расстояние от точки M до гипотенузы AB.



Решение. Проведем $ME \perp AB$. Теорема о трех перпендикулярах позволяет доказать, что $CE \perp AB$. Это следует из того, что CM – перпендикуляр к плоскости треугольника по условию, ME – наклонная, а CE – ее проекция.

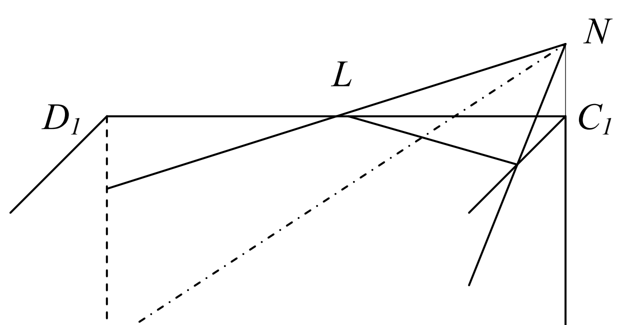
Далее решение задачи можно выполнить следующим образом. В ΔABC находим $AB = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Для того чтобы найти CE, вычислим

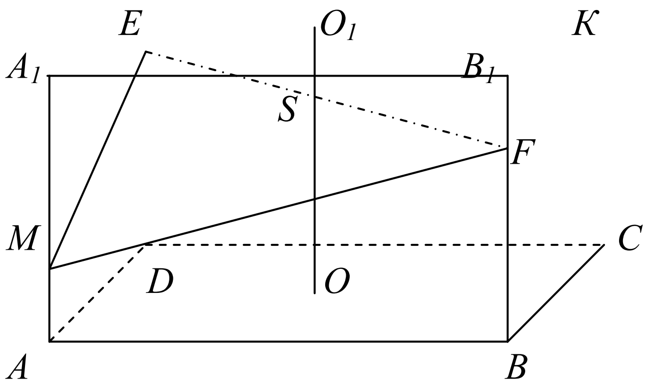
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot CB}{2} = 150$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot CE}{2}$. Отсюда CE=12.

$ME = \sqrt{MC^2 + CE^2} = 37$.

На чертежах к некоторым задачам необходимо бывает построить сечения. Построить сечение многогранника плоскостью – это значит найти линии пересечения секущей плоскости с гранями. Для этого достаточно определить точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками. Для определения каждого такого отрезка в плоскости грани строится прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость этой грани. Для построения же прямой пересечения надо найти две точки, принадлежащие плоскости сечения и лежащие в плоскости грани (в задачах такие точки могут не лежать на грани, находясь в плоскости грани). Иными словами, построение сечения сводится к нахождению в плоскостях граней многогранника по две точки, принадлежащие плоскости сечения.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) даны длины ребер $AB=a$, $AD=в$, $AA_1=c$. Пусть O – точка пересечения диагоналей $ABCD$, O_1 – точка пересечения диагоналей $A_1B_1C_1D_1$, а S – точка, делящая отрезок $O\,O_1$ в отношении 1:3, то есть $O_1S: SO$=1:3. Найти площадь сечения данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S параллельно диагонали AC_1 параллелепипеда и диагонали BD его основания $ABCD$.





Решение. Точка S лежит в диагональной плоскости BDD_1B_1. Секущая плоскость пересекает плоскость BDD_1B_1 по прямой EF, параллельной BD. При этом $D_1E = \frac{1}{4}c$ и $B_1F = \frac{1}{4}c$. Таким образом, используя условие параллельности секущей плоскости диагонали BD, мы нашли точки сечения E и F, лежащие на ребрах параллелепипеда.

Точка S лежит в диагональной плоскости ACC_1A_1. Секущая плоскость пересекает плоскость ACC_1A_1 по прямой MN, параллельной AC_1. При этом $MA = NC_1 = \frac{1}{4}c$.

Прямая EN лежит в плоскости грани DCC_1D_1, она пересекает ребро C_1D_1 в некоторой точке L. Из того, что $D_1E=NC_1$, следует, что L есть середина ребра C_1D_1 и L - середина отрезка EN.

Аналогично определим, что прямая FN пересекает ребро B_1 C_1 в его середине – точке K, и что $FK= KN$.

Площадь сечения $MFKLE$ – площадь $MFNE$ без площади треугольника KNL. Площадь параллелограмма $MFNE$ равна двум площадям треугольника MFE. Площадь KNL равна четверти площади FNE. Площадь треугольника MFE можно найти по формуле Герона.

$$MF = \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4}}, \quad ME = \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{4}}, \quad EF = DB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Площадь сечения равна $\frac{7}{16}\sqrt{4a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Высота треугольной пирамиды *ABCD*, опущенная из вершины *D*, проходит через точку пересечения высот треугольника *ABC*. Известно, что *DB=в, DC=с,* $\angle BDC = 90°$. Найти отношение площадей граней *ADB и ADC.*

В ходе решения задачи надо будет доказать, что $CD \perp AB$. Приведите это доказательство и решение задачи.

2. В треугольной пирамиде *SABC* проведена плоскость через точки *D, E* и *F*, делящие ребра *AB*, *AC* и *SC* соответственно в отношении 2:1; 1:2 и 1:1. В каком отношении эта плоскость делит ребро *SB*?
При решении задачи необходимо будет построить плоскость сечения. Приведите описание построения сечения и решение задачи.

Тема 22. Пирамида

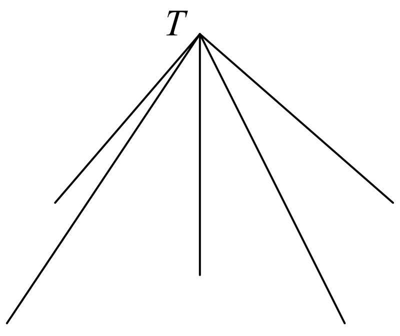
Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$, где $S_{осн}$ – площадь основания пирамиды, H – высота.
Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды $S_б = \frac{1}{2} P_{осн} l$, где $P_{осн}$ – периметр основания пирамиды, l – ее апофема. $S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$ - площадь боковой поверхности пирамиды, если все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол α.
Площадь полной поверхности пирамиды $S_п = S_б + S_{осн}$, где $S_б$ – площадь боковой поверхности пирамиды, $S_{осн}$ – площадь основания.

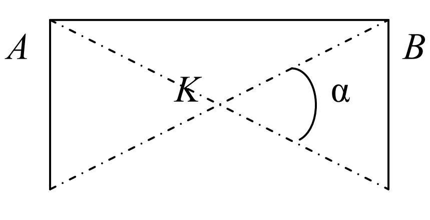
При решении задач очень важно хорошо представлять себе описанный в условии геометрический объект, уметь рассматривать его с разных точек зрения. Поэтому необходимо правильно и аккуратно выполнять чертежи. Обычно требуется не только использовать соответствующие формулы для объемных тел, но и знания из планиметрии.

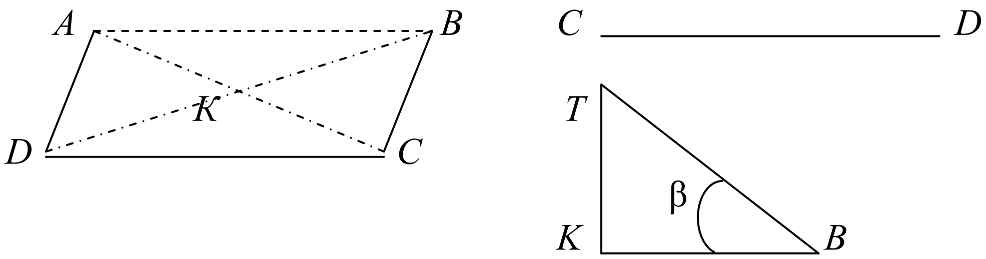
Пример

1. Основание четырехугольной пирамиды – прямоугольник с диагональю, равной *a*, и углом α между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с основанием угол β. Найти объем пирамиды.

Решение. Для нахождения объема надо знать площадь основания $S_{осн}$ и высоту пирамиды H. А нахождение $S_{осн}$ и H – планиметрические задачи.







Площадь прямоугольника с диагональю a и углом α между диагоналями равна $\frac{a^2}{2}\sin\alpha$. В прямоугольном треугольнике *ТКВ* сторона *КВ*=*а:*2, а сторона *ТК* является высотой пирамиды. $TK = \frac{a}{2}tg\beta$.

Используя формулу для нахождения объема, найдем $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\sin\alpha\cdot\frac{a}{2}tg\beta = \frac{a^3}{12}\sin\alpha\cdot tg\beta$.

Тема 23. Призма

Объем наклонной призмы $V = S_{пс}\,a$, где $S_{пс}$ – площадь перпендикулярного сечения наклонной призмы, a – боковое ребро. **Площадь боковой поверхности наклонной призмы** $S_б = P_{пс}\,a$, где $P_{пс}$ – периметр перпендикулярного сечения наклонной призмы, a – боковое ребро. **Площадь полной поверхности призмы** $S_п = S_б + 2S_{осн}$, где $S_б$ – площадь боковой поверхности наклонной призмы, $S_{осн}$ – площадь ее основания.
Объем прямой призмы $V = S_{осн}\,a$, где $S_{осн}$ – площадь основания призмы, a – боковое ребро. **Площадь боковой поверхности прямой призмы** $S_б = P_{осн}\,a$, где $P_{осн}$ – периметр основания призмы, a – боковое ребро.

Примеры

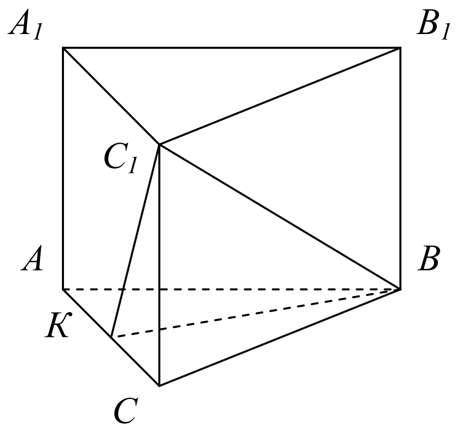
1. Основанием прямой призмы является равносторонний треугольник со стороной, равной $\sqrt{3}$. Длина бокового ребра призмы $\sqrt{3}$. Вычислите площадь боковой поверхности призмы и ее объем.

Решение. Периметр основания равен $3\sqrt{3}$, площадь боковой поверхности $3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=9$.

Высота равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{3}$ равна $\sqrt{3}\cdot\sin 60°=\frac{3}{2}$. Отсюда площадь основания призмы равна $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, объем призмы равен $\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{9}{4}$.

2. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ –треугольник ABC, в котором $AB=BC=10$. Высота призмы и расстояние от вершины B до плоскости ACC_1 равны 8. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра AC и вершины B и C_1.

Решение. Построим высоту BK треугольника ABC. AB=BC, поэтому BK является также медианой треугольника ABC. Данная призма прямая, поэтому CC_1 перпендикулярна плоскости ABC. BK лежит в плоскости ABC, поэтому $CC_1\perp BK$. Таким образом, прямая BK перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, следовательно, $BK\perp(ACC_1)$. Отсюда BK=8, и кроме того, $BK\perp KC_1$. Прямоугольные треугольники BCK и CC_1K имеют общий катет KC и $CC_1=BK$. Значит, эти треугольники равны, и $C_1K=BC$=10. Отсюда площадь сечения равна $\frac{BK\cdot KC_1}{2}=40$.



Задача для самостоятельного решения

1. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны m и n. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

А. $2(m+n)\sqrt{m^2+n^2}\cdot tg\beta$. Б. $(m+n)\sqrt{m^2+n^2}$.

В. $\frac{2tg\beta}{m^2+n^2}$. Г. $\frac{2(m+n)tg\beta}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

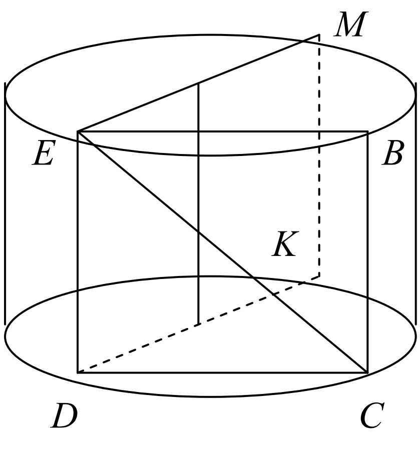
Тема 24. Тела вращения

Объем цилиндра $V=\pi R^2H$,

где R – радиус основания цилиндра, H – его высота. **Площадь боковой поверхности цилиндра** $S_б = 2\pi RH$, где R – радиус основания цилиндра, H – его высота. **Площадь полной поверхности цилиндра** $S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2$, где R – радиус основания цилиндра, H – его высота.
Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где R – радиус основания конуса, H – его высота. **Площадь боковой поверхности конуса** $S_б = \pi RL$, где R – радиус основания конуса, L – его образующая. **Площадь полной поверхности конуса** $S_п = \pi R(R + L)$, где R – радиус основания конуса, L – его образующая.
Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара. **Площадь сферы (площадь поверхности шара)** $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

Примеры

1. Через образующую *BC* цилиндра проведено сечение *BCDE*. Объем цилиндра равен 1440π, *BE*=8, тангенс угла между прямой *CE* и плоскостью основания равен 1,25. Найдите площадь осевого сечения.



Решение. $DE \perp CD$, поэтому $DE = CD \cdot tg\angle ECD = 8 \cdot 1{,}25 = 10$.

$V = 1440\pi = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot 10$,

отсюда получаем R=12.

Пусть *EDKM* – осевое сечение.

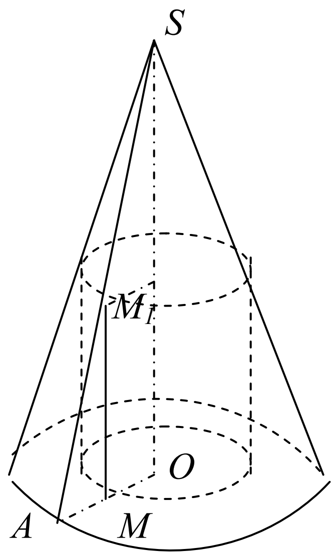
Тогда $EM = 2R = 24$ и

$S_{EDKM} = DE \cdot EM = 10 \cdot 24 = 240$.

Особую трудность представляют задачи, для решения которых требуются знания по разным темам школьного курса математики. Рассмотрим задачу, для решения которой кроме знаний из курса геометрии, необходимы знания по теме «Производная».

2. В конус, радиус основания которого *R* и высота *H*, вписан цилиндр. Найти размеры цилиндра, при которых площадь его боковой поверхности имеет наибольшее значение.

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра r, а его высоту h. Из подобия ΔSAO и ΔM_1AM следует, что $\frac{R-r}{h}=\frac{R}{H}$, откуда $h=\frac{(R-r)H}{R}$.



Подставив в формулу $S_б = 2\pi rh$ значение h, получим $S_б = 2\pi rH - \frac{2\pi H}{R}r^2$.

Рассмотрим $S_б$ как функцию r и исследуем ее на экстремум. Для этого найдем ее производную $S_б{}' = 2\pi H - \frac{4\pi H}{R}r$.

$S_б{}'$ =0 при $r=\frac{R}{2}$. В этой точке функция $S_б$ имеет максимум, т.е. площадь боковой поверхности цилиндра принимает наибольшее значение при $r=\frac{R}{2}$, а $h=\frac{1}{2}H$.

Тема 25
25.1 Преобразование рациональных выражений

Преобразование любого рационального выражения можно свести к сложению, вычитанию, умножению или делению рациональных дробей. Из правил действий с дробями следует, что сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей всегда можно представить в виде рациональной дроби, значит, и всякое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби. Чаще всего при преобразовании рациональных выражений используются формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2= a^2 +2ab + b^2$
$(a-b)^2= a^2 -2ab + b^2$
$(a+b)^3=a^3 +3a^2 b +3ab^2 + b^2$
$(a-b)^3=a^3 -3a^2 b +3ab^2 - b^2$
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3- b^3=(a-b)(a^2 +ab + b^2)$
$a^3+ b^3=(a+b)(a^2 -ab + b^2)$

Пример1. Упростить выражение $x+1-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}$

Решение: Сначала выполним умножение дробей, затем полученный результат вычтем из многочлена x+1

1) $\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x}=\frac{x-2}{x}$

2) x+1 - $\frac{x-2}{x}=\frac{x(x+1)-(x-2)}{x}=\frac{x^2+x-x+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$

Ответ: $\frac{x^2+2}{x}$

$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=$

а) $\frac{ab}{a+b}$ б) $\frac{a+b}{ab}$ в) $\frac{a-b}{ab}$ г) $\frac{ab}{a-b}$

$\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$			
а) $\frac{ab}{a+b}$	б) $\frac{a+b}{ab}$	**в)** $\frac{-a^4}{a^2+b^2}$	г) $\frac{ab}{a-b}$

25.2 Преобразование иррациональных выражений

Выражения, содержащие радикалы или степени с дробными показателями называются иррациональными. При выполнении действий с этими выражениями применяют следующие свойства:

$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$

$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m:n]{\sqrt[n]{a}}$

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$

$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}=a^{n/m}$

Пример. $\sqrt[4]{48\cdot 27}$

Решение: Разложим на множители подкоренное выражение, используем свойства корней и вычислим значение выражения:

$\sqrt[4]{16\cdot 3\cdot 3^3}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^4}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{3}=2\cdot 3=6$

Ответ: $\sqrt[4]{48\cdot 27}$ =6

Вычисление дробных выражений, содержащих радикалы, часто облегчается, если предварительно «уничтожить иррациональность» в числителе или знаменателе, то есть преобразовать дробь так, чтобы в числителе или знаменателе не содержались радикалы.

Пример. Вычислить $\dfrac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$

Решение:

$$\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}=\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{25\cdot 2}\right)\left(5-\sqrt{4\cdot 6}\right)}{\sqrt{25\cdot 3}-5\sqrt{2}}=\frac{\left(5\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$

Сократим числитель и знаменатель на 5 и, чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе, умножим и числитель, и знаменатель на ($\sqrt{3}+\sqrt{2}$). Имеем $\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\left(5-2\sqrt{6}\right)}{3-2}=$

знаменатель стал равен 1, а в числителе, используя формулы сокращенного умножения, получаем: $(3+2\sqrt{6}+2)(5-2\sqrt{6})=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=25-4\cdot 6=25-24=1$

Ответ: 1

Пример. Упростить $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}}\cdot\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}\right)}{(a-b)^{\frac{1}{3}}}$

Решение: Используя свойства радикалов, можем записать

$\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a^{2/3}(a-b)^{2/3}}\cdot\dfrac{a^{2/3}(a^{3/2}-b^{3/2})}{(a-b)^{1/3}}=\ldots$ Сократим на $a^{2/3}$, применим свойства степеней, получим

$$\ldots=\frac{(a^{3/2}+b^{3/2})}{(a-b)^{2/3}}\cdot\frac{(a^{3/2}-b^{3/2})}{(a-b)^{1/3}}=\frac{a^3-b^3}{(a-b)}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

Ответ: a^2+ab+b^2

Задания:

1. Вычислить $\sqrt{25^3}-0{,}25$

а) 37,25 **б) 14,75** **в) 124,75** 4) 26,25

2. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[4]{625m^8}}{\sqrt[3]{125m^3}}$

а) $25m^2$ **б) m** в) 25m 4) $5m^2$

3. Упростить выражение:
$$\left(\frac{c-\sqrt{d}}{c+\sqrt{d}}-\frac{c+\sqrt{d}}{c-\sqrt{d}}\right):\frac{2c\sqrt{d}}{c+\sqrt{d}}$$

а) $2c\sqrt{d}$ **б)** $\frac{c-\sqrt{d}}{c+\sqrt{d}}$ **в)** $\frac{-2}{c-\sqrt{d}}$ г) $\frac{c+\sqrt{d}}{c-\sqrt{d}}$

Тема 26. Иррациональные уравнения

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называют иррациональными. Например: $\sqrt{x-2}=0$

При решении иррациональных уравнений нужно учитывать следующую теорему:

При натуральном n уравнение $\sqrt[2n]{f(x)}=\varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=(\varphi(x))^{2n} \\ \varphi(x)\ge 0 \end{cases}$$

Пример. $\sqrt{12-x}=x$

Решение: Согласно теореме данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 12-x=x^2 \\ x\ge 0 \\ 12-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-12=0 \\ 0\le x\le 12 \end{cases}$$

Решая полученное квадратное уравнение, найдем

x_1=-4 – отпадает по ОДЗ

x_2=3

Ответ: 3

Пример. $\mathbf{(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0}$.

Решение: Найдем область дозволенных значений для x:

$2x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1/2$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, уравнение равносильно совокупности уравнений

$x^2-1=0$ или $\sqrt{2x-1}=0$

Из первого уравнения найдем x=1.

Из второго уравнения x=1/2. Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: {1/2; 1}

Решить уравнения:

1. $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$

а) {-3;2} б) {-2; 3} в) {3;-2} г) {-3; -2}

2. $\sqrt{37-x^2}+5=x$

а) 5 б) 4 **в) 6** г) 3

3. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

а) {3; 9/2} б) {-9/2; -3} в) {-3; 9/2} **г) {-9/2; 3}**

Тема 27. Логарифмы и их свойства

Определение. Логарифмом числа b по основанию a (a>0, a≠1) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

$a^{\log_a b}=b$ (b>0, a>0 и a≠1) – основное логарифмическое тождество

Основные свойства логарифмов $(a>0, a\neq 1)$:

$$\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|, xy>0$$

$$\log_a x/y=\log_a|x|-\log_a|y|, xy>0$$

$$\log_a x^a = a\log_a x, x>0$$

$$\log_a x^{2m} = 2m\log_a|x|, x\neq 0, m\in N$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}, b>0, b\neq 1$$

$$\log_a x=\log_a kx^k, x>0, k\in R, k\neq 0$$

$$\log_a kx^m = \frac{m}{k}\log_a x, x>0; m,k\in R, k\neq 0$$

Пример: Найти значение $\log_2 32$

Решение. По определению, логарифм- показатель степени, в которую нужно возвести основание 2, чтобы получить число 32, т.е. $2^x=32$. Откуда x=5.

Ответ: 6

Пример: Найти значение $\log_5 0,04$

Решение: Заметим, что $0,04=1/25=5^{-2}$, поэтому $\log_5 0,04 = -2$

Ответ:

Пример: Найдем x, такое, что $\log_8 x=1/3$

Решение: Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$x=8^{\log_x 8}=8^{1/3}=2$

Ответ: 2

Пример: Найти значение выражения (lg72 – lg9) / (lg28-lg7)

Решение: Пользуясь основными свойствами логарифмов, преобразуем числитель и знаменатель этой дроби:

lg 72 – lg 9 = lg 72/9 = lg 8 = 3 lg 2

lg 28 – lg 7 = lg 28/7 = lg 4 = 2 lg 2, следовательно

(lg72 – lg9) / (lg28-lg7) = 3lg2 / 2lg2=3/2

Ответ: 3/2

Решить:

1. Найти логарифм числа 64 по основанию а=2			
а) 3	б) 4	в) 5	**г) 6**

2. Найти число х, если $\log_x 1/16 = 2$			
а) 1/4	б) 4	в) 1/2	г) 2
3. Упростить выражение $1,7^{\log_{1,7} 2}$			
а) 1,7	б) 4	в) 1/2	**г) 2**

4. Вычислить $\log_2 11-\log_2 44$

а) 2	б) -1	в) 3	**г) -2**

Тема 28

28.1 Показательная функция

Определение 1. Функция, заданная формулой $y=a^x$ (где $a>0$, $a\neq 1$), называется показательной функцией с основанием а.

Свойства показательной функции:

1. Область определения – множество R действительных чисел.
2. Область значений – множество R_+ всех положительных действительных чисел.
3. При $a>1$ функция возрастает на всей числовой прямой (рис.1);
   при $0<a<1$ функция убывает на множестве R (рис.2).

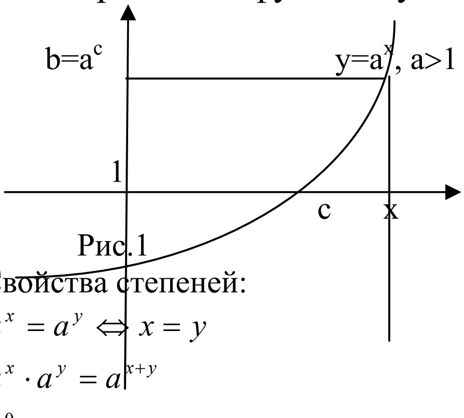


Рис.1

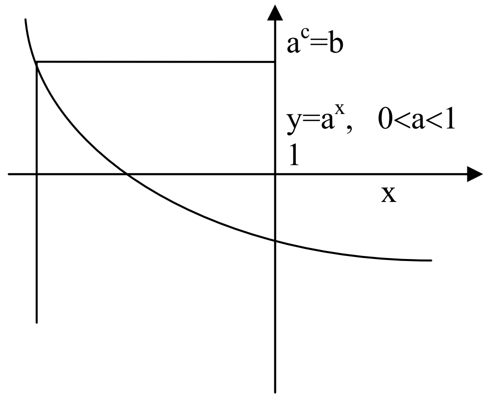


Рис.2

Свойства степеней:

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^0 = 1$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

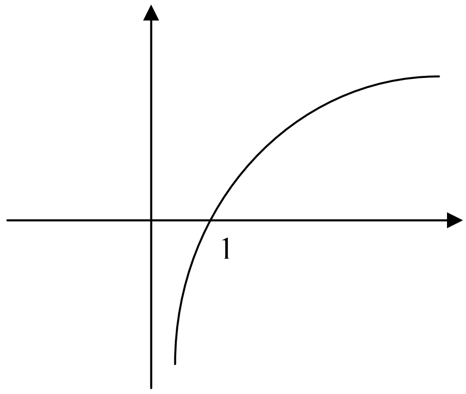
$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

28.2 Логарифмическая функция

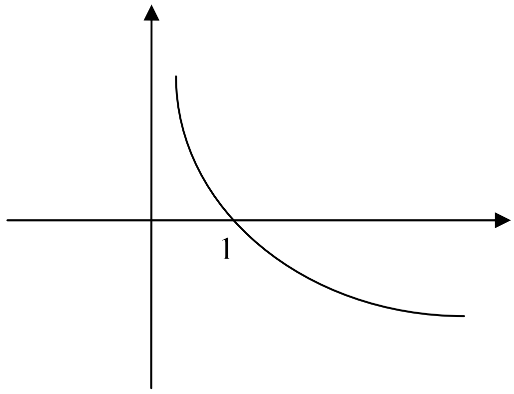
Определение 2. Функция, заданная формулой $y=\log_a x$, называется показательной функцией с основанием а, (где $a>0$, $a\neq 1$).

1. Область определения – множество всех положительных действительных чисел R_+
2. Область значений – множество всех действительных чисел R.
3. Логарифмическая функция возрастает на всей области определения при $a>1$ (рис.3);

при 0<a<1 функция убывает на множестве R (рис.4).



$y=\log_a x$, $a>0$
Рис.3



$y=\log_a x$, $0< a < 1$
Рис.4

Вследствие возрастания функции при a>1 получаем, что при x>1 логарифмическая функция принимает положительные значения, а при 0<x<1 – отрицательные. При 0<a<1, наоборот, функция принимает положительные значения при 0<x<1 и отрицательные при x>1.

Пример: Найти область определения функции $y=\log_8(4-5x)$

Решение: Область определения логарифмической функции – множество R_+. Поэтому заданная функция определена только для тех x, при которых 4x-5>0, т.е. при x<5/4. Следовательно, областью определения заданной функции является интервал (-∞; 0,8)

Ответ: (-∞; 0,8)

1. Найдите область значений функции $y = 6^x - 12$.

а) (0; +∞) **б) (–12; +∞)** в) [–12; +∞) г) (–∞; – 12)

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt[6]{1 - \log_{0,7} x}$.

а) [0,7; +∞) б) (0; 0,7] в) (–∞; 0,7] г) (0,7; +∞)

Тема 29.
29.1 Показательные уравнения

Если имеем уравнение вида $a^{f(x)} = b(a > 0)$, то при

1) $b \le 0 \Rightarrow x \in \varnothing$,

2) а) $b>0$, $a\ne 1 \Rightarrow f(x) = \log_a b$,

б) $b>0$, $a=1 \Rightarrow a^{f(x)} \equiv 1$, $x \in D(f)$ при $b=1$; $x \in \varnothing$ при $b \ne 1$.

Пример: $3^{ч^2-5ч+6} = 1$

Решение: Применив тождество (3), имеем $x^2-5x+6=0$.

Отсюда $x_1=2$, $x_2=3$.

Ответ: x=2, x=3.

Пример: $\mathbf{(3/7)^{3x-7}=(7/3)^{7x-3}}$.

Решение: Заметим, что $3/7=(7/3)^{-1}$ и перепишем наше уравнение в виде

$$(3/7)^{3x-7}=(3/7)^{-7x+3}.$$

Применив тождество (1), получим

$$3x-7=-7x+3,$$

$$x=1.$$

Ответ: 1.

Пример: $\mathbf{0{,}125\cdot 4^{2x-8}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}}$.

Решение: Переходя к основанию степени 2, получим

$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2\cdot(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{-1/2}\right)^{-x}$$

или

$$2^{-3}\cdot 2^{2\cdot(2x-8)}=(2^{2}\cdot 2^{-1/2})^{-x}.$$

Согласно тождеству (2), будем иметь.

$$2^{-3+2\cdot(2x-8)}=(2^{-2-0,5})^{-x}.$$

Пользуясь тождеством (5), запишем

$$2^{-3+4x-16}=2^{2,5x}.$$

Последнее уравнение по тождеству (1) равносильно уравнению

$$-3+4x-16=2{,}5x$$

$$x=38/3.$$

Ответ: 38/3.

Решение показательных уравнений, сводящихся к квадратным

Пример: $\mathbf{5^{2x-1}+5^{x+1}=250}$.

Решение. Применим тождество (2) и запишем исходное уравнение в виде

$$5^{2x}\cdot 5^{-1}+5^{x}\cdot 5-250=0.$$

Подставив $5^x = t > 0$ в последнее уравнение, получим

$$\frac{1}{5}t^2+5t-250=0.$$

Отсюда $t_1=-50$, $t_2=25$. Значение $t_1=-50$ не удовлетворяет условию $t>0$. Значит,

$$5^x=25,$$

$x=2.$

Ответ: 2.

Пример: $9^x+6^x=2*4^x$.

Решение: Разделим обе части уравнения на 4^x:

$$(9/4)^x+(6/4)^x-2=0,$$

или $$(3/2)^{2x}+(3/2)^x-2=0.$$

Обозначим $(3/2)^x = t$ $(t>0)$; тогда последнее уравнение запишется так:

$$t^2+t-2=0,$$

$$t_1 = -2, \quad t_2 = 1.$$

Значение t_1 не удовлетворяет условию $t>0$. Следовательно,

$$(3/2)^x=1,$$

$$x=0.$$

Ответ: 0.

Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку

Пример: $5^{x+1}-5^{x-1} = 24$.

Решение: В левой части уравнения вынесем за скобку общий множитель 5^{x-1}:

$$5^{x-1}(5^2-1)=24.$$

Получим $5^{x-1}=1$,

откуда $x-1 = 0$,

$$x = 1.$$

Ответ: 1.

Пример $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$.

Решение: После вынесения за скобку в левой части 6^x, в правой 2^x, получим

$$6^x(1+6)=2^x(1+2+4)$$

$$6^x=2^x.$$

Разделим обе части уравнения на $2^x \neq 0$:

$$3^x=1,$$

$$x=0.$$

Ответ: 0.

Решить уравнения:

1. $(4/9)^{\sqrt{x}} = (2,25)^{\sqrt{x}-4}$			
а) 4	б) 9	в)16	г)8

2. $2^x * 5^{x-1}=0,2 * 10^{2-x}$			
а) 2	б) 0,2	**в)1**	г) 0,5

3. $0{,}125*4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$			
а) 6	б) 9	в)3/2	г) 4

4. $5^{x-1}+5*0{,}2^{x-2}=26$			
а) $\{1, 2\}$	**б) $\{1, 3\}$**	в) $\{2, 3\}$	г) $\{3, 4\}$

29.2 Логарифмические уравнения

Рассмотрим наиболее часто употребляемые методы решения логарифмических уравнений.

Решение уравнений, основанное на определении логарифма

Пример: $\log_3(5+4\log_3(x-1)) = 2$

Решение:. По определению логарифма имеем

$5+4\log_3(x-1) = 3^2$,

$4\log_3(x-1) = 9-5$,

$\log_3(x-1) = 1$.

И снова по определению логарифма будем иметь

$x-1 = 3^1$,

$x = 4$.

Проверка, которая является частью решения этого уравнения, подтверждает правильность результата.

Ответ: $x = 4$.

Пример: $\log_{x-1}3=2$

Решение: Основание логарифма должно быть больше 0 и не равно 1, то есть

$$\begin{cases} x-1\rangle 0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\rangle 1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

По определению логарифма имеем $(x-1)^2=2$, откуда

$x^2 - 2x - 2 = 0$

Решая квадратное уравнение, найдем корни

$x_1 = 1-\sqrt{3}$ - отпадает по ОДЗ
$x_2 = 1+\sqrt{3}$

Ответ: $1+\sqrt{3}$

Решение уравнений потенцированием

Пример: $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$

Решение: Для нахождения области определения функции, стоящей в левой части, составим систему неравенств

$$\begin{cases} 3-x\rangle 0, \\ 1-x\rangle 0, \end{cases} \Rightarrow x < 1.$$

Применив тождество $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, можно записать, что

$\log_2((3-x)(1-x)) = 3$,

а по определению логарифма будем иметь

$(3-x)(1-x) = 2^3$, или $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Тогда $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Так как первое значение неизвестного не принадлежит области определения, то окончательно получим $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Применение основного логарифмического тождества

Пример: $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-4)}$

Решение: Область определения:

$$\begin{cases} 9-2^x\rangle 0 \\ 3-x\rangle 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x\langle 9 \\ x\langle 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\langle \log_2 9 \\ x\langle 3 \end{cases} \Rightarrow x\langle 3$$

Применив в правой части тождество $a^{\log_a x} = x$, будем иметь

$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

По определению логарифма

$2^{3-x} = 9 - 2^x$,

$2^3/2^x = 9 - 2^x$

$2^{2x} - 9.2^x + 8 = 0$,

Решая уравнение заменой переменной, найдем

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$;

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$ – посторонний корень.

Ответ: $x = 0$.

Логарифмирование

Пример: $(x + 1)^{\lg(x+1)} = 100(x + 1)$

Решение: Область определения: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10.

$$\lg(x + 1)\cdot\lg(x + 1) = \lg 100 + \lg(x + 1).$$

Обозначим $\lg(x + 1) = t$. Тогда уравнение примет вид

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Его решения $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, т.е.

$\lg(x + 1) = -1$, $x + 1 = 1/10$, $x = -0{,}9$;

$\lg(x + 1) = 2$, $x + 1 = 100$, $x = 99$.

Ответ: - 0,9; 99.

Замена переменной

Пример: $(\lg x)^2 - \lg x^3 + 2 = 0$

Решение:. Введем переменную $t = \lg x$, $x > 0$. Исходное уравнение примет вид

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Его решения $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Откуда

$\lg x = 1$, $x = 10$;

$\lg x = 2$, $x = 100$.

Ответ: 10; 100.

Переход к другому основанию

Пример: $1 + \log_2(x - 1) = \log_{(x-1)} 4$

Решение: Область определения: $x > 1$, $x \neq 2$.

По свойству $\log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a}$ имеем

$$\log_{(x-1)} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)} = \frac{2}{\log_2(x-1)}$$

Обозначим $\log_2(x-1)=y$. Тогда наше исходное уравнение примет вид

$$1 + y = 2/y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

откуда $y_1 = -2$, $y_2 = 1$.

Следовательно, $\log_2(x - 1) = -2$ или $\log_2(x - 1) = 1$,

$x - 1 = 1/4$. $x - 1 = 2$,

$x_1 = 5/4.$ $x_2 = 3.$

Ответ: 5/4; 3.

Решить уравнения:

1. $\log_3 (1+\log_3(2^x - 7)) = 1$			
а) 4	б) 3	в)6	г) 5

2. $\log_3(3^x - 8) = 2-x$			
а) 4	б) 3	**в)2**	г)5

3. $1+2\log_{(x+2)} 5 = \log_5 (x+2)$			
а) -9/5; 23	б) 9/5; 23	в) 2,2; 22	г) 4,5; 20

$\mathbf{\log_5\left(\frac{2+x}{10}\right) = \log_5 \left(\frac{2}{x+1}\right)}$			
а) 2	б) 5	в) 5	**г) 3**

Тема 30. Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств нужно учитывать следующие теоремы:

Теорема 1. При натуральном n неравенство $\sqrt[2n]{f(n)} < \varphi(n)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \langle (\varphi(x))^{2n} \\ \varphi(x) \rangle 0 \\ f(x) \rangle \geq 0 \end{cases}$$

Теорема 2. При натуральном n неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}\rangle\varphi(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases}\varphi(x)\langle 0,\\ f(x)\geq 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\varphi(x)\rangle 0,\\ f(x)\rangle(\varphi(x))^{2n}\end{cases}$$

Теорема 3. При натуральном n неравенство $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\gamma(x)}>1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\gamma(x)\rangle 0,\\ f(x)\rangle(\gamma(x))^{2n}\end{cases}$$

Теорема 4. При натуральном n неравенство $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\gamma(x)}\langle 1$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases}\gamma(x)\langle 0,\\ f(x)\geq 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\gamma(x)\rangle 0,\\ f(x)\geq 0,\\ f(x)\langle(\gamma(x))^{2n}\end{cases}$$

Пример. $\sqrt{x^2-16}\geq 1$

Решение. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^2-16\geq 0\\ x^2-16\geq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-4)(x+4)\geq 0\\ (x-\sqrt{17})(x+\sqrt{17})\geq 0\end{cases} \Rightarrow$$ Найдем пересечение множеств решений неравенств, имеем $x\in(-\infty;\,-\sqrt{17}\,]\cup[\,\sqrt{17}\,;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;\,-\sqrt{17}\,]\cup[\,\sqrt{17}\,;+\infty)$

Решить неравенства:

$\sqrt{25-20x+4x^2}\leq 1$			
а) (2; 3)	**б) [2; 3]**	в) (-2;3]	г) [-2; 3)

$\sqrt{2x-x^2+15}(3x-x^2-4)\leq 0$			
а) (-3; 5)	б) (-3; 5]	**в) [-3; 5]**	г) [-3; 5)

Тема 31.
31.1 Показательные неравенства

При решении показательных неравенств $a^x > b$ ($a>0$, $a \neq 1$), если

1) $b \leq 0$, то $x \in \varnothing$
2) $b>0$, то

$x > \log_a b$ при $a>1$,

$x < \log_a b$ при $0<a<1$;

Пример: $2^{x+2}>(1/4)^{1/x}$ или $2^{x+2}>(2^{-2})^{1/x}$

Решение: По тождеству (5) имеем

$$2^{x+2}>2^{-2/x}$$

Так как основание $2>1$, то знак неравенства сохраняется

$$x + 2 > - 2/x.$$

Решив последнее неравенство, получим $x \in (0; +\infty)$

Пример: **$(1{,}25)^{1-x} < (0{,}64)^{2(1+\sqrt{x})}$.**

Решение: Запишем исходное неравенство в виде

$$(5/4)^{1-x}<(16/25)^{2(1+\sqrt{x})},$$

или

$$(4/5)^{x-1}<(4/5)^{2*2(1+\sqrt{x})}.$$

Так как основание $0<4/5<1$, то последнее неравенство равносильно неравенству

$x-1>4(1+\sqrt{x})$ (знак неравенства изменился на противоположный!).

Далее имеем $x-4\sqrt{x}-5>0$, откуда

$(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)>0$, т.е.

$\sqrt{x}>5$.

Окончательно получим $x>25$.

Ответ: $x \in (25; +\infty)$.

Решить неравенства:

1. $2^{3-6x} >1$

а) $(-\infty; 1/2)$ б) $(-\infty; 1/2]$ в) $(1/2; +\infty)$ г) $[1/2; +\infty)$

2. $(1/3)^{\sqrt{x+2}} >3^{-x}$

а) $(-\infty; 2)$ б) $(-\infty; 2]$ **в) $(2; +\infty)$** г) $[2; +\infty)$

3. $5^{2x+1} >5^x +4$

а) $(-\infty; 2)$ б) $(-\infty; 0)$ **в) $(0; +\infty)$** г) $(2; +\infty)$

31.2 Логарифмические неравенства

При решении логарифмических неравенств необходимо помнить, что функция
$y = \log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$) является убывающей, если $0<a<1$,
возрастающей, если $a>1$.

Поэтому неравенство вида $\log_a f(x) < \log \varphi(x)$

при $0<a<1$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \end{cases}$$

при $a > 1$ - системе

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Пример. $\mathbf{\log_{1/5}((4x+6)/x)\geq 0}$

Решение. Так как $\log_{1/5}1=0$, то данное неравенство можно записать так:

$$\log_{1/5}((4x+6)/x) \geq \log_{1/5}1$$

С учетом области определения функции это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (4x+6)/x\rangle 0 \\ (4x+6)/x \leq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (4x+6)/x\rangle 0 \\ (4ч+6)/x-1 \leq 0 \end{cases}$$

Неравенства решаем методом интервалов:

$$\begin{cases} 4(x+3/2)x\rangle 0 \\ 3x(x+2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+3/2))\rangle 0 \\ x(x+2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2;-3/2)$$

Ответ: $x\in[-2; -3/2)$

Пример. $\mathbf{\log_{2x+3} x^2<1}$

Решение: $\log_{2x+3} x^2< \log_{2x+3}(2x+3)$

Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 0\langle 2x+3\langle 1 \\ x^2\rangle 2x+3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x+3\rangle 1 \\ 0\langle x^2\langle 2x+3 \end{cases}$$

а) Решая первую систему, получим систему

$$\begin{cases} -3/2\langle x\langle -1 \\ (x-3)(x+1)\rangle 0 \end{cases}$$

Данная система эквивалентна совокупности систем

$\begin{cases} -3/2\langle x\langle -1 \\ x\rangle 3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ или $\begin{cases} -3/2\langle x\langle -1 \\ x\langle -1 \end{cases} \Rightarrow$ x $\in$ (-3/2; -1)

б) решая вторую систему, получим

$$\begin{cases} x\rangle -1 \\ (x-3)(x+1)\langle 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\rangle -1 \\ -1\langle x\langle 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;\ 3)$$

Ответ: x $\in$ (-3/2; -1) $\cup$ (-1; 3)

Решить неравенства:

1. $\log_{1/3}(5x-1) > 0$

а) (1/5; 2/5) б) (2/5; +∞) в) (1/5; +∞) г) (0; 2/5)

2. $\log_5(3x-1) < 1$

а) (1/3; 4/3) **б) (1/3; 2)** в) (1/3; +∞) г) (0; 2)

3. $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$

а) (0,5; 4) б) (0,5; 4] **в) [1/2; 4]** г) [1/2; 4)

4. $1+\log_2(x-2) > \log_2(x^2-3x+2)$

а) (1; 2) $\cup$(2; 3) б) (2; +∞) в) (3; +∞) **г) (2; 3)**

Тема 32. Текстовые задачи

Чтобы правильно решать задачи, необходимо научиться переводить содержание задачи, выраженное словами, в алгебраическое выражение.

Решение задач с помощью уравнений первой степени

Задача. В куске было несколько метров сукна. В первый день продали 9м, во второй – 2/3 остатка, а в третий – остальные 7м. Сколько метров сукна было в куске первоначально?

Решение: Пусть всего сукна в куске было x метров.
В первый день продали 9м, осталось (x-9) м.
Во второй день продали 2/3 остатка, то есть $(x-9)\cdot\frac{2}{3}$
В третий день продали 7м.
За три дня продали весь кусок (*x* м), то есть 9+2/3 (x-9) + 7 = x
Решая полученное уравнение, найдем x=30

Ответ: В куске было 30 м сукна.

Решить задачи:

1. Туристы прошли расстояние между двумя пунктами за три дня. В первый день они прошли третью часть пути, во второй день – на 5 км больше, чем в первый, в третий – оставшиеся 25 км. Найти расстояние между пунктами.

а) 75 км　　б) 87 м　　в) 120 км　　**г) 90 км**

2. Бригада должна скосить по плану весь луг за 4 дня. В первый день скосили 120 га, во второй – 2/7 остатка, в третий – в 1,5 раза больше, чем во второй, в четвертый – оставшиеся 140 га. Какова площадь луга?

а) 610　　б) 580　　в) 600　　г) 720

Решение задач с помощью квадратных уравнений

Задача. Найти катеты прямоугольного треугольника, если известно, что один из них на 4 см меньше другого, а гипотенуза равна 20 см.

Решение: Пусть меньший катет равен x см. Тогда больший катет равен (x+4) см. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т.е.

$$x^2+(x+4)^2=20$$

Упростим полученное уравнение:

$$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400$$
$$2x^2 + 8x – 384 = 0$$
$$x^2+ 4x – 192 = 0$$

Решая квадратное уравнение, найдем $x_1 = -16$ (отпадает по смыслу)

$x_2 = 12$ – первый катет,

тогда второй катет равен 12+4=16 см

Ответ: 12 см, 16 см.

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Через сколько секунд оно окажется на высоте 60 м?

Решение: Из курса физики известно, что если не учитывать сопротивление воздуха, то высота h, на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через t секунд, может быть найдена по формуле

$$h = v_0 t - g t^2 / 2,$$

где v_0- начальная скорость (в м/с), g – ускорение свободного падения, приближенно равное 10 м/с^2.

Подставив значения h и v_0 в формулу, получим:

$$60=40 t - 5 t^2$$

$$5 t^2 - 40t + 60 = 0$$

Откуда находим $t_1=2$, $t_2=6$

То есть на высоте 60 м от земли тело оказывается дважды: когда летит вверх (через 2 с после бросания) и вниз (через 6 с после бросания).

Ответ: 2с и 6с.

Решить задачи:

1. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2.

а) 160 м б) 150 м в) 120 м **г) 140 м**

2. В кинотеатре число мест в ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в нем имеется 884 места?

а) 26 б) 28 в) 24 г) 30

Решение задач с помощью рациональных уравнений

Задача. Моторная лодка прошла 25 км по течению реки и 3 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Решение: Пусть ч км/ч – скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость лодки по течению (х+3) км/ч, а против течения (х-3) км/ч.
По течению реки 25 км лодка прошла за 25/х+3 ч, а против течения 3 км – за 3/ х-3 ч. Значит, время, затраченное на весь путь, равно (25/х+3 + 3/х-3) ч.

По условию задачи на весь путь лодка затратила 2 ч. Следовательно,

$$25/x+3 + 3/x-3 = 2$$

Решив дробно-рациональное уравнение, найдем корни

$x_1 = 2$ и $x_2 = 12$

По смыслу задачи скорость лодки в стоячей воде должна быть больше скорости течения. Этому условию удовлетворяет второй корень – 12 и не удовлетворяет первый.

Ответ: 12 км/ч

Решить задачи:

1. Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой должен был идти по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?

а) 80 км/ч б) 70 км/ч в) 75 км/ч г) 90 км/ч

2. Две бригады, работая совместно, закончили ремонт квартиры за 6 дней. Сколько дней потребовалось бы каждой бригаде на выполнение этой работы, если одной для этого требуется на 5 дней больше, чем другой?

а) 26 б) 28 в) 24 г) 30

Решение задач с помощью систем уравнений второй степени

Задача. Периметр прямоугольника равен 80 дм. Если основание прямоугольника увеличить на 8 дм, а высоту – на 2 дм, то площадь прямоугольника увеличится в полтора раза. Каковы стороны прямоугольника?

Решение. Пусть основание прямоугольника равно x дм, а высота равна y дм. По условию задачи периметр прямоугольника равен 80 дм, т.е.

$$2x+2y = 80$$

Площадь прямоугольника равна xy дм^2. После увеличения сторон основание прямоугольника будет равно (x+8) дм, высота (y+2) дм, а площадь – (x+8)(y+2) дм^2. По условию задачи площадь прямоугольника увеличится в полтора раза, т.е.

$$(x+8)(y+2) = 1{,}5xy$$

Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+2y=80 \\ (x+8)(y+2)=1{,}5xy \end{cases}$$

Решив ее, найдем, что $x_1=28$, $y_1=12$

$x_2=24$, $y_2=16$

Оба решения удовлетворяют условию.

Ответ: 28 дм и 12 дм; 24 дм и 16 дм

Решить задачи:

1. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а его гипотенуза равна 10 см. Каковы катеты треугольника?

а) 4 см и $2\sqrt{21}$ см **б) 8 см и 6 см** в) 5 см и $5\sqrt{3}$ см г) 7 см и $\sqrt{51}$

2. Один комбайнер может убрать урожай пшеницы с участка на 24 ч быстрее, чем другой. При совместной же работе они закончат уборку урожая за 35 часов. Сколько времени понадобится каждому комбайнеру, чтобы одному убрать урожай?

а) 60ч и 84 ч б) 50ч и 74ч в) 58ч и 82 ч г) 62ч и 86ч

Глоссарий

I. Действия над действительными числами. Алгебраические выражения, тождественные преобразования выражений. (Формулы разложения на множители).

• **Алгебраическим выражением** называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

• **Одночленом** называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями – умножением и возведением в натуральную степень.

• **Многочленом** называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

• Два выражения называются **тождественно равными** на данном множестве, если на этом множестве они имеют смысл и все их соответственные значения равны.

• Равенства, в которых левая и правая части - тождественно равные выражения, называются **тождествами.**

• **Тождественное преобразование выражения –** это замена выражения другим, тождественно равным ему.

• **Разложить многочлен на множители** – это значит представить многочлен в виде произведения одночлена и многочлена или произведения двух и более многочленов, которое тождественно данному многочлену.

II. Решение неравенств, содержащих одну переменную. Системы и совокупности неравенств. Дробно-линейные неравенства. Решение рациональных неравенств методом промежутков.

• **Решением неравенства** с одной переменной называется значение этой переменной, удовлетворяющее данному неравенству. Решить неравенство – значит найти все его решения или доказать, что их не существует.

• Два неравенства называются **эквивалентными** (равносильными), если они имеют одни и те же решения (или не имеют их вовсе).

• **Решением системы неравенств** с одной переменной называется значение переменной, удовлетворяющее каждому неравенству системы. Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

• **Решением совокупности неравенств** с одной переменной называется значение переменной, удовлетворяющее первому или второму неравенству совокупности. Решить систему неравенств – значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

• **Метод интервалов** состоит в разделении числовой оси на интервалы, во внутренних точках которых выражения (или множители) не меняют знака.

III. Модуль числа. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, неравенства с модулями

• **Модулем** действительного числа называется расстояние от начала отсчета до точки на числовой оси, которая изображает это число.

• **Модулем** положительного числа и нуля называют само это число, а модулем отрицательного - число, ему противоположное, то есть:

• Модуль числа называют **абсолютной величиной** числа.

4. Степень с рациональным показателем

- **Степенью числа a**>0 с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m - целое число, а n - натуральное (n>1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a > 0$

- **Свойства степени с рациональным показателем:**

$a > 0,\ b > 0,\ p \in \mathbf{Q},\ q \in \mathbf{Q}$

1. $a^p a^q = a^{p+q}$;
2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(ab)^p = a^p b^p$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

VI. Степенная функция. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

• Функцию вида y = x^n, где $n \in N$ называют **степенной функцией с натуральным показателем n**, которая непрерывна на множестве действительных чисел.

• **Степенной функцией с рациональным показателем** x^r называют функцию

$$x^r = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m.$$

где $r = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N$

• Свойства рациональных степеней*:*

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$a > 0$
$a^r > 1$	$a > 1, r > 0$ или $0 < a < 1, r < 0$
$a^r < 1$	$a > 1, r < 0$ или $0 < a < 1, r > 0$
$a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$	$a > 0$
$\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 r_2}$	$a > 0$
$a^{r_1} > a^{r_2}$	$a > 1, r_1 > r_2$

VII. Свойства функций. Построение графиков функций с помощью преобразований известных графиков.

• Функция f называется **четной**, если при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т.е. $f(-x) = f(x)$.

• Функция f называется **нечетной,** если при изменении знака аргумента значение функции изменяет только знак, т.е. $f(-x) =- f(x)$.

• Функция f называется **возрастающей** на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

• Функция f называется **убывающей** на промежутке I, если для любых $x_1, x_2 \in I$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

• Функции, возрастающие или убывающие на промежутке I, называют **монотонными** на этом промежутке.

• **Окрестностью точки x_0** называют интервал $(x_0 - h;\ x_0 + h)$.

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции f, если ее значение в точке x_0 меньше всех других ее значений, принимаемых в некоторой окрестности этой точки: $f(x_0) < f(x),\ x \neq x_0.$

• Значение функции f в точке x_0 называют **минимумом** и обозначают

$$y_{\min} = f(x_0)$$

• Точка x_0 называется **точкой максимума** функции f, если ее значение в точке x_0 больше всех других ее значений, принимаемых в некоторой окрестности этой точки: $f(x_0) > C,\ x \neq x_0.$

• Значение функции f в точке x_0 называют **максимумом** и обозначают

$$y_{\max} = f(x_0)$$

• Точки минимума и максимума называют **точками экстремума**, а значения функции в этих точках – **экстремумами**.

• Самое большое среди всех значений, которое функция f принимает на заданном промежутке I, называется **наибольшим значением функции** на заданном промежутке и обозначается $M = \max f(x)$

• Самое маленькое среди всех значений, которое функция f принимает на заданном промежутке I, называется **наименьшим значением функции** на заданном промежутке и обозначается m = min f(x)

• **Функция f называется ограниченной** на промежутке I, если существуют числа A и B, такие, что для всех значений $x \in I$ справедливо

$$A \leq f(x) \leq B$$

• Если существует число A, такое, что для всех значений $x \in I$ справедливо $f(x) \geq A$, то функция f называется **ограниченной снизу** на промежутке I.

• Если существует число B, такое, что для всех значений $x \in I$ справедливо $f(x) \leq B$, то функция f называется **ограниченной сверху** на промежутке I.

VIII. Прогрессии: арифметическая и геометрическая

• Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется **арифметической прогрессией**.

Обозначение: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

• Число $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} = \ldots$ называется **разностью арифметической прогрессии.**

• Формулы арифметической прогрессии:

$a_n = a_1 + d(n-1)$ - формула n-го члена арифметической прогрессии

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ - формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

• **Свойство арифметической прогрессии.** Каждый член арифметической прогрессии, кроме первого, равен полусумме двух соседних с ним членов, т.е. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

• Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется **геометрической прогрессией.**

Обозначение: $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

• Число $q=b_2:b_1= b_3:b_2 = \ldots=b_n:b_{n-1}=\ldots$ называется **знаменателем геометрической прогрессии.**

• Формулы геометрической прогрессии:

$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, \quad b_n \neq 0$ - формула знаменателя геометрической прогрессии

$b_n = b_1 q^{n-1}$ - формула n-го члена геометрической прогрессии

$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}, \quad q \neq 1$, $S_n = \dfrac{b_1 (q^n - 1)}{q-1}, \quad q \neq 1$ - формулы суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

• **Свойство геометрической прогрессии**. Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух ее соседних членов, т.е. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

17 . Многоугольники. Треугольники. Теорема косинусов. Теорема синусов. Признаки подобия треугольников. Замечательные линии в треугольнике.

• **Многоугольник** - геометрическая фигура с несколькими сторонами.

• **Многоугольник** - геометрическая фигура, состоящая из трех или более отрезков, лежащих в одной плоскости; каждый отрезок пересекает ровно два других отрезка в их концах, которые являются концами данного отрезка; никакие два пересекающихся отрезка не лежат на одной прямой.

• Многоугольник называется **выпуклым,** если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

• Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны.

• **Внешним углом** выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. У *n*-угольника *2n* внешних углов.

• **Периметром многоугольника** называется сумма длин его сторон. Для того чтобы найти периметр прямоугольника необходимо сложить длины всех его сторон.

• Треугольник называется **равнобедренным,** если у него две сторны равны. Эти равные стороны называются **боковыми сторонами**, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

• Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** или **правильным.**

• Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть прямой угол, то есть угол в 90°. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой,* две другие стороны называются *катетами.*

• Треугольник называется **остроугольным,** если все три его угла — острые, то есть меньше 90°.

• Треугольник называется **тупоугольным,** если один из его углов — тупой, то есть больше 90°.

• **Медиана** треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника.

• **Свойства медиан треугольника**

4. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.

5. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

6. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

• **Биссектриса угла** — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам.

• **Биссектрисой треугольника** называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.

• **Свойства биссектрис треугольника**

1. Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.

3. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

3. Точка пересечения биссектрис треугольника является *центром окружности, вписанной в этот треугольник.*

• **Высотой** треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.

• **Свойства высот треугольника**

3. В *прямоугольном треугольнике* высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, *подобные* исходному.

4. В *остроугольном треугольнике* две его высоты отсекают от него *подобные* треугольники.

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют **серединным перпендикуляром** к отрезку.

• **Свойства серединных перпендикуляров треугольника**

3. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

4. Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром *окружности, описанной около этого треугольника*.

• **Средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

• **Свойство средней линии треугольника**

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

• **Признаки равенства треугольников**

Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

- две стороны и угол между ними;
- два угла и прилежащая к ним сторона;
- три стороны.

• **Признаки равенства прямоугольных треугольников**

Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:

- гипотенуза и острый угол;
- катет и противолежащий угол;

- катет и прилежащий угол;
- два катета;
- гипотенуза и катет.

• Два треугольника **подобны,** если выполняется одно из следующих условий, называемых **признаками подобия**:

- два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;
- две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны;
- три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

• **Теорема синусов**. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной около треугольника окружности:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

• **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

• **Формулы площади треугольника**

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

18.Четырехугольники

• **Четырехугольник** - геометрическая фигура с четырьмя сторонами. *Четырехугольником* называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки - сторонами четырехугольника.

• Если четырехугольник лежит по одну сторону относительно прямой, содержащей любую из его сторон, то он называется **выпуклым**.

• **Диагональю четырехугольника** называется отрезок, соединяющий две противолежащие вершины.

• **Параллелограммом** называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.

• **Свойства параллелограмма**

1. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма равны.
3. Противолежащие углы параллелограмма равны.
4. Соседние углы параллелограмма дополняют друг друга до 180°.
5. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
6. Если в четырехугольнике противолежащие стороны равны, то четырехугольник - параллелограмм.
7. Если в четырехугольнике противолежащие углы равны, то четырехугольник - параллелограмм.

8. Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.

9. Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и равны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

10. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его четырёх сторон

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2.$$

• **Ромб** - параллелограмм, у которого все стороны равны.

• **Площадь параллелограмма**

$$S_{ABCD} = |AD| \cdot h_{AD} = |AB| \cdot |AD| \sin\alpha = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \sin\beta.$$

• **Площадь ромба**

а) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

$$S = \frac{AC \times BD}{2}$$

б) Поскольку ромб является параллелограммом, его площадь также равна произведению его стороны на высоту.

$$S = AB \times h_{AB}$$

$S = AB^2 \times \sin\alpha$, где α — угол между сторонами ромба.

19. Прямоугольник. Свойства трапеции

• **Прямоугольник** - параллелограмм, у которого все углы прямые.

• **Квадрат** - прямоугольник, у которого все стороны равны.

•**Трапецией** называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми сторонами.

• Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобокой.**

• **Свойства равнобоких трапеций:**

- В равнобокой трапеции углы при основании равны.
- Диагонали равнобокой трапеции равны.

• Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

• Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

• **Площадь трапеции**

а) В случае, если a и b — основания и h высота, то формула площади:

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

б) В случае, если a, b, c и d — стороны трапеции:

$$S = \frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{(a+b-c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c+d)}$$

20. Окружность и круг

• **Геометрическое место точек** – совокупность всех точек, удовлетворяющих заданным условиям.

• **Окружность** – геометрическое место точек, равноудаленных от одной ее точки.

• **Касательная к окружности** – это прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку.

• **Хорда окружности** – отрезок, соединяющий две точки окружности.

• **Диаметр окружности** – хорда, проходящая через центр.

• **Секущая окружности** – прямая, проходящая через две точки окружности.

• **Свойства касательных к окружности:**

2) Касательная к окружности не имеет с ней других общих точек.

2) Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла.

• Метрические соотношения в окружности:

2) Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.

2) Две дуги окружности, заключенные между двумя параллельными ее хордами, равны между собой.

3) Если две хорды пересекаются внутри окружности, то произведение отрезков хорд равны.

4) Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

• Теоремы об окружностях и треугольниках:

1) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

$$R = \frac{1}{2}c$$

2) Радиус описанной окружности равен отношению произведения всех сторон треугольника к учетверенной площади, т.е.

$$R = \frac{abc}{4S}$$

3) Радиус вписанной окружности равен отношению площади треугольника к его полупериметру, т.е.

$$R = \frac{S}{p}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

4) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности суммы катетов и гипотенузы, т.е.

$$r = \frac{a+b+c}{2} = p - c$$

5) Квадрат расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей равен разности квадрата радиуса описанной окружности и удвоенного произведения радиусов, т.е.

$OO_1^2 = R^2 - 2Rr$

6) В равностороннем треугольнике:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2}R = \sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}h$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2r = 2\sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}} = \frac{2}{3}h$$

7) $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{hc}$$

• **Формула длины окружности***:*

$\boxed{l = 2\pi R}$

• **Радианной мерой** угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.

• **Кругом** называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного.

• **Границей круга** является окружность с тем же центром и радиусом.

• **Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус.**

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2$$

• **Сектором круга** называется часть круга, ограниченная двумя его радиусами.

• **Площадь сектора** с угловой величиной дуги α вычисляется по формуле:

$$S_{сект.} = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}R^2\alpha$$

• **Сегментом** называется часть круга, ограниченная хордой и стягиваемой ею дугой.

• **Площадь сегмента**, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$S_{сегм.} = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\Delta}$, где S_{Δ} - площадь треугольника, образованного данной хордой и центральным углом, опирающегося на нее.

$S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$, где α - градусная мера центрального угла, опирающегося на данную хорду.