

Учредитель
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

В Е С Т Н И К
БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА



1 / 2014

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА

Журнал издается
с 2012 года

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-48732 от 28 февраля
2012 г. Федеральная служба по надзору в сфере связи, информа-
ционных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Ответственный за выпуск
Д.О. Трунин, И.-Х.Д. Хишектуева

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.С. Булдаев, д-р физ.-мат. наук, проф.
(гл. редактор, Улан-Удэ)
С.Н. Васильев, акад. РАН, проф. (Москва)
В.И. Гурман, д-р техн. наук, проф. (Москва)
Ж.Г. Дамбаев, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)
А.В. Данеев, д-р техн. наук, проф. (Иркутск)
А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф.
(Новосибирск)
А.В. Лакеев, д-р физ.-мат. наук (Иркутск)
А.Д. Мижидон, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)

Ни Минь Кань, д-р наук, проф. (КНР, Шанхай)
Б. Очирбат, д-р наук, проф. (Монголия,
Улан-Батор)
В.А. Срочко, д-р физ.-мат. наук, проф.
(Иркутск)
Д.Ш. Ширапов, д-р физ.-мат. наук, проф.
(Улан-Удэ)
Р. Эхбат, д-р наук, проф. (Монголия, Улан-
Батор)

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

☎ 21-77-33 vestnik_bsu_math@rambler.ru

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

☎ 21-95-57, riobsu@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

1. Управляемые системы и методы оптимизации	
<i>Баяртугс Т., Энхболор А., Энхбат Р.</i> Квадратичная минимизация и максимизация	4
2. Информационные системы и технологии	
<i>Герман Е.И., Цыдытов Ш.Б.</i> Адаптация алгоритма Верле под многопроцессорные системы	15
3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения	
<i>Русанов В.А., Антонова Л.В., Данеев А.В.</i> Геометрия пучков управляемых динамических процессов, обладающих нелинейной дифференциальной реализацией в равномерно выпуклом банаховом пространстве. II	20
<i>Кибирев В.В.</i> Задача Коши для одного класса эллиптических уравнений	33
<i>Ошоров Б.Б.</i> Матричные математические модели дифференцируемых функций и краевые задачи	38
<i>Шишкин Г.А.</i> Об одной краевой задаче интегродифференциальных уравнений Вольтерра с функциональным запаздыванием	46
4. Алгебра и геометрия	
<i>Заятуев Б.В.</i> Сечения касательных расслоений	50
5. Математическое моделирование и обработка данных	
<i>Бубенчиков А.М., Цыренова В.Б., Цыдытов С.Г.</i> Динамика газожидкостной среды в угольном пласте	53
<i>Дамбаев Ж.Г.</i> Математическое моделирование взаимодействия волн напряжений при взрыве системы зарядов, расположенных в ряд	60
<i>Орлов М.Ю., Орлова Ю.Н., Повереннов Е.Ю.</i> Комплексное теоретико-экспериментальное исследование поведения поликристаллического льда при динамических нагрузках. Расчет процесса внедрения удлиненных ударников в лед	66
<i>Архинчеев В.Е., Юмोजанова Н.В.</i> Дифференциальные уравнения дробного порядка для описания диффузии в нанопористых средах и управление процессами осаждения полимеров электрическим полем	76

CONTENTS

1. Controlled systems and methods of optimization

<i>Bayartugs T., Enkhbolor A., Enkhbat R.</i> Quadratic minimization and maximization	4
---	---

2. Informational systems and technologies

<i>Herman E.I., Tsydyпов Sh.B.</i> Adaptation of algorithm Verlet for multiprocessor systems	15
--	----

3. Functional analysis and differential equations

<i>Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V.</i> Beam geometry of controlled dynamic processes with nonlinear differential implementation in uniformly convex Banach space. II	20
<i>Kibirev V.V.</i> Cauchy problem for one class elliptic equations	33
<i>Oshorov B.B.</i> Matrix mathematical model for differentiable functions and boundary value problems	38
<i>Shishkin G.A.</i> On a boundary value problem for Volterra integer differential equations with functional delay	46

4. Algebra and geometry

<i>Zayatuev B.V.</i> Sections of tangent bundles	50
--	----

5. Mathematical modeling and data processing

<i>Bubenchikov A.M., Tsyrenova V.B., Tsydyпов S.G.</i> Dynamics of gas and liquid media in a coal seam	53
<i>Dambaev Zh.G.</i> Mathematical modeling of voltages waves interaction at explosion of charges system arranged in a row	60
<i>Orlov M.Yu., Orlova Yu.N., Poverennov E.Yu.</i> Complex theoretical-experimental study on behavior of polycrystalline ice under dynamic loads. Calculation of penetration process of elongated strikers in ice	66
<i>Arkhincheev V.E., Yumozhapova N.V.</i> Differential equations of fractional order for description of diffusion in nanoporous media and control the processes of polymers deposition by electric field	76

1. Управляемые системы и методы оптимизации

УДК 519.853.32

© Т. Баяртугс, А. Энхболор, Р. Энхбат

КВАДРАТИЧНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ И МАКСИМИЗАЦИЯ

В статье мы рассматриваем квадратичное программирование, которое состоит из квадратичной максимизации и квадратичной минимизации. Основываясь на условиях оптимальности, мы предлагаем алгоритмы для решения этих задач.

Ключевые слова: квадратичная максимизация, квадратичная минимизация, алгоритм, сходимость.

T. Bayartugs, A. Enkhbolor, R. Enkhbat

QUADRATIC MINIMIZATION AND MAXIMIZATION

In this paper we consider the quadratic programming which consists of convex quadratic maximization and convex quadratic minimization. Based on optimality conditions, we propose algorithms for solving these problems.

Keywords: quadratic maximization, quadratic minimization, algorithm, convergence.

1. Introduction

Consider an extremum problem of a quadratic function over a box $D \in R^n$:

$$f(x) = \langle Cx, x \rangle + \langle d, x \rangle + q \rightarrow \max(\min), \quad x \in D, \quad (1.1)$$

where C is an $n \times n$ matrix, $d, x \in R^n$, and D is a box set of R^n . Here $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product of two vectors.

Quadratic programming plays an important role in mathematical programming. For example quadratic programming serve as auxiliary problems for nonlinear programming in its linearized problems or in optimization problems approximated by quadratic functions. Also this has many applications in science, technology, statistics and economics. Moreover, many combinatorial optimization problems are formulated as quadratic programming including integer programming, quadratic assignment problems, linear complementary problems and network flow problems [7]. There are a number of methods for solving problem (1.1) as convex problem such as the interior point methods, the projected gradient method, the conditional gradient method, the proximal algorithm, penalty methods, finite step algorithm and so on [1, 9, 13]. Then well known optimality condition for problem (1.1) is in Rockafellar [10]. Also, the quadratic maximization problem is known as «NP» problem. There are many methods [3, 11, 12] and algorithms devoted to solution of the quadratic maximization over convex sets.

The paper is organized as follows. In section 2 we consider quadratic convex maximization problem and apply global optimality condition [11] to

this. We propose some finite algorithms by approximation of the level sets of the objective function with a finite number of points and solving linear programming as auxiliary problems. In section 3 we consider the quadratic minimization problem over box constraints and recall the gradient projection method for solving this problem. In the last section we present numerical solutions obtained by the proposed algorithms for quadratic maximization and minimization problems.

2. Quadratic Convex Maximization Problem

2.1. Problem Statement and Global Maximality Condition

Consider the quadratic maximization problem.

$$f(x) = \langle Cx, x \rangle + \langle d, x \rangle + q \rightarrow \max, \quad x \in D, \quad (2.1)$$

where C is a positive semidefinite ($n \times n$) matrix, and $D \in R^n$ is a box set of R^n . A vector $d \in R^n$ and a number $q \in R$ are given. Then optimality conditions [12] can be also applied by proving the following theorem.

Theorem 2.1 [12] Let $z \in D$ be such that $f'(z) \neq 0$. Then z is a solution of problem (2.1) if and only if

$$\langle f'(y), x - y \rangle \leq 0 \text{ for all } y \in E_{f(z)}(f) \text{ and } x \in D, \quad (2.2)$$

where $E_c(f) = \{y \in R^n \mid f(y) = c\}$.

Proof. Necessity. Assume that z is a global maximizer of problem (2.1) and let $y \in E_{f(z)}(f)$ and $x \in D$. It is clear $f'(y) \neq 0$. Then the convexity of f implies that

$$0 \geq f(x) - f(z) = f(x) - f(y) > \langle f'(y), x - y \rangle$$

Sufficiency. Suppose, on the contrary, that z is not a solution to problem (2.1); i.e., there exists an $u \in D$ such that $f(u) > f(z)$. It is clear that the closed set $L_{f(z)}(f) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(z)\}$ is convex. Since $\text{int } L_{f(z)}(f) \neq \emptyset$ then there is the projection y of u on $L_{f(z)}(f)$ such that

$$\|y - u\| = \min_{x \in L_{f(z)}(f)} \|x - u\|$$

Clearly,

$$\|y - u\| > 0 \quad (2.3)$$

holds because $u \notin L_{f(z)}(f)$. Moreover, this y can be considered as a solution of the following convex minimization problem:

$$g(x) = \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \rightarrow \min, \quad x \in L_{f(z)}(f)$$

Applying the Lagrange method to this latter problem, we obtain the following optimality condition at the point y :

$$\begin{cases} \lambda_0 \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda_0 + \lambda \geq 0 \\ \lambda_0 g(y) + \lambda f(y) = 0 \\ \lambda(f(y) - f(z)) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

If $\lambda_0 = 0$, then (2.4) implies that $\lambda > 0, f(y) = f(z)$ and $f'(y) = 0$. Hence we conclude that z must be a global minimizer of f over R^n , which contradicts the assumption in the theorem. If $\lambda = 0$, then we have $\lambda_0 > 0$ and $g'(y) = y - u = 0$, which also contradicts (2.3). So, without loss of generality, we can set $\lambda_0 = 1$ and $\lambda > 0$ in (2.4) to obtain

$$\begin{aligned} y - u + \lambda f(y) &= 0, \lambda > 0, \\ f(y) &= f(z) \end{aligned}$$

From this we conclude that $\langle f'(y), u - y \rangle > 0$, which contradicts (2.2). This last contradiction implies that the assumption that z is not a solution of problem (2.1) must be false. This completes the proof.

Sometimes it is also useful reformulate Theorem 2.1 in the following form. Theorem 2.2 Let $z \in D$ and $rank(C) \neq rank(C|d')$. Then z is a solution of problem (2.1) if and only if

$$\langle f'(y), x - y \rangle \leq 0 \text{ for all } y \in E_{f(z)}(f) \text{ and } x \in D, \quad (2.5)$$

where $(C|d')$ is the extended matrix of the matrix C by the column d' .

2.2. Approximation of the Level Set

Furthermore, to construct a numerical method for solving problem (2.1) based on optimality conditions (2.2) we assume that C is a symmetric positive defined $n \times n$ matrix. Then problem (2.1) can be written as follows.

$$f(x) = \langle Cx, x \rangle + \langle d, x \rangle + q \rightarrow \max, \quad x \in D, \quad (2.6)$$

where $D = \{x \in R^n \mid a \leq x \leq b\}$, and $a, b, d \in R^n, q \in R$.

Now introduce the definitions.

Definition 2.1. The set $E_{f(z)}(f)$ defined by $E_{f(z)}(f) = \{y \in R^n \mid f(y) = f(z)\}$ is called the level set of f at z .

Definition 2.2. The set A_z^m defined by $A_z^m = \{y^1, y^2, \dots, y^m \mid y \in E_{f(z)}(f)\}$ is called the approximation set to the level set $E_{f(z)}(f)$ at the point z .

Note that a checking the optimality conditions (2.2) requires to solve linear programming problems:

$$\langle f'(y), x - y \rangle \rightarrow \max, \quad x \in D$$

for each $y \in E_{f(z)}(f)$. This is a hard problem. So we need to find an appropriate approximation set such that one could check the optimality conditions at a finite number of points.

The following lemma shows that finding a point on the level set of $f(x)$ is computationally possible.

Lemma 2.1. Let a point $z \in D$ and a vector $h \in R^n$ satisfy $\langle f'(z), h \rangle < 0$. Then there exists a positive number α such that $z + \alpha h \in E_{f(z)}(f)$.

Proof. Note that $\langle Ch, h \rangle > 0$, and

$$\langle 2Cz + d, h \rangle < 0 \quad (2.8)$$

Construct a point y_α for $\alpha > 0$ defined by

$$y_\alpha = z + \alpha h.$$

Solve the equation $f(y_\alpha) = f(z)$ with respect to α . In fact, we have

$$\langle Cy_\alpha, y_\alpha \rangle + \langle d, y_\alpha \rangle + q = f(z)$$

or equivalently,

$$\langle C(z + \alpha h), z + \alpha h \rangle + \langle d, z + \alpha h \rangle + q = \langle Cz, z \rangle + \langle d, z \rangle + q$$

which yields

$$\bar{\alpha} = -\frac{\langle 2Cz + d, h \rangle}{\langle Ch, h \rangle}$$

By (2.8), we have $\bar{\alpha} > 0$ and consequently, $y_{\bar{\alpha}} \in E_{f(z)}(f)$.

For each $y^i \in A^m$, $i = 1, 2, \dots, m$ solve the problem

$$\langle f'(y^i), x \rangle \rightarrow \max, x \in D. \quad (2.9)$$

Let u^j , $j = 1, 2, \dots, m$ be solutions of those problems which always exist due to their compact set D :

$$\langle f'(y^i), u^i \rangle = \max_{x \in D} \langle f'(y^i), x \rangle. \quad (2.10)$$

Refer to the problems generated by (2.9) as auxiliary problems of the A_z^m . Define θ_m as follows:

$$\theta_m = \max_{j=1,2,\dots,m} \langle f'(y^j), u^i - y^j \rangle$$

The value of θ_m is said to be the approximate global condition value.

There are some properties of A_z^m and θ_m .

Lemma 2.2. If for $z \in D$ there is a point $y^k \in A_z^m$ such that $\langle f(y^k), u^k - y^k \rangle > 0$ Then

$$f(u_k) > f(z)$$

holds, where $u^k \in D$ satisfies $\langle f'(y^k), u^k \rangle = \max_{x \in D} \langle f'(y^k), x \rangle$

Proof. By the definition of u^k , we have

$$\max \langle f'(y^k), x - y^k \rangle = \langle f'(y^k), u^k - y^k \rangle$$

Since f is convex, we have

$$f(u) - f(v) > \langle f'(v), u - v \rangle$$

for all $u, v \in R^n$ [8, 13]. Therefore, the assumption in the lemma implies that

$$f(u^k) - f(z) = f(u^k) - f(y^k) > \langle f'(y^k), u^k - y^k \rangle > 0.$$

Let $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ be a local maximizer of problem (2.6). Then due to [10], $z_i = a_i \vee b_i, i = 1, 2, \dots, n$. In order to construct an approximation set take the following steps.

Define points v^1, v^2, \dots, v^{n+1} by formulas

$$v_i^k = \begin{cases} z_i & \text{if } i = k \\ a_k & \text{if } z_k = a_k \\ b_k & \text{if } z_k = b_k \end{cases} \quad i, k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.12)$$

and

$$v_i^{n+1} = \begin{cases} b_i & \text{if } z_i = b_i \\ a_i & \text{if } z_i = a_i \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.13)$$

Clearly,

$$\|v^{n+1} - z\| > \|v^k - z\|, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 = \|v^{n+1} - z\|^2.$$

Denote by h^i vectors $h^i = v^i - z, i = 1, 2, \dots, n+1$. Note that $\langle h^k, h^j \rangle = 0, k \neq j, k, j = 1, 2, \dots, n$.

Define the approximation set A_z^{n+1} by

$$A_z^m = \{y^1, y^2, \dots, y^m \mid y^i \in E_{f(z)}(f), y^i = z - \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.14)$$

where $\alpha_i = \frac{\langle 2Cz + d, h^i \rangle}{\langle Ch^i, h^i \rangle}, i = 1, 2, \dots, n+1$.

Then an algorithm for solving (2.6) is described in the following.

Algorithm MAX

Input: A convex quadratic function f and a box set D .

Output: An approximate solution x to problem (2.6); i.e., an approximate global maximize of f over D .

Step 1. Choose a point $x^0 \in D$. Set $k := 0$.

Step 2. Find a local maximize $z^k \in D$ the projected gradient method starting with an initial approximation point x^k .

Step 3. Construct an approximation set $A_{z^k}^{n+1}$ at the point z^k by formulas (2.12), (2.13) and (2.14).

Step 4. For each $y^i \in A_{z^k}^{n+1}, i = 1, 2, \dots, n+1$, solve the problems

$$\langle f'(y^i), x \rangle \rightarrow \max, x \in D$$

which have analytical solutions $u^i, i=1,2,\dots,n+1$ found as

$$u_s^i = \begin{cases} b_s & \text{if } (2Cy^i + d)_s > 0, \\ a_s & \text{if } (2Cy^i + d)_s \leq 0. \end{cases}$$

where $i=1,2,\dots,n+1$ and $s=1,2,\dots,n$.

Step 5. Find a number $j \in \{1,2,\dots,n+1\}$ such that

$$\theta_m = \langle f'(y^i), u^i - y^i \rangle = \max_{j=1,2,\dots,n+1} \langle f'(y^j), u^i - y^j \rangle$$

Step 6. If $f(u^j) > f(z^k)$ then $x^{k+1} := u^j, k := k+1$ and go to step 1.

Step 7. Find a $y \in E_{f(z^k)}(f)$ such that

$$y = z^k - \frac{\langle 2Cz^k + d, u^j - z^k \rangle}{\langle 2C(u^j - z^k), u^j - z^k \rangle} (u^j - z^k)$$

Step 8. Solve the problem

$$\langle f'(y), x \rangle \rightarrow \max, x \in D.$$

Let v be solution, i.e.,

Step 9. If $\langle f'(y), v - y \rangle > 0$ then $x^{k+1} := v, k := k+1$ and go to step 1.

Otherwise, z^k is an approximate maximizer and terminate.

Theorem 2.2. If $\theta_{n+1}^k > 0$ for $k=1,2,\dots$ then Algorithm MAX converges to a global solution in a finite number of steps.

Proof immediate from lemma 2.2 and the fact that convex function reaches its local and global solutions at vertices of the box set D .

3. Quadratic Convex Minimization Problem

3.1. Problem Statement and Global Minimality condition

Consider the quadratic minimization problem over a box constraint.

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle Cx, x \rangle + \langle d, x \rangle + q \rightarrow \min, x \in D, \\ D &= \{x \in R^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i=1,2,\dots,n\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

where C is a symmetric positive semidefinite $n \times n$ matrix and $a, b, d \in R^n, q \in R$.

Theorem 3.1. [1] Let $z \in D$. Then z is a solution of problem (3.1) if and only if

$$\langle f'(z), x - z \rangle > 0 \text{ for al } x \in D \quad (3.2)$$

We propose the gradient projection method for solving problem.

Before describing this algorithm denote by $P_D(y)$ projection of a point $y \in R^n$ on the box set D which is a solution to the following quadratic programming problem

$$\|x - y\|^2 \rightarrow \min, x \in D,$$

We can solve this problem analytically to obtain its solution as follows.

$$(P_D(y))_i = \begin{cases} a_i & \text{if } y_i \leq a_i \\ y_i & \text{if } a_i < y_i < b_i \\ b_i & \text{if } y_i \geq b_i \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.3)$$

It is well known that for the projection P_D the following conditions hold [1].

$$\langle P_D(y) - y, x - P_D(y) \rangle > 0 \quad \forall x \in D \quad (3.4)$$

We show that how to apply the gradient projection method for solving problem (3.1). It can be easily checked that the function $f(x)$ defined by (3.1) is strictly convex quadratic function. Its gradient is computed as:

$$f'(x) = 2Cx + d$$

Lemma 3.1. The gradient $f'(x)$ satisfies the Lipschitz condition with a constant $L = 2\|C\|$.

Proof. Compute $\|f(u) - f(v)\|$ for arbitrary points $u, v \in D$. Then we have $\|f'(u) - f'(v)\| = 2\|C(u - v)\| \leq 2\|C\|\|u - v\|$ which completes the proof.

The gradient projection algorithm generates a sequence x^k in the following way.

$$x^{k+1} = P_D(x^k - \alpha_k f'(x^k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, x^0 \in D$$

where $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

Theorem 3.2. Assume that a sequence $\{x^k\} \subset D$ is constructed by the gradient projection algorithm, in which $\alpha_k = \bar{\alpha}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \bar{\alpha} < \frac{1}{L}$. Then a sequence $\{x_k\}$ is a minimizing sequence, i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^k) = \min_{x \in D} f(x)$.

Proof. By the algorithm, we have

$$x_\alpha^k = P_D(x^k - \alpha f'(x^k)), \quad \alpha > 0,$$

$$x^{k+1} = x_{\bar{\alpha}}^k, \quad 0 < \bar{\alpha} < \frac{1}{L}$$

By (3.5), we can write $\langle x_\alpha^k - x^k + \alpha f'(x^k), x - x_\alpha^k \rangle \geq 0, \forall x \in D, \alpha > 0$.

If we set $x = x^k$ in the above, then it becomes

$$\begin{aligned} \langle x_\alpha^k - x^k + \alpha f'(x^k), x - x_\alpha^k \rangle &\geq 0, \quad \alpha > 0, \\ \langle x_\alpha^k - x^k, x - x_\alpha^k \rangle + \alpha \langle f'(x^k), x^k - x_\alpha^k \rangle &\geq 0, \quad \alpha > 0, \\ \alpha \langle f'(x^k), x^k - x_\alpha^k \rangle &\geq -\|x_\alpha^k - x^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

By virtue of Lipschitz condition and the property of the remainder boundedness,

$$f(x_\alpha^k) - f(x^k) \leq \langle f'(x^k), x_\alpha^k - x^k \rangle + L \|x_\alpha^k - x^k\|^2$$

Taking into account the inequality (3.6), we have

$$f(x_\alpha^k) - f(x^k) \leq -\frac{\|x_\alpha^k - x^k\|^2}{\alpha} + L \|x_\alpha^k - x^k\|^2 = \left(-\frac{1}{\alpha} + L\right) (\|x_\alpha^k - x^k\|^2) \quad (3.7)$$

Set in (3.7) $\alpha_k = \alpha^-$, $0 < \bar{\alpha} < \frac{1}{L}$, $\alpha = \alpha_k$.

In this case

$$C = -\frac{1}{\alpha} + L < 0, \quad f(x_\alpha^k) - f(x^k) \leq C \|x_\alpha^k - x^k\|^2 < 0$$

It is clear that the sequence $\{f(x^k)\}$ is decreasing. On the other hand, as a strict convex quadratic function, $f(x^k)$ is bounded from below, then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x^{k+1}) - f(x^k))$$

Consequently,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x^{k+1}) - f(x^k)\| = 0 \quad (3.8)$$

for a given x^0 , the set $M(x^0)$ defined by $M(x^0) = \{x \in D \mid f(x) \leq f(x^0)\}$ is bounded. Since

$$f(x^0) > f(x^1) > \dots > f(x^k) > f(x^{k+1}) > \dots,$$

Then

$$\{x^k\} \subset M(x^0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

By the Weierstrass theorem the set $S^* = \{x \in D \mid f(x) = f(x^*)\}$ is non empty, where $f(x) = \min_{x \in D} f(x)$. Since $f(x)$ is convex, for any $x^* \in S$, $x^k \in D$ we have

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x^k) - f(x^*) &\leq \langle f'(x^k), x^k - x^* \rangle = \langle f'(x^k), x^k - x_\alpha^k + x_\alpha^k - x^* \rangle = \\ &\langle f'(x^k), x^k - x_\alpha^k \rangle + \langle f'(x^k), x_\alpha^k - x^* \rangle, \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

From here, we obtain

$$\alpha \langle f'(x^k), x_\alpha^k - x^* \rangle \leq \langle x_\alpha^k - x^k, x^* - x_\alpha^k \rangle, \quad \alpha > 0$$

Setting $\alpha = \bar{\alpha}$, $0 < \bar{\alpha} < \frac{1}{L}$ in (3.9), we obtain

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x^k) - f(x^*) &\leq \left\langle \frac{1}{\bar{\alpha}} (x^* - x^{k+1}) - f'(x^k), x^{k+1} - x^k \right\rangle \leq \\ &\left(\frac{1}{\bar{\alpha}} \|x^* - x^{k+1}\| + \|f'(x^k)\| \right) \|x^{k+1} - x^k\| \end{aligned}$$

Since $M(x^0)$ is bounded, then

$$\|x^* - x^{k+1}\| \leq \sup_{x, y \in M(x^0)} \|x - y\| = K < +\infty$$

Moreover,

$$\|f'(x^k)\| = \|f'(x^k) - f'(x^0) + f'(x^0)\| \leq \|f'(x^k) - f'(x^0)\| + \|f'(x^0)\| \leq$$

$$L\|x - x^0\| + \|f'(x^0)\| \leq L \cdot K + N,$$

where $N = \|f'(x^0)\|$, $x \in M(x^0)$. Then

$$0 \leq f(x^k) - f(x^*) \leq \left(\frac{K}{\alpha} + L \cdot K + N \right) \|x^{k+1} - x^k\|.$$

Taking into account (3.8) that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$$

we have

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^*)$$

which proves the assertion.

Numerical Experiments

The proposed algorithms for quadratic maximization and minimization problems have been tested on the following type problems. The algorithms are coded in Matlab. Dimensions of the problems were ranged from 200 up to 5000. Computational time, and global solutions are given in the following tables.

Problem 1.

$$\max_{x \in D} (\langle Ax, x \rangle + \langle B, x \rangle)$$

subject to

$$D = \{-(n-i+1) \leq x_i \leq n+0.5i, i=1,2,\dots,n\}$$

where

$$A = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ n-1 & n & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad B = (1,1,\dots,1)$$

Problem 2.

$$\max_{x \in D} \sum_{i=1}^n (n-1-0.1 \cdot i)x_i^2$$

subject to

$$D = \{x \in R^n \mid -1-i \leq x_i \leq 1+5i, i=1,2,\dots,n\}$$

Problem 3.

$$\min_{x \in D} \left(\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle B, x \rangle \right)$$

subject to

$$D = \{10 \leq x_i \leq 30, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

where

$$A = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ n-1 & n & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad B = (1, 1, \dots, 1)$$

Problem 4.

$$\max_{x \in D} \sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2$$

subject to

$$D = \{x \in R^n \mid i+1 \leq x_i \leq i+10, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

Table

problem	n	Initial value	Global value	Computing time (sec)
1	200	2.66690000000000e+006	335.337841669956e+009	4.166710
1	500	41.6672500000000e+006	32.7084036979206e+012	29.082187
1	1000	333.334500000000e+006	1.04625056270796e+015	202.615012
1	2000	2.66666900000000e+009	33.4733378341612e+015	1579.706486
1	5000	41.6666725000000e+009	3.26848965365074e+018	22248.485127
2	200	37.7900000000000e+003	12.3936575899980e+009	4.766626
2	500	236.975000000000e+003	482.716617724994e+009	30.115697
2	1000	948.950000000000e+003	7.71590814447147e+012	196.977634
2	2000	3.79790000000000e+006	123.393965944640e+012	1786.474928
2	5000	23.7447500000000e+006	3.5660855482763485e+18	27342.423215
3	200	600.004500000000e+006	266.668000000000e+006	9.625021
3	500	9.37501125000000e+009	4.16667000000000e+009	69.149144
3	1000	75.0000225000000e+009	33.3333400000000e+009	408.735783
3	2000	600.000045000000e+009	266.666680000000e+009	3035.512940
3	5000	937.500011250000e+012	416.666680000000e+12	21432.421674
4	200	500	200.00	9.227003
4	500	12500	500.00	56.679240
4	1000	25000	1000.00	365.62471
4	2000	50000	2000.00	2904.275652
4	5000	125000	5000.00	22134.532145

Conclusion

To provide a unified view, we considered the quadratic programming problem consisting of convex quadratic maximization and convex quadratic minimization. Based on global optimality conditions by Strekalovsky [11, 12] and classical local optimality conditions [1, 7], we proposed some algorithms for solving the above problem. Under appropriate conditions we have shown that the proposed algorithms converges to a global solution in a finite number of steps. The Algorithm MAX generates a sequence of local maximizers and uses linear programming at each iteration which makes algorithm easy to implement numerically.

References

1. Bertsekas D.P. Nonlinear Programming, 2nd edition Athena Scientific. – Belmont, MA, 1999.
2. Bomze I., Danninger G. A Finite Algorithm for Solving General Quadratic Problem, Journal of Global Optimization, 4. – 1994. – P. 1-16.
3. Enkhbat R.. An Algorithm for Maximizing a Convex Function over a Simple. Set // Journal of Global Optimization, 8. 1996. – P. 379-391.
4. Horst R. On the Global Minimization of a Concave Function: Introduction and Survey // Operations Research Spectrum, 6. – 1984. – P. 195-200.
5. Horst R. A General Class of Branch and Bound Methods in Global Optimization with some New Approaches for Concave Minimization // Journal of Optimization Theory and Applications, 51. – 1986. – P. 271-291.
6. Horst R., Tuy H. Global Optimization, Springer-Verlag. – New-York, London, Tokyo, 1990.
7. Horst R., Pardalos P.M., Nguyen V. Thoai. Introduction to Global Optimization, Kluwer Academic, Dordrecht. – Boston, 2000.
8. Karmanov V.G., Mathematical Programming // Mir Publisher. – Moscow, 1989.
9. Pshenichnyi B.N., Danilin Yu.M. Numerical Methods in Extremal Problems. – Moscow: Nauka, 1975.
10. Rockafellar R.T. Convex Analysis // Princeton University Press, Princeton, 1970.
11. Strekalovsky A.S. On the Global Extremum Problem // Soviet Math.Doklady, 292(5). 1987. – P. 1062-1066.
12. Strekalovsky A.S. Global Optimality Conditions for Nonconvex Optimization // Journal of Global Optimization, 12. – 1998. – P. 415-434,
13. Vasiliev O.V. Optimization Methods. – Atlanta: World Federation Publishers, 1996.

T. Bayartugs, Mongolian University of Science and Technology, Ulaanbaatar, Mongolia, e-mail: bayart1969@yahoo.com

R. Enkhbat, professor, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia, 210646, e-mail: renhkb46@yahoo.com

A. Enkhbolor, Inje University, Korea.

T. Баяртугс, преподаватель, Монгольский университет науки и технологий, г. Улан-Батор, Монголия, e-mail: bayart1969@yahoo.com

Р. Энхбат, профессор, Монгольский национальный университет, Улаанбаатар, Монголия, 210646, e-mail: renhkb46@yahoo.com

А. Энхболор, Инчже университет, Корея.

2. Информационные системы и технологии

УДК 519.688

© *Е.И. Герман, Ш.Б. Цыдыпов*

АДАПТАЦИЯ АЛГОРИТМА ВЕРЛЕ ПОД МНОГОПРОЦЕССОРНЫЕ СИСТЕМЫ

Изложена методика реализации параллельных асинхронных вычислений для моделирования молекулярных систем методом молекулярной динамики.

Ключевые слова: параллельные вычисления, метод молекулярной динамики, алгоритм Верле.

E.I. Herman, Sh.B. Tsydyпов

ADAPTATION OF ALGORITHM VERLET FOR MULTIPROCESSOR SYSTEMS

The methodology of implementation of parallel asynchronous computations is expounded for modeling molecular systems using molecular dynamics simulations.

Keywords: parallel computing, molecular dynamics method, the Verlet algorithm.

Компьютерное моделирование в современной физике решает ряд задач, которые непосильно разрешить постановкой натурального эксперимента. Современная физика описывает практически все закономерности макромира в нормальных условиях, а вести исследования в областях низких или высоких температур, давлений проблематично, т.к. нет аппаратуры, которая могла бы работать в таких условиях. Поэтому для решения ряда задач научное сообщество прибегает к численному эксперименту, который позволяет смоделировать с достаточной достоверностью физические процессы, протекающие в реальных системах и выявить необходимые закономерности [1].

Современные компьютеры обладают высокими вычислительными способностями, но для наиболее приближенного описания физических систем необходимо моделировать порядка 10^{23} частиц, что на данный момент времени выполнить невозможно. Использование алгоритмов параллельных вычислений позволяет существенно сократить время моделирования. Рассмотрим одну из возможностей адаптации алгоритма Верле моделирования методом молекулярной динамики (МД) под многопроцессорные вычислительные системы.

Метод молекулярной динамики, попросту говоря, является численной реализацией решения уравнений движения Ньютона для множества частиц. Полную силу, действующую на i -й атом, можно представить в форме суммы векторов [2]:

$$F_i = -\sum_j^{N-1} \nabla \Phi(ij). \quad (1)$$

При этом предполагается, что известны координаты центров всех атомов и вид потенциала взаимодействия $\Phi(r)$. Энергия частиц инертного газа, например, может определяться потенциалом Леннарда-Джонса:

$$\Phi(r) = 4\varepsilon \left(\left[\frac{\sigma}{r} \right]^{12} - \left[\frac{\sigma}{r} \right]^6 \right). \quad (2)$$

Если в некоторый момент времени t известны координаты и импульсы всех атомов, то с помощью уравнений Ньютона можно определить траекторию i -го атома на заданном промежутке времени. В случае отсутствия внешних полей его координата и скорость будут иметь вид

$$q_i(t + \Delta t) = v_i(t)\Delta t - \frac{1}{2m_i} \sum_j^{N-1} \nabla \Phi(ij)(\Delta t)^2 + q_i(t), \quad (3)$$

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) - \frac{1}{m_i} \sum_j^{N-1} \nabla \Phi(ij)\Delta t. \quad (4)$$

Возьмем для примера систему из N частиц инертного газа.

Алгоритм Верле позволяет повысить точность итерации моделирования за счет частичного изменения скоростей частиц [3]. В общем случае одна итерация данного алгоритма на языке C++ представляет вид:

```
void Verlet(void){
    for (int i=0; i!=N; i++){
        /*Расчет координаты i-й частицы*/
        particles[i].x = particles[i].x + particles[i].vx*dt +
            particles[i].ax*dt2_2;
        particles[i].y = particles[i].y + particles[i].vy*dt +
            particles[i].ay* dt2_2;
        particles[i].z = particles[i].z + particles[i].vz*dt +
            particles[i].az* dt2_2;
        /*Корректировка координат частицы согласно условий
        периодических граничных условий*/
        periodic(particles[i].x, particles[i].y, particles[i].z);
        /*Частичное изменение скорости */
        particles[i].vx+=particles[i].ax*dt*0.5;
        particles[i].vy+=particles[i].ay*dt*0.5;
        particles[i].vz+=particles[i].az*dt*0.5;
    }
    GetAccel();//расчет ускорений
    for (int i=0; i!=N; i++){
        /*Изменение скорости с учетом вычисленного ускорения*/
        particles[i].vx+=particles[i].ax*dt*0.5;
        particles[i].vy+=particles[i].ay*dt*0.5;
        particles[i].vz+=particles[i].az*dt*0.5;
    }
}
```

В представленном листинге производится вызов подпрограммы GetAccel(), задачей которой является определение ускорений частиц ис-

ходя из (4). Видно, что для определения сил, действующих на одну частицу, необходимо определять расстояния до всех остальных $N-1$ частиц. Эта процедура дает наибольшую вычислительную нагрузку. В классическом представлении на языке C++ код подпрограммы выглядит следующим образом:

```
void GetAccel(void){
    for (int i=0; i!=N; i++){
        particles[i].ax=0;
        particles[i].ay=0;
        particles[i].az=0;
    }
    for (int i=0; i!=N-1; i++){
        for (int j=i+1; j!=N; j++){
            dx=particles[j].x-particles[i].x;
            dy=particles[j].y-particles[i].y;
            dz=particles[j].z-particles[i].z;
            Separate(dx,dy,dz);
            r=sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);
            r=1/r; r2=r*r; r3=r2*r; r6=r3*r3;
            a=24*r2*r6*(2*r6-1);
            particles[i].ax+=a*dx;
            particles[i].ay+=a*dy;
            particles[i].az+=a*dz;
            particles[j].ax-=a*dx;
            particles[j].ay-=a*dy;
            particles[j].az-=a*dz;
        }
    }
}
```

В среде программирования MS Visual Studio имеется компонент Net. FrameworkBackgroundWorker, с помощью которого возможна организация вычислительных операций в асинхронном фоновом режиме.

Массив координат частиц системы при расчете ускорений представляет собой массив связанных переменных, здесь ускорение i -й частицы напрямую связано с положением любой другой j -й частицы, поэтому прямое разделение подпрограммы Get Accel () на два и более асинхронных процесса фактически невозможно. Вместе с тем возможно использование одного управляющего компонента BackgroundWorker0 и двух счетных компонентов BackgroundWorker1 и BackgroundWorker2. Тогда схема разделения вычислительных операций одной итерации МД будет представлять следующую последовательность:

1. BackgroundWorker0 обнуляет ускорения на начале данной итерации, запускает BackgroundWorker1 и BackgroundWorker2 и ожидает событий завершения работы этих компонентов.

2. С использованием компонента BackgroundWorker1 производится расчет ускорений по первым $N/2$ частицам системы, с использованием BackgroundWorker2 – по последним $N/2$ частицам.

3. По завершении выполнения работы асинхронных потоков при помощи BackgroundWorker0 производится расчет ускорений, вызванных силами взаимодействия первых $N/2$ частиц и последних $N/2$ частиц.

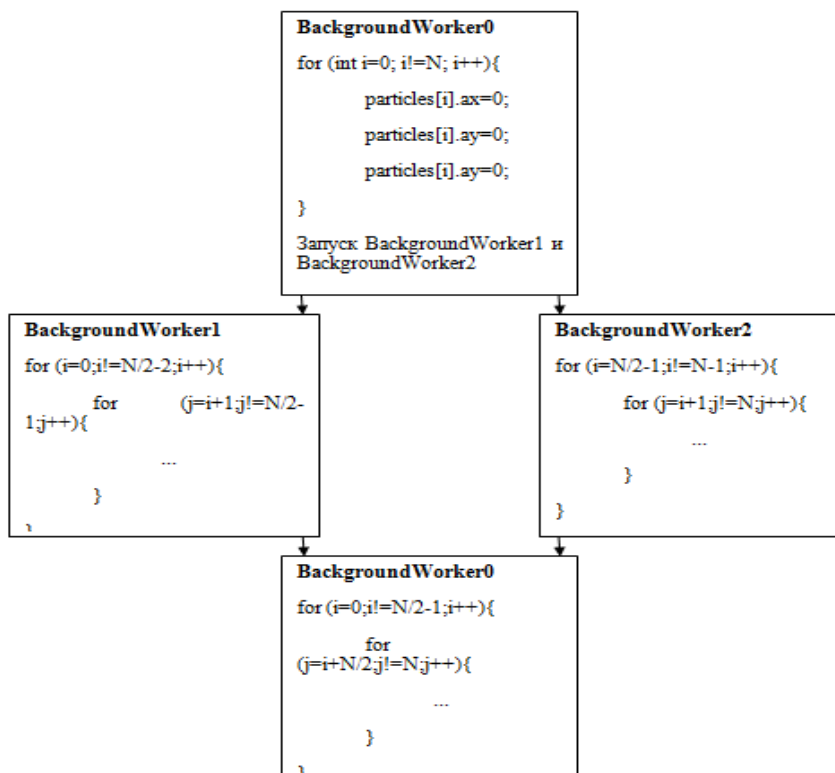


Рис 1. Схема разделения подпрограммы GetAccel() на вычислительные потоки

Представленная схема использована для двухпроцессорной вычислительной системы. Теоретически прямой расчет ускорений для системы из тысячи частиц влечет за собой 499500 итераций цикла, при использовании предложенной схемы разделения вычислений на один процессор приходится 249500 итераций, что приводит к сокращению времени расчетов примерно в два раза. На практике увеличение скорости вычислений составляет порядка 60%. Это связано со спецификой работы операционной системы и неравнозначностью вычислительных ядер процессора.

Предложенная схема применима и для вычислительных комплексов с большим количеством процессоров. Для этого необходимо разделение вычислений на большее количество счетных потоков.

Литература

1. Герман Е.И., Цыдыпов Ш.Б. Радиальные функции распределения неравновесных систем // Вестник Бурятского государственного университета. – 2013. – Вып. 3. – С. 104-107.

2. Хеерман Д.В. Методы компьютерного эксперимента в физике. – М.: Наука, 1990.

3. Гулд. Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. – М.: Мир, 1990.

Цыдыпов Шулун Балдоржиевич, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой общей физики физико-технического факультета Бурятского государственного университета. Тел. 89025634889, e-mail: shulun@bsu.ru

Герман Евгений Иванович, преподаватель кафедры общей физики физико-технического факультета Бурятского государственного университета. Тел. 89244560177, e-mail: net-admin@list.ru

Tsydyrov Shulun Baldorzhievich, doctor of technical sciences, associate professor, head of the department of general physics, Buryat State University. Tel: 89025634889, e-mail: shulun@bsu.ru

Herman Evgeny Ivanovich, lecturer, department of general physics, Buryat State University. Tel: 89244560177, e-mail: net-admin@list.ru

3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.938.5

© В.А. Русанов, Л.В. Антонова, А.В. Данеев

ГЕОМЕТРИЯ ПУЧКОВ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОБЛАДАЮЩИХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ В РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛОМ БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

... всякое обобщение до известной степени предполагает веру в единство и простоту природы.

А. Пуанкаре [34]

Проведено изучение необходимых и достаточных условий существования нелинейных дифференциальных реализаций пучков бихевиористических систем (динамических систем Я. Виллемса) в классе квазилинейных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений в равномерно выпуклом банаховом пространстве.

Ключевые слова: обратные задачи системного анализа, нелинейная дифференциальная реализация.

V.A. Rusanov, L.V. Antonova, A.V. Daneev

BEAM GEOMETRY OF CONTROLLED DYNAMIC PROCESSES WITH NONLINEAR DIFFERENTIAL IMPLEMENTATION IN UNIFORMLY CONVEX BANACH SPACE. II

The study of necessary and sufficient conditions has been conducted on the existence of nonlinear differential implementations of behavioristic systems beams (dynamical systems of J. Willems) in the class of quasilinear nonstationary ordinary differential equations in a uniformly convex Banach space.

Keywords: inverse problems of system analysis, nonlinear differential implementation.

В этой работе (являющейся продолжением [1]) обратимся к вопросу разрешимости задачи нелинейной дифференциальной реализации на континуальном пучке динамических процессов; терминология и обозначения из [1] сохранены, нумерация параграфов, формул и утверждений продолжены.

3. Дифференциальная реализация континуального пучка динамических процессов

Как подчеркивалось в [1], основной задачей качественной теории дифференциальной реализации систем (1) [1] с нелинейным законом $x \rightarrow u^\#(x)$ является анализ геометрической структуры пучков динамических

процессов на многообразии $\Pi_u^\#$. Таким образом, стратегия, которую следует выбрать исходя из программы исследований [1], состоит в том, чтобы сосредоточиться на изучении фиксированного семейства $N \subset \Pi_u^\#$ (фиксированное экзогенное поведение «вход–выход» исследуемой D -системы с позиционным управлением $x \rightarrow u^\#(x)$). Желательно, чтобы при этом означенное семейство было настолько «обширным» по $\text{Card}N$, насколько это возможно; в локальном смысле ($\text{Card}N=1$) эта проблема решена в теореме 1 [1].

Обозначим через $L(T, \mu, R)$ пространство классов μ -эквивалентности всех вещественных μ -измеримых на T функций и пусть \leq_L -квазиупорядочение в $L(T, \mu, R)$ такое, что $\phi_1 \leq_L \phi_2$, когда $\phi_1, \phi_2 \in L(T, \mu, R)$ и при этом $\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$ μ -почти всюду в T . Наименьшую верхнюю грань для подмножества $W \subset L(T, \mu, R)$ обозначим $\sup_L W$, если она существует для W в структуре частичного упорядочения \leq_L .

Для равномерно выпуклого пространства X введем (конечномерный прототип данной конструкции был введен в статье [2]) *энтропийный оператор Релея–Ритца*

$$\Psi : AC(T, X) \times Lq(T, \mu, Y) \times Lq(T, \mu, Z) \rightarrow L(T, \mu, R)$$

построенный согласно правилу:

$$\psi(g, w, q)(t) := \begin{cases} \left(\|dg(t)/dt\|_X \left(\|g(t)\|_X^q + \|w(t)\|_Y^q + \|q(t)\|_Z^q \right)^{-1/q}, \right. \\ \text{если } (g(t), w(t), q(t)) \neq 0 \in U; \\ \left. 0 \in R, \text{ если } (g(t), w(t), q(t)) = 0 \in U. \right. \end{cases}$$

Пусть $N \subset \Pi_u^\#$, $\text{Card}N > 1$ и Q – некоторое (следовательно, любое) поглощающее множество в $\text{Span}N$; в геометрии поглощающего множества следуем [3, с. 302], т.е. $\cup \{\alpha Q\}_{\alpha > 0} = \text{Span}N$. В такой постановке принцип максимума энтропии, выраженный теоремой 2 [2] в аналитическом решении задачи дифференциальной реализации поведения D -системы в классе конечномерных систем (1) [1], трансформируется в его аналог для реализации поведения $N \subset \Pi_u^\#$ бесконечномерной D -системы.

Теорема 2. *Если X, Y, Z – равномерно выпуклы, то семейство процессов $N \subset \Pi_u^\# - K$ – решения уравнения (1) [1] тогда и только тогда, когда $\sup_L \Psi(Q) \in L_p(T, \mu, R)$, или (что равносильно) существует такая μ -непрерывная положительная мера ν_+ , что для произвольного подинтервала $T^* := [t^*, t^*] \subset T$ и любой тройки $(g, w, q) \in Q$ справедливо неравенство $\nu_-(T^*) \leq (\nu_+(T^*))^{1/p} (\nu(T^*))^{1/q}$, где ν и ν_- суть меры вида*

$$\nu(S) := \int_S (\|g(\tau)\|_X^q + \|w(\tau)\|_Y^q + \|q(\tau)\|_Z^q) \mu(d\tau), S \in \mathcal{F}_\mu,$$

$$\nu_-(S) := \int_S \|dg(\tau)/d\tau\|_X \mu(d\tau), S \in \mathcal{F}_\mu.$$

Замечание 7.

Реализация фиксированной системой (1) [1] семейств динамических процессов из $\Pi_u^\#$ – свойство конечного характера [4, с. 28], что позволяет

(при желании) с учетом теоремы 2 и леммы Тейхмюллера–Тьюки [4, с. 28] построить (определение 1 [2]) весьма элегантную структурную по Бурбаки [5, с. 395] аксиоматику D -систем с реализацией в классе моделей (1) [1]; аналитическая основа – построение для заданного закона $u^\#(\cdot): AC(T, X) \rightarrow L_q(T, \mu, Z)$ шкалы множеств, содержащей $\Pi_u^\#$, и фиксация в ней максимального в $\Pi_u^\#$ множества N с характерным (структурным) теоретико-множественным свойством вида

$$\exists \sup_L \Psi(Q) \in L_p(T, \mu, R).$$

Доказательство теоремы 2.

Структуру доказательства можно построить на базе вывода теоремы 1 [1], но ниже за ее основу возьмем следующий цикл импликаций:

$$\begin{aligned} & \exists \sup_L \Psi(Q) \in L_p(T, \mu, R) \Rightarrow \\ \Rightarrow & \exists v_+ : v_-(T^*) \leq (v_+(T^*))^{1/p} (v(T^*))^{1/q}, \forall T^* = [t_*, t^*] \subset T, \forall (g, w, q) \in Q \Rightarrow \\ & \Rightarrow N\text{-}K \text{ – решения } (K\text{-пучок}) \text{ некоторого уравнения (1) [1]} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \exists \sup_L \Psi(Q) \in L_p(T, \mu, R). \end{aligned}$$

Пусть существует $\sup_L \Psi(Q) \in L_p(T, \mu, R)$, тогда справедливо положение:

$\exists f \in L_p(T, \mu, R): \|dg(\cdot)/dt\|_{X \leq 1} f(\cdot) (\|g(\cdot)\|_{X^q} + \|w(\cdot)\|_{Y^q} + \|q(\cdot)\|_{Z^q})^{1/q}, \forall (g, w, q) \in Q$, следовательно, в силу неравенства Коши – Буняковского, мера $v_+(S) := \int_S |f(\tau)|^p \mu(d\tau)$, $S \in \wp_\mu$ позволяет обнаружить (подтвердить) первое « \Rightarrow » – следствие:

$$\begin{aligned} v_-(T^*) & \leq (v_+(T^*))^{1/q} (v(T^*))^{1/q}, \\ \forall T^* & = [t_*, t^*] \subset T, \\ \forall (g, w, q) & \in Q. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что данное неравенство означает. Семейство динамических процессов N представляет K -решения некоторого дифференциального уравнения (1) [1]. Пусть $\Omega := \{\omega \in H: \exists T_r \subset T, \exists (g, w, q) \in Q, \omega = \chi_{T_r} \cdot (g, w, q)\}$, χ_{T_r} – характеристическая функция интервала $T_r = [t_0, t_r] \subset T, t_0 \leq t_r$. Рассмотрим оператор $\zeta: \Omega \rightarrow X$

$$\zeta(\chi_{T_r} \cdot (g, w, q)) := \int_T T(\chi_{T_r}(\tau)) dg(\tau) / d\tau \mu(d\tau).$$

Покажем, что оператор ζ допускает линейное непрерывное распространение, обозначаемое далее через ζ^* , на линейную оболочку $\text{Span} \Omega$. Для этого в силу теоремы 1 [6, с. 243] достаточно указать такую постоянную $c^* > 0$, что каковы бы ни были конечные совокупности векторов $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, k} \subset \Omega$ и чисел $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, k} \subset R$ для них всегда выполняется характеристическое неравенство $\|\sum \alpha_i \zeta(\omega_i)\|_{X \leq 1} \leq c^* \|\sum \alpha_i \omega_i\|_H$.

С этой целью рассмотрим произвольный (но фиксированный) набор векторов $\{(\chi_{T_i} \cdot (g, w, q))_i\}_{i=1, \dots, k}$ из Ω ; при этом, не теряя общности, можно предположить, что все функции χ_{T_i} различны, а сам набор упорядочен таким образом, что $t_i < t_j \Leftrightarrow i < j$. С семейством $\{(\chi_{T_i} \cdot (g, w, q))_i\}_{i=1, \dots, k}$ и произвольной совокупностью чисел $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, k}$ сопоставим подмножество $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, k} \subset \Omega$, такое, что каждый его элемент ω_i образован согласно сле-

дующему алгоритмическому правилу: $\omega_i = \sum \alpha_n(g, w, q)_n$, $n=i, \dots, k$. Ясно, что имеет место равенство $\sum \alpha_i \chi_{T_i}(g, w, q)_i = \sum (\chi_{T_i} - \chi_{T_{i-1}}) \omega_i$, $i=1, \dots, k$.

Условимся через g_i , w_i и q_i обозначать компоненты тройки $(g, w, q)_i \in Q$, а через $g_{i\omega}$, $w_{i\omega}$ и $q_{i\omega}$ – соответственно компоненты тройки $(g_{i\omega}, w_{i\omega}, q_{i\omega}) = \omega_i \in \Omega$ и пусть $T_i^* := [t_i, t_{i-1}]$. В такой постановке будет справедлива следующая цепочка транзитивных отношений (ниже все суммы \sum берутся при индексах $i=1, \dots, k$):

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum \alpha_i \zeta^* \left(\chi_{T_i^*}(g, w, q)_i \right) \right\|_X = \left\| \sum \int_T (\alpha_i \chi_{T_i}(\tau) dg_i(\tau) / d\tau) \mu(d\tau) \right\|_X = \\
 & = \left\| \sum \int_T (\|g_{i\omega}(\tau)\|_{X^q} + \|w_{i\omega}(\tau)\|_{Y^q} + \|q_{i\omega}(\tau)\|_{Z^q}) \mu(d\tau) (\tau) dg_i(\tau) / d\tau \mu(d\tau) \right\|_X \leq \\
 & \leq \sum \left\| \int_T ((\chi_{T_i} - \chi_{T_{i-1}})(\tau) dg_{i\omega}(\tau) / d\tau) \mu(d\tau) \right\|_X \leq \\
 & \leq \sum \int_{T_i^*} \|dg_{i\omega}(\tau) / d\tau\|_X \mu(d\tau) \leq \\
 & \leq \sum (\nu_+(T_i^*))^{1/p} \left(\int_{T_i^*} (\|g_{i\omega}(\tau)\|_{X^q} + \|w_{i\omega}(\tau)\|_{Y^q} + \|q_{i\omega}(\tau)\|_{Z^q}) \mu(d\tau) \right)^{1/q} \leq \\
 & \leq (\sum \nu_+(T_i^*))^{1/p} \left(\sum \int_{T_i^*} (\|g_{i\omega}(\tau)\|_{X^q} + \|w_{i\omega}(\tau)\|_{Y^q} + \|q_{i\omega}(\tau)\|_{Z^q}) \mu(d\tau) \right)^{1/q} \leq \\
 & \leq c^* \left(\sum \int_{T_i^*} (\|g_{i\omega}(\tau)\|_{X^q} + \|w_{i\omega}(\tau)\|_{Y^q} + \|q_{i\omega}(\tau)\|_{Z^q}) \mu(d\tau) \right)^{1/q} = \\
 & = c^* \left(\int_T \left(\sum \left(\|(\chi_{T_i} - \chi_{T_{i-1}})(\tau) g_{i\omega}(\tau)\|_{X^q} + \|(\chi_{T_i} - \chi_{T_{i-1}})(\tau) w_{i\omega}(\tau)\|_{Y^q} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \|(\chi_{T_i} - \chi_{T_{i-1}})(\tau) q_{i\omega}(\tau)\|_{Z^q} \right) \mu(d\tau) \right) \right)^{1/q} = \\
 & = c^* \left(\int_T \left(\sum \left(\left\| \alpha_i \chi_{T_i}(\tau) g_i(\tau) \right\|_{X^q} + \left\| \alpha_i \chi_{T_i}(\tau) w_i(\tau) \right\|_{Y^q} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left\| \alpha_i \chi_{T_i}(\tau) q_i(\tau) \right\|_{Z^q} \right) \mu(d\tau) \right) \right)^{1/q} = \\
 & = c^* \left\| \sum \alpha_i \chi_{T_i^*}(g, w, q) \right\|_H,
 \end{aligned}$$

где $c^* = (\nu_+(T))^{1/p}$. Таким образом, первый и последний члены этой цепочки показывают [6, с. 243], что линейное непрерывное распространение ζ^* существует.

Далее, пусть $\text{id}_{\text{Span}\Omega}$ – единичный оператор на многообразии $\text{Span}\Omega$. Аналогично введем следующие операторы: id_{Kerid} на $\text{Kerid}_{\text{Span}\Omega}$ и $\text{id}_{\text{Ker}\zeta^*}$ на $\text{Ker}\zeta^*$.

Используя введенные выше конструкции, наглядно все необходимые дальнейшие рассуждения содержатся в следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker id}_{\text{Span}\Omega} & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Kerid}}} & \text{Span}\Omega & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Span}\Omega}} & \text{Span}\Omega \\ \cap & & \parallel & & \downarrow \xi_- \\ \text{Ker}\zeta^* & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Ker}\zeta^*}} & \text{Span}\Omega & \xrightarrow{\zeta^*} & X \end{array}$$

Для каждого элемента ω из области значений оператора $\text{id}_{\text{Span}\Omega}$ в силу условия $\{0\} = \text{Kerid}_{\text{Span}\Omega} \subset \text{Ker}\zeta^*$ следует, что вектор $\text{id}_{\text{Span}\Omega}^{-1}(\omega)$ переводится оператором ζ^* в $\zeta^*(\omega)$. Этот элемент $\zeta^*(\omega)$ поставим в соответствие с элементом ω при действии оператора ξ_- . Полученный оператор ξ_- отображает $\text{Span}\Omega$ в пространстве X и, очевидно, линеен. Он непрерывен. Действительно, если D – открытое множество в X , то его прообраз при отображении ξ_- равен $\text{id}_{\text{Span}\Omega}[\zeta^{*-1}[D]]$. Но $\zeta^{*-1}[D]$ открыто в силу непрерывности оператора ζ^* , тогда как область $\text{id}_{\text{Span}\Omega}[\zeta^{*-1}[D]]$ является открытой в силу гомеоморфизма $\text{id}_{\text{Span}\Omega}$. Теперь с учетом теоремы 2 [6, с. 245] почти дословное повторение доказательства теоремы 1 [1] в части построения непрерывного продолжения ξ^* оператора ξ_- на все пространство H_q , а также выбора (лемма 2 [1]) для ξ_p – модели $-\xi^*$ эквивалентной ей $(A, B, B^\#)_p$ – модели $-(A, B, B^\#) \in L_p$ убеждает, что $dg(\cdot)/dt = Ag + Bw + B^\#q, \forall (g, w, q) \in Q$ (установили второе « \Leftrightarrow » – следствие).

Осталось показать, что из N - K -решения (1) [1], следует $\exists \sup_L \Psi(Q) \in L_p(T, \mu, R)$:

$$\begin{aligned} dg(t)/dt &= A(t)g(t) + B(t)w(t) + B^\#(t)q(t), \\ \forall (g, w, q) \in Q &\Rightarrow \\ \Rightarrow \|dg(t)/dt\|_X &\leq \|A(t)\|_{L(X, X)} \|g(t)\|_X + \|B(t)\|_{L(Y, X)} \|w(t)\|_Y + \|B^\#(t)\|_{L(Z, X)} \|q(t)\|_Z, \\ \forall (g, w, q) \in Q &\Rightarrow \\ \Rightarrow \Psi(g, w, q) &\leq \left(\|A(\cdot)\|_{L(X, X)}^p + \|B(\cdot)\|_{L(Y, X)}^p + \|B^\#(\cdot)\|_{L(Z, X)}^p \right)^{1/p} \in L_p(T, \mu, R), \\ \forall (g, w, q) \in Q &. \end{aligned}$$

Последнее означает, что множество $\Psi(Q)$ имеет в пространстве $L_p(T, \mu, R)$ мажоранту, следовательно (теорема 17 [6, с. 68]), существует $\sup_L \Psi(Q)$ класса $L_p(T, \mu, R)$.

4. Инвариантность дифференциальной реализации на конечном семействе пучков динамических процессов

Качественное изучение дифференциальной реализации состоит прежде всего в выработке языка геометрической структуры пучков управляемых динамических процессов, поэтому естественно спросить: когда два K -

пучка имеют *одно* (общее) дифференциальное уравнение реализации, выраженной в терминах этого языка? Требуется, следовательно, установить некоторое геометрическое отношение на заданном (для начала на конечном) семействе пучков моделируемых процессов. Ниже исследуем «угловое отношение», которое индуцирует означенную структуру; назовем ее *угловым инвариантным расширением* реализации D -системы.

Пусть G и M – произвольные (но фиксированные) ненулевые замкнутые подпространства в $(H_q, \|\cdot\|_H)$, такие, что $G \cap M = \{0\}$. Далее, через конструкцию

$$\gamma[G, M] := \inf \left\{ \left\| \frac{h}{\|h\|_H} - \frac{h'}{\|h'\|_H} \right\|_H : h \in G \setminus \{0\}, h' \in M \setminus \{0\} \right\}$$

обозначим *угловое расстояние* [7, с. 21] между подпространствами G и M ; ясно, что при $q=2$ функция углового расстояния $\gamma[\cdot, \cdot]$, посредством скалярного произведения в H_q , тесно связана [7, с. 42] с обычной конструкцией угла в гильбертовом пространстве (например, теоремы 11. D [7, с. 21] и 14. C [7, с. 42]).

Постановка углового расширения: пусть $N_1, N_2 \subset \Pi_u^\#$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ – пучки динамических процессов с дифференциальной реализацией (1) [1] (необязательно с одной и той же $(A, B, B^\#)_p$ – моделью для N_1 и N_2). Рассмотрим задачу, не прибегая к теореме 2, но используя факт существования реализаций для N_1, N_2 , необходимо определить на языке угловой метрики $\gamma[\cdot, \cdot]$ условия, когда расширенный пучок $N := N_1 \cup N_2$ тоже характеризуется K -решениями некоторого дифференциального уравнения (1) [1].

Замечание 8. Другой геометрический подход к решению задачи инвариантного расширения реализации можно развить, опираясь на свойство полуаддитивности оператора Релея–Ритца (теорема 1 [8]) или, в варианте $\text{Card}N = \aleph_0$, на модифицированную из [9] конструкцию индуктивного расширения K -решений.

Обозначим через E_1 и E_2 замыкания в пространстве H_q линейных многообразий $\text{Span}\{\chi \cdot (x, u, u^\#(x)) : \chi \in F, (x, u, u^\#(x)) \in N_1\}$ и $\text{Span}\{\chi \cdot (x, u, u^\#(x)) : \chi \in F, (x, u, u^\#(x)) \in N_2\}$, где $F \subset L(T, \mu, R)$ – семейство классов эквивалентности ($\text{mod } \mu$) всех характеристических функций, индуцированных элементами σ -алгебры \mathcal{F}_μ .

Теорема 3. Пусть X, Y, Z – равномерно выпуклые пространства, тогда семейство динамических процессов $N := N_1 \cup N_2$ состоит (исключительно) из K -решений некоторого дифференциального уравнения (1) [1], если $\gamma[E_1, E_2] > 0$.

Доказательство. Факт $\gamma[E_1, E_2] > 0$ приводит к $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, $E_1 \neq E_1 + E_2 \neq E_2$ и для каждой тройки $(g_0, w_0, q_0) \in \text{Span}N \subset E_1 + E_2$ имеет место равенство $(g_0, w_0, q_0) = (g_1, w_1, q_1) + (g_2, w_2, q_2)$, где слагаемые $(g_1, w_1, q_1) \in \text{Span}N_1 \subset E_1$ и $(g_2, w_2, q_2) \in \text{Span}N_2 \subset E_2$ определяются единственным представлением соответственно в $\text{Span}N_1$ и $\text{Span}N_2$.

В соответствии с теоремой 2 для каждого множества $S \in \wp_\mu$, а также означенных выше троек (g_1, w_1, q_1) и (g_2, w_2, q_2) , будут справедливы два неравенства

$$\begin{aligned} \nu_1^-(S) &\leq (\nu_1^+(S))^{1/p} (\nu_1(S))^{1/q}, \\ \nu_2^-(S) &\leq (\nu_2^+(S))^{1/p} (\nu_2(S))^{1/q}, \end{aligned}$$

где соответствующие меры равны

$$\begin{aligned} \nu_1^-(S) &:= \int_S \|dg_1(\tau) / d\tau\|_X \mu(d\tau), \\ \nu_1(S) &:= \int_S (\|dg_1(\tau) / d\tau\|_X^q + \|dw_1(\tau) / d\tau\|_Y^q + \|dq_1(\tau) / d\tau\|_Z^q) \mu(d\tau), \\ \nu_2^-(S) &:= \int_S \|dg_2(\tau) / d\tau\|_X \mu(d\tau), \\ \nu_2(S) &:= \int_S (\|dg_2(\tau) / d\tau\|_X^q + \|dw_2(\tau) / d\tau\|_Y^q + \|dq_2(\tau) / d\tau\|_Z^q) \mu(d\tau); \end{aligned} \tag{5}$$

здесь ν_1^+ и ν_2^+ – некоторые положительные меры, абсолютно непрерывные относительно μ и независимые от «конкретизаций» множества $S \in \wp_\mu$ и троек вектор-функций $(g_1, w_1, q_1) \in \text{Span}N_1$ и $(g_2, w_2, q_2) \in \text{Span}N_2$.

Теорема 3 будет доказана, как только покажем (теорема 2), что существует такая положительная мера ν_+ , абсолютно непрерывная относительно μ , что при произвольном выборе тройки $(g_0, w_0, q_0) \in \text{Span}N$ и множества $S \in \wp_\mu$ выполняется неравенство $\nu_-(S) \leq (\nu_+(S))^{1/p} (\nu(S))^{1/q}$, где меры ν_-, ν соответственно равны

$$\begin{aligned} \nu_-(S) &:= \int_S \|dg_0(\tau) / d\tau\|_X \mu(d\tau), \\ \nu(S) &:= \int_S (\|g_0(\tau)\|_X^q + \|w_0(\tau)\|_Y^q + \|q_0(\tau)\|_Z^q) \mu(d\tau). \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим $E_1 \times E_2$ с нормой $\|\omega', \omega''\|^* := (\|\omega'\|_{H^q}^q + \|\omega''\|_{H^q}^q)^{1/q}$, $\omega' \in E_1$, $\omega'' \in E_2$; ясно, что это пространство банахово. Обозначим через G соответствие между $E_1 \times E_2$ и линейным многообразием $E_1 + E_2$ пространства H_q , организованное по правилу $(\omega', \omega'') \rightarrow G(\omega', \omega'') = \omega' + \omega''$, которое линейно, непрерывно и взаимно однозначно (последнее в силу неравенства $\gamma[E_1, E_2] > 0$). На основании 11.D [7, с. 21] (устанавливающего замкнутость $E_1 + E_2$) и следствия [6, с. 454] заключаем, что непрерывен и оператор G^{-1} . Пусть число $c^* > 0$ – норма оператора G^{-1} и пусть $c := \max\{1, c^*\}$.

Теперь рассмотрим меру $\nu_+ := c^p(\nu_1^+ + \nu_2^+)$. Тогда с учетом непрерывности оператора G^{-1} , а так же используя (5), (6) и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} \nu_-(S) &= \int_S \|dg_1(\tau) / d\tau - dg_2(\tau) / d\tau\|_X \mu(d\tau) \leq \\ &\leq \int_S \|dg_1(\tau) / d\tau\|_X \mu(d\tau) + \int_S \|dg_2(\tau) / d\tau\|_X \mu(d\tau) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (v_1^+(S))^{1/p} (v_1(S))^{1/q} + (v_2^+(S))^{1/p} (v_2(S))^{1/q} \leq \\ &(v_1^+(S) + v_2^+(S))^{1/p} (v_1(S) + v_2(S))^{1/q} = \\ &= (v_1^+(S) + v_2^+(S))^{1/p} \left\| \chi_{S^*} (g_1, w_1, q_1), \chi_{S^*} (g_2, w_2, q_2) \right\|^* \leq \\ &\leq c(v_1^+(S) + v_2^+(S))^{1/p} \left\| \chi_{S^*} (g_1 + g_2, w_1 + w_2, q_1 + q_2) \right\|_H = (v_+(S))^{1/p} (v(S))^{1/q}, \end{aligned}$$

тут χ_S – характеристическая функция $S \in \mathcal{G}_\mu$. Теорема доказана.

Теорема 3 позволяет, не используя прямо апелляцию к теореме 2, исследовать свойство реализации D -системы $N \subset \Pi_\mu^\#$, $1 < \text{Card} N \leq k < \aleph_0$ через анализ угловых расстояний $\gamma[\sum_{j=1, \dots, i} E_j, E_{i+1}]$ на конечном семействе пучков, в частности, «одноэлементных» N_i ($i=1, \dots, k$) из N , прошедших предварительную апробацию (теорема 1: $\Psi(N_i) \in L_p(T, \mu, R)$) на предмет существования реализации (1) [1] для каждого динамического процесса N_i . В данном контексте особый аналитический интерес приобретает постановка дифференциального моделирования слабоструктурированных D -систем, связанная с методологической позицией δ)¹ замечания 6 [1]. С учетом общих положений, высказанных в замечании 7, теорема 3 имеет как «контрпункт» положения ε) замечания 6 [1], очевидное, хотя и парадоксальное:

Следствие 2. Пусть N_1, N_2 – различные максимальные элементы в упорядоченном по включению семействе всех подмножеств K -решений из $\Pi_\mu^\#$, обладающих реализацией (1) [1] с $u^\#(\cdot): AC(T, X) \rightarrow L_q(T, \mu, Z)$. Тогда $\gamma[E_1, E_2] = 0$, при этом пучки динамических процессов N_1 и N_2 не обладают общей $(A, B, B^\#)_p$ – моделью в дифференциальной реализации (1) [1] с нелинейным позиционным законом $x \rightarrow u^\#(x)$.

5. О вложении класса вполне непрерывных нестационарных реализаций в пространство абсолютно суммируемых последовательностей

Для D -системы, представленной произвольным семейством процессов, построение уравнений ее дифференциальной реализации (1) [1] довольно сложное (даже у стационарной $(A, B, B^\#)_p$ – модели [14, 16, 20]). Правда оно становится вполне обозримым в одном важном случае – в контексте проблемы аппроксимации [6, с. 513], когда для дифференциальной реализации (1) [1] ее интегральный ξ -оператор (2) [1] нагружен дополнительными условиями, приближающими реализацию к $\dim X < \infty$. Это построение формализует следующая « $(A, B, B^\#)_p$ – конструкция».

¹Любопытно сравнить данную позицию математического моделирования с мнением Калмана [24, с. 36]: «Построение конкретных моделей обычно относится к компетенции физиков и не входит в компетенцию ни специалистов по теории управления, ни даже по теории систем»; авторам стоит большого труда воздержаться от обсуждения философских аспектов данного вопроса; хотя отметим, что частично его теоретико-множественная методология обозначена в выводах доклада [25].

Определение 4. *Квазилинейную дифференциальную реализацию (1) [1] будем называть вполне непрерывной, если ее интегральный оператор (2) [1] компактный.*

Для удобства подкласс $(A, B, B^\#)_p$ -моделей, отвечающих в силу конструкции (2) вполне непрерывным квазилинейным дифференциальным реализациям, обозначим через L_p^{com} , при этом согласно (b) замечания 1 [27] далее считаем $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y), (Z, \|\cdot\|_Z)$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость задают $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_Z$), кроме того, используем «стандартные» обозначения $l_r, r \in [1, \infty]$ банаховых пространств последовательностей [6, с. 147].

Одним из основных инструментов доказательства теоремы 2 служит лемма 2 [1]. Чтобы подчеркнуть роль, которую она играет, вначале докажем вложение L_p^{com} в l_1 в несколько большей общности.

Теорема 4. L_p является фактор-пространством l_1 .

Доказательство. Пространства $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y), (Z, \|\cdot\|_Z)$ изоморфны пространству последовательностей l_2 [6, с. 176], следовательно, $L(X, X), L(Y, X), L(Z, X)$ изоморфны банахову пространству $L(l_2, l_2)$, которое сепарабельно (содержит всюду плотное множество матриц-операторов (2) [6, с. 409] с рациональными коэффициентами), а значит (теорема 1.5.18 [23, с. 150]) сепарабельно и пространство $(L_p, \|\cdot\|_L)$.

Рассмотрим линейный оператор $U: l_1 \rightarrow L_p$, полагая

$$U: \{\alpha_i\} \rightarrow \sum_{i=1,2,\dots} \alpha_i x_i, \{\alpha_i\} \in l_1,$$

где $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset L_p$ – счетное всюду плотное множество в единичном шаре S_L (с центром в нуле) в L_p . Оператор U – непрерывный; компиляция теоремы 5.1 [28, с. 132], теоремы 3 [6, с. 260] и положения $(f(x_1), \dots, f(x_n), \dots) \in l_\infty, \forall f \in L_p^*$. Далее, пусть S_l – единичный шар (с центром в нуле) в l_1 , и поскольку $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset U(S_l)$, то образ $U(S_l)$ плотен в шаре S_L , откуда заключаем: U – гомоморфизм пространства l_1 на пространство L_p (лемма 1 [6, с. 451]). Таким образом, пространства L_p и $l_1/\text{Ker}U$ линейно гомеоморфны.

Следствие 3. $L(H_q, X)$ изоморфно фактор-пространству $l_1/\text{Ker}U$.

С учетом следствия 3 и теоремы 3 [6, с. 326] следующая теорема представляется в достаточной степени очевидной.

Теорема 5. *Класс L_p^{com} вполне непрерывных $(A, B, B^\#)_p$ – моделей изоморфен подпространству $\pi \circ U^{-1}(L_p^{com})$, где π – фактор отображения при $l_1/\text{Ker}U$.*

Заключение

Задача аналитического описания апостериорного множества данных возникает во многих разделах науки и техники и связана с моделированием и/или идентификацией сложных динамических систем [10]. В этом контексте выше даны строгие аналитические решения задачи дифференциальной реализации пучка динамических процессов, при этом необходимо отметить, что естественная потребность в построении теории диф-

ференциальной реализации в бесконечномерных пространствах ощущалась давно [11] в связи с развитием обратных задач математической физики. Первый шаг в этом направлении сделал Колмогоров [12]².

Надо отметить, что до какого-то момента «механический» перенос результатов конечно мерной теории дифференциальной реализации на бесконечно мерный случай проводится без особых осложнений [13] – это относится, в частности, к линейным стационарным моделям в некоторых пространствах Фреше [14] или в гильбертовых пространствах *в собственном смысле слова* [15, с. 216], полные ортонормированные системы которых являются *базисом*³, что активно использовалось в работах [8, 16, 17]. Серьезные трудности начинаются при переходе к реализации системы с пространством состояний, не обладающим⁴ базисом, и при моделировании которой нельзя обойтись без учета фактора нелинейности ее динамики, на что, по существу, и акцентировалось внимание в данной статье.

За пределами работы остался прикладной аспект проблемы, и можно сказать, что материал статьи можно рассматривать как начальный (и совершенно необходимый) этап в изучении реализации/идентификации [26, 31, 32] квазилинейных систем – раздел качественной теории обратных задач системного анализа [19, с. 25]. В данном контексте определим *grossomodo* исследования по дифференциальной реализации в банаховом пространстве, которые могут представлять дальнейший интерес:

- реализация с вполне непрерывной ξ_p -моделью [29];
- стационарные модели, т.е. $(A, B, B^\#) \in L(X, X) \times L(Y, X) \times L(Z, X)$ [30];
- модели при $T=R$ [12];
- модели с минимальной операторной нормой $\|\cdot\|_{L(H, X)}$ [27].

А при $d^{k-1}x/dt^{k-1} \in AC(T, X)$ и позиционном управлении $u^\#(x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \dots, x(t-\tau_r))$ с запаздываниями $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ означенные постановки распространить на модели вида:

$$d^k x / dt^k = A_{k-1} d^{k-1} x / dt^{k-1} + \dots + A_1 dx / dt + A_0 x + Bu + B^\# u^\#(x; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r), \quad (7)$$

² Статья в ДАН СССР (1940, т. 26, с. 6–9) с задачей реализации: *каковы аналитические условия, при которых D-система в гильбертовом пространстве X есть фазовый поток на T=R?*; т.е. характеристика траекторий D-системы как орбит ее движения относительно однопараметрической группы преобразований R, действующей в X. Осознание этого обстоятельства имеет серьезные и весьма глубокие последствия. Во-первых, благодаря этому теория «бесконечномерной реализации» вводится в рамки математической строгости, приобретая «респектабельность». Во-вторых, что важнее, это сильно раздвигает ее границы, позволяя ставить и решать совершенно новые задачи.

³ Говорят [6, с. 514], что последовательность $\{x_n\}$ элементов банахова пространства X является *базисом* в X, если каждый элемент $x \in X$ *однозначно* раскладывается в ряд $x = \sum \alpha_n x_n, n=1, \dots, \infty$ сходящийся по норме пространства X.

⁴ В 1973 г. П. Энфло построил [18] сепарабельное рефлексивное банахово пространство без свойства аппроксимации (когда любой компактный оператор есть предел конечномерных операторов), а следовательно, и без базиса.

$$A_{k-1}, \dots, A_0, B, B^\# \in L_p(T, L(X, X)) \times \dots \times L_p(T, L(X, X)) \times L_p(T, L(Y, X)) \times L_p(T, L(Z, X));$$

В связи с этим сошлемся на работу [20], в которой предложена конструктивная процедура построения квазилинейных дифференциальных реализаций, позволившая, например, показать, как рассматривать уравнения Эйлера в качестве эмпирической экстраполяции модели (7) в реализации наблюдаемого пространственного вращательного движения твердого тела ([21, 33] в контексте математической постановки задачи структурной идентификации [10, с. 349] из замечания 2 [1]).

В то время, как обыкновенным дифференциальным уравнениям соответствуют векторные поля, а дифференциальным включениям – многозначные поля ориентиров, наряду с означенными выше возможными постановками в дифференциальной реализации, можно также определить подобные задачи для класса дифференциальных включений [22], при соответствующих предположениях для компактнозначных отображений $x \rightarrow u^\#(x)$ и опорах на теорему 2 и теорему Кастэна [23, с. 177].

Эти, по необходимости краткие, формулировки обобщения задачи реализации в классе дифференциальных моделей (7), проясняя перспективу дальнейших исследований, несколько упрощают существо дела, если мы не склонны платить за максимальную общность дополнительными техническими осложнениями. Тем не менее отметим, что происходящее в настоящее время «изменение статуса» проблемы дифференциальной реализации следует рассматривать не как исключительный процесс, а скорее как возвращение к норме, поскольку помимо самостоятельного значения, которое имеет изучение дифференциальной реализации, эти изыскания оказываются чрезвычайно полезными в контексте общих теоретико-системных исследований, связанных с математическим моделированием D -систем [11, 24], перестав быть областью системного анализа, замкнутого в себе, что уже подчеркивал Калман [24, с. 267]: «в теории систем задача реализации играет центральную роль».

Литература

1. Русанов В.А., Антонова Л.В. Геометрия пучков управляемых динамических процессов, обладающих нелинейной дифференциальной реализацией в равномерно выпуклом банаховом пространстве. I // Вестник Бурятского государственного университета. – 2011. – Вып. 9. – С. 188-201.
2. Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. Принцип максимума энтропии в структурной идентификации динамических систем. Аналитический подход // Известия вузов. Математика. – 2005. – № 11. – С. 16-24.
3. Акилов Г.П., Дятлов В.Н. Основы математического анализа. – Новосибирск: Наука, 1980. – 336 с.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Наука, 1986. – 752 с.
5. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
7. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.

8. Русанов В.А. Об одной алгебре множеств динамических процессов, обладающей дифференциальной реализацией в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. – 2010. – Т. 433, № 6. – С. 750-752.
9. Данеев А.В., Русанов В.А. Порядковые характеристики свойств существования сильных линейных конечномерных дифференциальных моделей // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 43-50.
10. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
11. Willems J.C. System Theoretic Models for the Analysis of Physical Systems // Ric. Aut. – 1979. № 10. – P. 71-106.
12. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений / Избранные труды. Т. 1. Математика и механика. – М.: Наука, 2005. – С. 296-300.
13. Данеев А.В., Русанов В.А. Геометрический подход к решению некоторых обратных задач системного анализа // Известия вузов. Математика. – 2001. – № 10. – С. 18-28.
14. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана–Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 6. – С. 137-157.
15. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.
16. Русанов В.А. К качественной теории реализации квазилинейных систем в гильбертовом пространстве // Доклады РАН. – 2008. – Т. 421, № 3. – С. 326-328.
17. Русанов В.А., Козырев В.А., Шарпинский Д.Ю. К теории реализации квазилинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 82-95.
18. Enflo P. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces // Acta Math. – 1973. – V. 130, № 3. – P. 309-317.
19. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 687 с.
20. Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем // Прикладная математика и механика. 2010. – Т. 74. – Вып. 1. – С. 119-132.
21. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. XVI, № 6. – С. 659-670.
22. Касьянов П.О. Многозначная динамика решений автономного дифференциально-операторного включения с псевдомонотонной нелинейностью // Кибернетика и системный анализ. 2011. – № 5. – С. 150-163.
23. Варга Дж. Оптимальные управления дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 624 с.
24. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
25. Structural identification of dynamic systems: Entropy approach / V.A. Rusanov, A.V. Daneev, A.E. Kumenko, D.Yu. Sharpinsky // Proc. ICSE'06. 18-th International Conference on Systems Engineering. Coventry University, UK. 2006. – P. 419-424.
26. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров эллиптико-псевдопараболических распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 4. – С. 28-50.

27. Differential realization with a minimum operator norm of a controlled dynamic process / V.A. Rusanov, L.V. Antonova, A.V. Daneev, A.S. Mironov // *Advances in Differential Equations and Control Processes*. – 2013. – Vol. 11, № 1. – P. 1-40.

28. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 448 с.

29. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. Существование дифференциальной реализации динамической системы в банаховом пространстве в конструкциях расширений до M_p -операторов // *Дифференциальные уравнения*. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 358-370.

30. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. К дифференциальной реализации автономной нелинейной системы «вход–выход» минимального динамического порядка в гильбертовом пространстве // *Доклады РАН*. – 2013. – Т. 451, № 1. – С. 24-27.

31. Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // *Математические заметки*. – 2013. – Т. 94. – Вып. 2. – С. 207-217.

32. Гольдман Н.Л. Определение коэффициентов при производной по времени в квазилинейных параболических уравнениях в пространствах Гельдера // *Дифференциальные уравнения*. – 2012. – Т. 48, № 12. – С. 1597-1606.

33. Коровин С.К., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Нелинейные отображения вход–выход и их минимальные реализации // *Доклады РАН*. – 2010. – Т. 434, № 5. – С. 604-608.

34. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – С. 94.

Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, старший сотрудник Института динамики систем и теории управления СО РАН (ИДСТУ СО РАН), e-mail: V.Rusanov@mail.ru

Антонова Лариса Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, директор Института математики и информатики Бурятского государственного университета, e-mail: antonov_vi_52@mail.ru

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информатика» Иркутского государственного университета путей сообщения (ИрГУПС), e-mail: daneev@mail.ru

Rusanov Vyacheslav Anatolievich, doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, senior researcher, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS (ISDCT SB RAS), e-mail: V.Rusanov@mail.ru

Antonova Larisa Vasylijevna, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, director, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, e-mail: antonov_vi_52@mail.ru

Daneev Alexey Vasylijevich, doctor of technical sciences, professor, head of the department of computer science, Irkutsk State Railway University – IrSRU, e-mail: daneev@mail.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Доказаны две теоремы о решении задачи Коши в целом и для одного специального класса уравнений за счет того, что уравнение рассматривается в комплексной области.

Ключевые слова: задача Коши, голоморфные функции, полицилиндрическая область, аналитические коэффициенты.

V.V. Kibirev

CAUCHY PROBLEM FOR ONE CLASS ELLIPTIC EQUATIONS

Two theorems have been proved on the solution of Cauchy problem on the whole and for one special class equations due to the fact that the equation is considered in the complex domain.

Keywords: Cauchy problem, holomorphic functions, polycylindrical domain, analytic coefficients.

Введение

Классическая теорема Коши–Ковалевской дает существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных с аналитическими коэффициентами. Однако существование решения гарантируется только в малом. Здесь будет изучаться задача Коши для одного узкого класса уравнений, но решение будет получено и в целом. Решение в целом получается за счет того, что уравнение рассматривается в комплексном пространстве.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -L(u) \tag{1}$$

где $L(u) = \sum_{j,l=1}^m A_{jl}(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l}$, причем при вещественных значениях переменных x_1, x_2, \dots, x_m коэффициенты A_{jl} вещественны и уравнение (1) эллиплично. Все коэффициенты A_{jl} аналитичны в некоторой области голоморфности B из пространства C^m m независимых комплексных переменных x_1, x_2, \dots, x_m . Точку x_1, x_2, \dots, x_m пространства C^m иногда для краткости обозначаем X .

Задачу Коши будем изучать в следующей постановке: найти голоморфное решение u уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{z=0} = f(X), \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = g(X), \quad (2)$$

где f и g – функции, голоморфные в некоторой области голоморфности $A \subset B$ из пространства $C^m : \{z = 0\}$.

Доказательство основных теорем

Пусть область голоморфности начальных данных (2) A является полицилиндром $D : \{|x_1| < r_1, \dots, |x_m| < r_m\}$. Будем искать решение задачи Коши в виде степенного ряда по z :

$$u(z, X) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n c_n(X). \quad (3)$$

Подставив (3) в (1) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях z , получим

$$c_{n+2}(X) = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} L(c_n). \quad (4)$$

Отсюда следует, что решение задачи Коши формально можно записать следующим образом:

$$u(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \left\{ L^n(f) + \frac{z}{2n+1} L^n(g) \right\}. \quad (5)$$

Исследуем сходимость рядов, входящих в формулу (5). Для этого оценим $|L^n(f)|$. Непосредственным подсчетом находим, что $L^n(f)$ является суммой не более чем $[2m(m+1)]^n$ выражений вида

$$\prod_{\lambda_r} \frac{\partial^{\lambda_r} A_{jl}}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_m^{\mu_m}} \cdot \frac{\partial^{\nu} f}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_m^{\nu_m}},$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_m = \lambda_r, \quad \nu_1 + \dots + \nu_m = \nu, \quad \sum_r \lambda_r + \nu = 2n.$$

Возьмем произвольную точку $X_\alpha = (x_{1\alpha}, \dots, x_{m\alpha})$ полицилиндра D . Тогда функции A_{jl} и f голоморфны в полицилиндре $D_\alpha : \{|x_1| \leq r_1 - |x_{1\alpha}|, \dots, |x_m| \leq r_m - |x_{m\alpha}|\}$. Далее получим в точке X_α оценку:

$$\left| \frac{\partial^{\lambda_r} A_{jl}}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_m^{\mu_m}} \right| \leq \frac{\mu_1! \dots \mu_m!}{\rho_1^{\mu_1} \dots \rho_m^{\mu_m}} \max |A_{jl}|,$$

где $\rho_r = r_r - |x_{r\alpha}|$. Аналогично оцениваются и производные функции f .

Положив

$$\rho = \min(\rho_1, \dots, \rho_m), \quad M = \max_{D_\alpha} |f|, \quad M = \max_{j,l,D_\alpha} \{f\},$$

окончательно найдем

$$\left| \prod_{\lambda_r} \frac{\partial^{\lambda_r} A_{jl}}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_m^{\mu_m}} \cdot \frac{\partial^\nu f}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_m^{\nu_m}} \right| \leq \frac{(2n)!}{\rho^{2n}} M_1^{2n} M, \quad (6)$$

так как

$$\nu! \dots \nu_m! \leq \nu!, \quad \mu_1! \dots \mu_m! \leq \lambda_r!, \quad \sum_r \lambda_r + \nu = 2n, \quad \nu! \prod_r \lambda_r \leq (2n).$$

Поскольку $L^n(f)$ содержит не более $[2m(m+1)]^n$ слагаемых такого вида, для $L^n(f)$ получаем оценку:

$$|L^n(f)| \leq (2n)! \left(\frac{\sqrt{2m(m+1)} M_1}{\rho} \right)^{2n} \cdot M. \quad (7)$$

Из оценки (7) следует, что ряды (5) сходятся абсолютно и равномерно в круге

$$K_\alpha : \left\{ |z| < \rho [2m(m+1)]^{\frac{1}{2}} M_1^{-1}, x_1 = x_{1\alpha}, \dots, x_m = x_{m\alpha} \right\}.$$

Пусть точка X_α пробегает весь полицилиндр D . Образует объединение $V(D)$ всех K_α , $X_\alpha \in D$. Ряды из формул (5) сходятся абсолютно и равномерно в $V(D)$. $V(D)$, как и в случае уравнения Лапласа, содержит некоторую открытую в C^{m+1} окрестность множества D .

Всякую голоморфную в полицилиндре D функцию f можно представить следующим образом:

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\Gamma} \frac{f(t_1, \dots, t_m)}{(t_1 - x_1) \dots (t_m - x_m)} dt_1 \dots dt_m, \quad (8)$$

где $\Gamma = C_1 X \dots X_m$, а C_i – окружность $|x_i| = r_i$. Подставив в (5) представление (8) для функций f и g и поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(z, x) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \cdot \int_{\Gamma} \{G(z, t_1 - x_1, \dots, t_m - x_m) f(t_1, \dots, t_m) + H(z, t_1 - x_1, \dots, t_m - x_m) g(t_1, \dots, t_m)\} dt_1 \dots dt_m, \quad (9)$$

где
$$G = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} L^n \left(\frac{1}{(t_1 - x_1) \dots (t_m - x_m)} \right),$$

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} L^n \left(\frac{1}{(t_1 - x_1) \dots (t_m - x_m)} \right).$$

Порядок суммирования и интегрирования здесь можно менять в силу тех же соображений, что и в случае уравнения Лапласа. Функции G и H относительно переменных z, x_1, \dots, x_m являются решениями уравнения (1).

Так как эти функции удовлетворяют соотношению $G = \frac{\partial H}{\partial z}$, области их голоморфности совпадают.

Точно таким же образом получается следующее представление для решения задачи Коши в случае, когда вместо кругового цилиндра D областью голоморфности начальных данных f и g является произвольная цилиндрическая область P :

$$u(z, X) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_B \{G(z, t_1 - x_1, \dots, t_m - x_m) f(t_1, \dots, t_m) + H(z, t_1 - x_1, \dots, t_m - x_m) g(t_1, \dots, t_m)\} dt_1 \dots dt_m, \tag{10}$$

где B – остов границы P .

Для решения задачи Коши можно дать формулу другого вида. Пусть A – произвольная, ограниченная область пространства C^m и функция $f \in L^2(A)$, т.е. интегрируема с квадратом модуля по области A . Всякую голоморфную в A функцию $f \in L^2(A)$ можно представить как

$$f(X) = \int_A K(x_1, \dots, x_m, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) f(t_1, \dots, t_m) d\omega, \tag{11}$$

где $K(X, \bar{T})$ – kern-функция области A , а $d\omega$ – элемент объема в пространстве C^m .

Воспользовавшись формулой (11), точно так же, как выше использовалась интегральная формула Коши, для решения задачи Коши получим следующее представление:

$$u(z, X) = \int_A \left\{ F(z, X, \bar{T}) g(T) + \frac{\partial F(z, X, \bar{T})}{\partial z} f(T) \right\} d\omega, \tag{12}$$

где

$$(X) = (x_1, \dots, x_m), T = (t_1, \dots, t_m), \bar{T} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m),$$

$$F(z, X, \bar{T}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} L^n (K(X, \bar{T})),$$

т.е. $F(z, X, \bar{T})$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям

$$F(0, X, \bar{T}) = 0, \quad \frac{\partial F(z, X, \bar{T})}{\partial z} \Big|_{z=0} = K(X, \bar{T}).$$

В частности, для цилиндра D имеем

$$F(z, X, \bar{T}) = \frac{r_1^2 \dots r_m^2}{\pi^m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} L^n \left(\frac{1}{(r_1 - x_1 \bar{t}_1) \dots (r_m - x_m \bar{t}_m)} \right), \quad (13)$$

а для гипершара –

$$F(z, X, \bar{T}) = \frac{m! R^2}{\pi^m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} L^n \left(\left[R^2 - \sum_{r=1}^m x_r \bar{t}_r \right]^{-m-1} \right). \quad (14)$$

Таким образом, воспользовавшись формулой (10), получим две теоремы.

Теорема 1. *Существует область голоморфности $H(D)$ из пространства S^{m+1} такая, что каковы бы ни были начальные данные f_{ij} , голоморфные в цилиндре D и непрерывные в замкнутом цилиндре \bar{D} , решение задачи Коши голоморфно в области $H(D)$.*

Теорема 2. *Если начальные данные аналитически продолжимы из D , то решение задачи Коши аналитически продолжимо из области $H(D)$. Для каждой точки X границы B области $H(D)$ существует решение уравнения (1), голоморфное в $H(D)$, удовлетворяющее начальным данным, голоморфным в D , и имеющее особенность в точке X .*

Заключение

Итак, нами получено решение задачи Коши в целом для некоторого класса эллиптических уравнений за счет того, что уравнение рассматривается в комплексной области.

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.
3. Фукс Б.А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1962. – 420 с.
4. Янушаускас А. К задаче Коши для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными // Сиб. матем. журнал. – 1975. – Т. 16, №6. – С. 1352-1363.
5. Янушаускас А. К теории вырождающихся эллиптических уравнений // Сиб. матем. журнал. – 1974. – Т. 15, №6. – С. 1394-1405

Кибирев Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета. Тел.(8301-2)219757, e-mail: dekanat_imi@bsu.ru

Kibirev Vladimir Vasilevich, candidate of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics, Buryat State University. Tel. (8301-2) 219757, e-mail: dekanat_imi@bsu.ru

УДК 517.956

© Б.Б. Ошоров

**МАТРИЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ**

В статье предлагаются матричные математические модели функций комплексной переменной, кватернион-функций и их условий дифференцируемости. Эти условия приводят к матричным дифференциальным уравнениям, для которых рассматриваются краевые задачи.

Ключевые слова: комплексное число, кватернион, матричная модель, функция комплексной переменной, кватернион-функция, условия Коши-Римана, система уравнений с частными производными, краевая задача.

*B.B. Oshorov***MATRIX MATHEMATICAL MODEL FOR DIFFERENTIABLE
FUNCTIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

In the article matrix mathematical models of sets of complex numbers, sets of quaternions, functions of complex variable, quaternion functions and their conditions of differentiability are proposed. These conditions lead to matrix differential equations, boundary value problems are considered for them.

Keywords: complex number, quaternion, matrix model, function of complex variable, quaternion function, Cauchy-Riemann conditions, system of partial differential equations, boundary value problem.

Введение

Пусть R – множество действительных чисел. Известны различные модели расширения этого числового множества до множества комплексных чисел. Например, вводится мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, и тогда множеством комплексных чисел называют $C = \{z = x + iy \mid x, y \in R\}$. В этом случае $C \supset R = \{x = x + i0\}$. Также множество комплексных чисел рассматривается как $C = \{(x, y) : x, y \in R\}$, при этом $R = \{(x, 0)\}$.

Дальнейшее расширение числового множества C осуществляется за счет введения одной действительной единицы и трех линейно независимых мнимых единиц, что приводит к множеству кватернионов. В свое время интерес к этим математическим объектам был столь силен, что была создана «Международная ассоциация для содействия изучению кватернионов и родственных математических систем», просуществовавшая до первых десятилетий XX в. Затем интерес к кватернионам несколько ослаб. Но в связи с применением кватернионов в теоретической физике в настоящее время появляются новые работы, посвященные теории кватернионов и их приложениям. Довольно обширная библиография по этим вопросам имеется в книге А.В. Березина, Ю.А. Курочкина, Е.А. Толкачева [1].

Впрочем, интерес к кватернионам с математической точки зрения вполне закономерен, если вспомнить теорему Фробениуса: *Тело кватернионов является единственной конечномерной действительной ассоциативной некоммутативной алгеброй без делителей нуля* [2].

Оказалось, что удобными, наглядными и единообразными являются матричные модели этих двух множеств и соответственно – матричные представления функций комплексной переменной, кватернион-функций и условий их дифференцируемости.

1. Комплексные числа и кватернионы

Сначала предлагаем матричную модель множества комплексных чисел. По сравнению с традиционными моделями, по мнению автора, она не имеет особых преимуществ. Но, как было отмечено во введении, такое построение осуществляется не только для поля комплексных чисел, но и для тела кватернионов, и позволяет рассматривать эти множества с единых позиций.

Множество комплексных чисел можно рассматривать как линейное двумерное пространство C квадратных матриц второго порядка, где роль базиса играют матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тогда матрица $X = x_1 E + x_2 I = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, где $x_1, x_2 \in R$, называется

матричным представлением комплексного числа или просто *комплексным числом*.

Нетрудно убедиться, что это пространство изоморфно относительно операций сложения элементов и умножения элемента на скаляр и изометрично относительно евклидовой метрики пространству R^2 . Но в пространстве C , в отличие от евклидова пространства, определяются операции умножения и деления. Отталкиваясь от этого замечания и определения, можно построить матричную теорию множества комплексных чисел как линейного нормированного (метрического) пространства и поля одновременно.

Следуя идее, изложенной выше, в качестве пространства, изоморфного и изометричного евклидову пространству R^4 возьмем известное множество кватернионов. В книге [3] в качестве базиса предлагаются матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – некоторая точка пространства R^4 , то ей взаимно однозначно соответствует матрица $X = \sum_{i=1}^4 x_i E_i$, которая называется *кватернионом*.

Если множество всех кватернионов обозначить через \tilde{R}^4 , то следует отметить, что в этом пространстве определяются операции умножения (некоммутативное) и деления (левое и правое). Автором было найдено еще несколько конкретных базисов в этом пространстве. Наиболее удобным с точки зрения исследования краевых задач оказался базис (2) (обозначения матриц сохранены). Отметим, что для базисных матриц имеет место следующая таблица умножения:

$$\begin{aligned} E_1 E_i &= E_i E_1 = E_i, \quad i = \overline{1, 4}; & E_i^2 &= -E_1, \quad i = \overline{2, 4}; \\ E_2 E_3 &= -E_3 E_2 = E_4, \quad E_3 E_4 = -E_4 E_3 = E_2, \quad E_4 E_2 = -E_2 E_4 = E_3. \end{aligned}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если рассмотренное выше построение тела кватернионов назвать его моделью над полем действительных чисел, то можно предложить еще одно представление кватернионов, которое естественно называть моделью над полем комплексных чисел.

Пусть i – мнимая единица. Рассмотрим матрицы:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно убеждаемся, что для этих матриц имеет место следующая таблица умножения:

$$\begin{aligned} F_2^2 &= F_3^2 = F_4^2 = F_1; & F_2 F_3 &= -F_3 F_2 = i F_4; \\ F_3 F_4 &= -F_4 F_3 = i F_2; & F_4 F_2 &= -F_2 F_4 = i F_3. \end{aligned}$$

Поэтому в линейном пространстве кватернионов в качестве базиса можно взять систему матриц

$$G_1 = F_1, G_2 = -iF_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, G_3 = -iF_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G_4 = -iF_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тогда любой кватернион имеет вид:

$$X = x_1 F_1 - i(x_2 F_2 + x_3 F_3 + x_4 F_4), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4,$$

а сопряженный кватернион –

$$\bar{X} = x_1 F_1 + i(x_2 F_2 + x_3 F_3 + x_4 F_4).$$

Модель над полем комплексных чисел тела кватернионов позволяет привести в качестве примера одно из приложений этой теории.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве R^3 задан ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 , в котором любой вектор имеет представление

$$x = \sum_{j=1}^3 x_j e_j.$$

Любое линейное преобразование A пространства R^3 задается в этом базисе квадратной матрицей третьего порядка $A = (a_{jk})$, $j, k = \overline{1, 3}$. Договоримся не делать различий в обозначениях преобразования и матрицы, задающей это преобразование.

Ортогональное линейное преобразование A в пространстве R^3 , т.е.

$$x' = Ax, \quad AA^T = A^T A = E,$$

где E – единичная матрица, называется вращением (собственным), если $\det A = 1$.

Известно, что каждый действительный трехмерный вектор $x = \sum_{j=1}^3 x_j e_j$

может быть представлен комплексной эрмитовой матрицей [4]:

$$H = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 x_j F_{j+1},$$

где матрицы F_2, F_3, F_4 , которые называются спиновыми матрицами Паули, соответствуют базисным векторам e_1, e_2, e_3 . Это соответствие является изоморфизмом относительно сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.

Тогда вектор вращения $x' = Ax$ представляется матрицей

$$H' = \sum_{i=1}^3 x'_i F_{i+1} = UH\bar{U},$$

где U – комплексная унимодулярная ($\det U = 1$) матрица:

$$U = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Числа a и b определяют вращение однозначно. При этом числа $a, b, -\bar{b}, \bar{a}$ называются параметрами Кэли-Клейна данного вращения.

Любая комплексная матрица размером 2×2 может быть представлена кватернионом $X = x_1 F_1 - i(x_2 F_2 + x_3 F_3 + x_4 F_4)$. В частности,

$$U = a_1 F_1 - i(b_2 F_2 + b_1 F_3 + a_2 F_4), \quad \bar{U} = a_1 F_1 + i(b_2 F_2 + b_1 F_3 + a_2 F_4).$$

Матрица U определяет вращение однозначно. Таким образом, получено представление вращений кватернионами, которые можно называть кватернионами вращения.

2. Матричные функции

Пусть $D \subseteq C$ – некоторое множество. Тогда функцию $U : D \rightarrow C$ будем называть *функцией комплексной переменной X* .

Согласно определению множества C функция $U(X)$ имеет вид

$$U(X) = u_1(X)E + u_2(X)I = \begin{pmatrix} u_1(X) & -u_2(X) \\ u_2(X) & u_1(X) \end{pmatrix},$$

$$u_k : D \rightarrow R, k = 1, 2.$$

Здесь матрицы E и I образуют базис (1).

В силу изоморфизма пространств C и R^2 представление функции $U(X)$ можно также записать в виде:

$$U(X) = u_1(x_1, x_2)E + u_2(x_1, x_2)I = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) & -u_2(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) & u_1(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь на некотором множестве $D \subseteq R^4$ определена вектор-функция

$$U^T(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)), \quad U : D \rightarrow R^4.$$

Множеству D взаимно однозначно соответствует множество $\tilde{D} \subseteq \tilde{R}^4$, на котором определена *функция (кватернионфункция)*

$$\tilde{U}(X) = \sum_{i=1}^4 u_i(x)E_i, \quad \tilde{U} : \tilde{D} \rightarrow \tilde{R}^4,$$

взаимно однозначно соответствующая вектор-функции $U(x)$.

Для удобства в дальнейшем мы не будем делать различия в обозначениях вектор-функции и кватернион-функции.

Согласно формулам (2) по определению кватернион-функции имеем

$$U(X) = \begin{pmatrix} u_1(x) & -u_2(x) & -u_3(x) & -u_4(x) \\ u_2(x) & u_1(x) & -u_4(x) & u_3(x) \\ u_3(x) & u_4(x) & u_1(x) & -u_2(x) \\ u_4(x) & -u_3(x) & u_2(x) & u_1(x) \end{pmatrix}.$$

Из этих двух определений видно, что матрицы, задающие функции, имеют одинаковую структуру. Поэтому некоторые новые понятия можно вводить сразу для обеих функций.

Предварительно отметим, что поскольку C и \tilde{R}^4 – метрические пространства, то естественным образом вводятся понятия предела и непрерывности этих функций, а затем доказывается справедливость всех основных свойств этих понятий.

В пространствах C и \tilde{R}^4 задана операция деления, поэтому полагаем, что:

$$\frac{dU(X)}{dX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta U(X)}{\Delta X}.$$

Нетрудно доказать, что необходимыми условиями существования производной будут матричные равенства:

$$\begin{pmatrix} u_{1x_1} & -u_{2x_1} \\ u_{2x_1} & u_{1x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2x_2} & u_{1x_2} \\ -u_{1x_2} & u_{2x_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{1x_1} & -u_{2x_1} & -u_{3x_1} & -u_{4x_1} \\ u_{2x_1} & u_{1x_1} & -u_{4x_1} & u_{3x_1} \\ u_{3x_1} & u_{4x_1} & u_{1x_1} & -u_{2x_1} \\ u_{4x_1} & -u_{3x_1} & u_{2x_1} & u_{1x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2x_2} & u_{1x_2} & -u_{4x_2} & u_{3x_2} \\ -u_{1x_2} & u_{2x_2} & u_{3x_2} & u_{4x_2} \\ u_{4x_2} & -u_{3x_2} & u_{2x_2} & u_{1x_2} \\ -u_{3x_2} & -u_{4x_2} & -u_{1x_2} & u_{2x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{3x_3} & u_{4x_3} & u_{1x_3} & -u_{2x_3} \\ -u_{4x_3} & u_{3x_3} & -u_{2x_3} & -u_{1x_3} \\ -u_{1x_3} & u_{2x_3} & u_{3x_3} & u_{4x_3} \\ u_{2x_3} & u_{1x_3} & -u_{4x_3} & u_{3x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{4x_4} & -u_{3x_4} & u_{2x_4} & u_{1x_4} \\ u_{3x_4} & u_{4x_4} & u_{1x_4} & -u_{2x_4} \\ -u_{2x_4} & -u_{1x_4} & u_{4x_4} & -u_{3x_4} \\ -u_{1x_4} & u_{2x_4} & u_{3x_4} & u_{4x_4} \end{pmatrix},$$

которые становятся достаточными, если все частные производные непрерывны. Беглого взгляда достаточно, чтобы сказать, что структура матричных моделей дифференцируемости функций одинакова. Более того, матрицы второго условия с точностью до знаков и номеров переменных состоят из блоков, которыми служат матрицы первого условия. Первое равенство называется условием Коши-Римана, а второе – его четырехмерный аналог.

3. Краевые задачи

Матричные условия дифференцируемости порождают матричные уравнения для функций комплексной переменной

$$KU \equiv \frac{1}{2}(EU_x + IU_y) = \Theta, \quad (4)$$

$$LU \equiv KU + CU = F(X), \quad (5)$$

$$U(X) = \begin{pmatrix} u_1(x, y) & -u_2(x, y) \\ u_2(x, y) & u_1(x, y) \end{pmatrix}, C(X) = \begin{pmatrix} c_1(x, y) & -c_2(x, y) \\ c_2(x, y) & c_1(x, y) \end{pmatrix},$$

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) & -f_2(x, y) \\ f_2(x, y) & f_1(x, y) \end{pmatrix}, \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (4) и (5) будем называть уравнением Коши-Римана и обобщенным уравнением Коши-Римана (во избежание множества индексов вместо пары (x_1, x_2) пишем пару (x, y)).

Краевая задача 1. В прямоугольнике

$$D = \{X \in C : 0 < \operatorname{Re} X < k; 0 < \operatorname{Im} X < l\}$$

найти решение уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям

$$(U + \bar{U})|_{\operatorname{Im} X=0} = (U + \bar{U})|_{\operatorname{Re} X=k} = I(U - \bar{U})|_{\operatorname{Re} X=0} = I(U - \bar{U})|_{\operatorname{Im} X=l} = \Theta.$$

Теорема 1. Если матрица $C(x, y)$ непрерывна в \bar{D} и $\exists \alpha = \text{const}$,

$$0 < \alpha < \frac{\sqrt{2(k^2 + l^2)}}{kl},$$

такое, что $\|CU\|_0 \leq \alpha \|U\|_0$, то для $\forall F(x, y) \in L_2(D)$ существует единственное слабое обобщенное решение краевой задачи $I U(x, y) \in W_2^1(D)$, которое почти всюду в области D удовлетворяет уравнению (5).

Идея доказательства взята из работы [5] и трансформирована для матричных моделей. Отметим, что в силу условия на матрицу $C(x, y)$, утверждение теоремы 1 останется справедливым и для уравнения (4).

Условие существования производной кватернион-функции приводит к уравнению

$$MU(X) \equiv \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 E_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = \Theta. \tag{6}$$

Для вектор-функции

$$U^T(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)), \quad U : D \rightarrow R^4$$

уравнение (6) эквивалентно уравнению

$$TU(x) \equiv \sum_{i=1}^4 E_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$LU \equiv TU + CU = F(x), \tag{8}$$

где $C(\delta)$ – квадратная матрица четвертого порядка, $F(x)$ – заданная четырехмерная вектор-функция.

Краевая задача 2. В параллелепипеде

$$D = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : 0 < x_i < k_i, i = \overline{1,4}\}$$

найти решение уравнения (8) при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned}
 u_1|_{x_1=0} &= u_4|_{x_1=k_1} = u_2|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=k_1} = u_3|_{x_1=0} = u_3|_{x_1=k_1} = 0, \\
 u_2|_{x_2=0} &= u_1|_{x_2=k_2} = u_3|_{x_2=0} = u_3|_{x_2=k_2} = u_4|_{x_2=0} = u_4|_{x_2=k_2} = 0, \\
 u_3|_{x_3=0} &= u_2|_{x_3=k_3} = u_1|_{x_3=0} = u_1|_{x_3=k_3} = u_4|_{x_3=0} = u_4|_{x_3=k_3} = 0, \\
 u_4|_{x_4=0} &= u_3|_{x_4=k_4} = u_1|_{x_4=0} = u_1|_{x_4=k_4} = u_2|_{x_4=0} = u_2|_{x_4=k_4} = 0.
 \end{aligned}$$

Теорема 2. Если матрица $C(x) \in C(\bar{D})$ и $\exists \alpha, 0 < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{k}$, где $k = \min(k_1, k_2, k_3, k_4)$ такое, что $\|CU\|_0 \leq \delta \|U\|_0$, то для любой вектор-функции $F(x) \in L_2(D)$ краевая задача 2 имеет единственное решение из пространства $W_2^1(D)$.

Заключение

Единая методика исследования матричных математических моделей дифференцируемых функций приводит к матричным уравнениям, которые являются эллиптическими по классификации Петровского. Изучение краевых задач проводится с единых позиций, при этом эллиптичность уравнений не играет существенной роли. Отсюда становится возможным исследование краевых задач для матричных уравнений без определенного типа по устоявшейся классификации. Некоторые изыскания в этом направлении уже начаты [6]. Кроме того, представление кватернионов в базисе (3) и соответствующие приложения позволяют предполагать возможность применения краевых задач в квантовой механике.

Литература

1. Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. Кватернионы в релятивистской физике. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 200 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1975. – 400 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
5. Ошоров Б.Б. Задачи Римана – Гильберта и Пуанкаре с разрывными краевыми условиями для некоторых модельных систем уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, №5. – С. 696-704.
6. Ошоров Б.Б., Ошоров Бато Б. Краевые задачи для некоторых неклассических систем уравнений // Обратные и некорректные задачи математической физики. Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева: тезисы докл. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2012. – С. 409-410.

Ошоров Батор Батуевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления (ВСГУТУ), доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Бурятского государственного университета (БГУ), e-mail oshorovbb@pochta.ru

Oshorov Bator Batuevich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of higher mathematics, East-Siberian State University of Technology and Management (ESSUTM), associate professor, department of mathematical analysis and methodology of teaching mathematics, Buryat State University (BSU), e-mail oshorovbb@pochta.ru

УДК 517.948

© *Г.А. Шишкин*

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В статье с помощью функции гибкой структуры исследуется возможность решения одной краевой задачи интегродифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: функция гибкой структуры, запаздывание, краевая задача, дифференциальные уравнения.

G.A. Shishkin

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR VOLTERRA INTEGRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FUNCTIONAL DELAY

Using function of flexible structure, In the article a possibility for solution of a boundary value problem for integrodifferential equations with delayed argument is studied.

Keywords: function of flexible structure, delay, boundary value problem, differential equations.

Введение

В работе [2] рассматривались начальные задачи для линейных интегродифференциальных уравнений Вольтерра с запаздывающим аргументом запаздывающего, нейтрального и опережающего типов. Определение типов осуществлялось в соответствии с общепринятой классификацией. Проведено исследование возможностей преобразования начальных задач для этих уравнений с помощью функции гибкой структуры к интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом. Доказано, что задача Коши для всех интегродифференциальных уравнений запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры преобразуется к разрешающему интегральному уравнению типа Вольтерра с обыкновенным аргументом, решение которого существует и притом единственное при выполнении условий ограниченности функций, входящих в уравнение. Рассмотрены возможности решения в замкнутом виде и вариант приближенного решения, если точное решение найти затруднительно.

Постановка начальной задачи

Выпишем общий вид линейных интегродифференциальных уравнений Вольтерра с запаздывающим аргументом:

$$\sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^n \left[f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda \int_a^x K_{ij}(x, \eta) y^{(i)}(u_j(\eta)) d\eta \right] = f(x), \quad (1)$$

где $u_0(x) \equiv x$, $u_j(x) \leq x$, $u_j(x) \neq x \quad \forall j = \overline{1, l}$, $f_{ij}(x)$, $f(x)$ и $u_j(x)$ – непрерывны на отрезке $a \leq x \leq b$ с начальными условиями

$$y^{(i)}(u_j(x)) = \varphi_i(u_j(x)), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \quad (2)$$

где $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^l E_{x_0}^j$, $E_{x_0}^j$ – множество точек, для которых соответствующие $u_j(x) \leq x$ при $x \geq x_0 \quad \forall j = \overline{1, l}$, а $E_{x_0}^0 = [a, x_0]$, функции $\varphi_i(x)$ – заданы.

Постановка краевой задачи и ее решение

Рассмотрим уравнение (1) с начальными функциями в стандартной форме для краевых задач уравнений такого типа

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0) \varphi^i(u_j(x)), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x \in E_{x_0} \quad (3)$$

и с линейными биллокальными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{i\tau} y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau} y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau, \quad \tau = \overline{0, n-1}, \quad \alpha \leq x_0 \leq x_1 \leq b, \quad (4)$$

где $\alpha_{i\tau}$, $\beta_{i\tau}$ и γ_τ – постоянные числа.

Предполагая, что решение задачи (1), (3), (4) существует и единственно, будем искать его на отрезке $[x_0, b]$, используя начальные функции (3), краевые условия (4), функцию гибкой структуры и ее производные

$$y^{(i)}(u_j(x)) = D^{-1} \left[\sum_{s=1}^n y^{(s-1)}(x_0) \frac{d^i \Delta_s(u_j(x) - x_0)}{dx^i} + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x) - t)}{\partial x^i} \mu(t) dt \right] + v_i u_j^{(i)}(x) \mu(u_j(x)), \quad (5)$$

где $D = D(r_1, r_2, \dots, r_n)$ определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров r_1, r_2, \dots, r_n . Параметры определяются в ходе решения задачи, исходя из оптимальности ее решения, определитель $\Delta_s(x-t)$, $s = \overline{1, n}$ получается из определителя D заменой s -ой строки строкой $\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t), \dots, \exp r_n(x-t)$, $\mu(x)$ – новая неизвестная функция и $i = \overline{0, n}$, $v_i = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$, $v_n = 1$.

Для решения краевой задачи (1), (3), (4) определим $y^{(i)}(x_0)$ через новую неизвестную функцию $\mu(x)$. При этом при определении корней c_j уравнений $u_j(x) = x_0$ на отрезке $x \in [x_0, b]$ могут возникнуть три возможных ситуации: 1. $x_0 < x_1 \leq c_j; \forall j = \overline{0, l}$; 2. $x_0 \leq c_j < x_1 \forall j = \overline{0, l}$; 3. x_1 таково, что $\exists j = \overline{0, l}$ для которых $x_0 < x_1 \leq c_j$, а для некоторых $x_0 \leq c_j < x_1$.

Рассмотрим первый наиболее простой случай. Подставив $x = x_1$ в начальные функции (3) при $j=0$ и затем значения $y^{(i)}(x_1) = y^{(i)}(x_0)\varphi_i(x_1)$ в краевые условия (4), получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(x_0)[\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau}\varphi_i(x_1)] = \gamma_\tau, \\ \tau = \overline{0, n-1} \end{cases} \quad (6)$$

для определения значений $y^{(i)}(x_0)$.

Обозначив через ω главный определитель этой системы

$$\omega = \det[\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau}\varphi_i(x_1)], \quad i, \tau = \overline{0, n-1}$$

и через $\omega_{i\tau}$ – алгебраические дополнения к элементам главного определителя, по формулам Крамера найдем

$$y^{(i)}(x_0) = \omega^{-1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \gamma_\tau \omega_{i\tau}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (7)$$

Заменив значения $y^{(i)}(x_0)$ в соответствии с формулой (7) для начальных функций краевой задачи получим формулы

$$\varphi_i^*(u_j(x)) = \varphi_i(u_j(x)) \omega^{-1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \gamma_\tau \omega_{i\tau} \quad (3^*)$$

Также получим новые формулы и для функции гибкой структуры, пронумеровав их как первоначально выписанные формулы, пометив эти номера звездочкой:

$$\begin{aligned} y^{(i)}(x) = D^{-1} [\sum_{s=1}^n \omega^{-1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \gamma_\tau \omega_{(s-1)\tau} \Delta_s^{(i)}(x-x_0) + \\ + \int_{x_0}^x \frac{\partial^i \Delta_n(x-t)}{\partial x^i} \mu(t) dt] + v_i u_j^m(x) \mu(u_j(x)), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5^*)$$

И краевая задача в этом случае свелась к решению начальной, рассмотренной в монографии [2].

Заключение

В последующих работах предполагается исследовать возможности построения для краевых задач интегродифференциальных уравнений с функциональным запаздыванием разрешающих уравнений с обыкновенным аргументом, как это было сделано для начальных задач. В дальнейшем планируется рассмотреть возможности оптимизации нахождения точных или приближенных решений за счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры.

Литература

1. Куликов Н.К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. – М., 1974. – С. 47-57.
2. Шишкин Г.А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра с функциональным запаздыванием. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та. – 2009. – 64 с.

Шишкин Геннадий Александрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: gnshishkin@mail.ru

Shishkin Gennady Alexandrovich, candidate of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics, Buryat State University, e-mail: gnshishkin@mail.ru.

4. Алгебра и геометрия

УДК 513.7

© Б.В. Заятуев

СЕЧЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Показано, что на сечении касательного расслоения [1] может быть естественным образом построена почти эрмитова структура инвариантного типа [2]. Кроме того, найдены условия интегрируемости соответствующей комплексной структуры.

Ключевые слова: касательное расслоение, сечение, почти эрмитова структура.

B.V. Zayatiev

SECTIONS OF TANGENT BUNDLES

It has been shown that on a section of tangent bundle [1] the almost Hermitian structure of invariant type can be naturally constructed [2]. In addition, the integrability conditions of corresponding complex structure have been found.

Keywords: tangent bundle, section, the almost Hermitian structure.

Пусть V – гладкое векторное поле на многообразии M , которое, как известно, можно рассматривать как сечение $\beta_V(M) : M \rightarrow T(M)$ касательного расслоения [1]. Сечение $\beta_V(M)$ может быть рассмотрено как подмногообразие в $T(M)$, заданное локально уравнениями: $x^i = x^i, y^i = V^i(x)$.

Локальный базис $B_{(i)}$ сечения, очевидно, имеет вид

$B_{(i)} : (B_i)^A = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ \partial_i V^h \end{pmatrix}$, относительно локального базиса $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$. Введем также в рассмотрение локальный базис слоев касательного расслоения $C_{(i)}$, где $C_{(i)} : (C_i^A) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $C_{(i)} = \begin{pmatrix} \partial \\ \partial x^i \end{pmatrix}^V$. Базис $\{B_{(i)}, C_{(i)}\}$ называется *адаптированным к сечению $\beta_V(M)$* .

Выразим в адаптированном к сечению (короче AS-) базисе горизонтальный лифт X^H векторного поля X . Имеем $X^H = X^h \frac{\partial}{\partial x^i} - \tilde{A}_i^h X^i \frac{\partial}{\partial y^j} = X^h (B_{(h)} - \partial_h V^k C_{(k)}) - \tilde{A}_i^h X^i C_{(h)} = X^h B_{(h)} - (\nabla_X V)^h C_{(h)}$, т.е.

$$X^H = BX - C(\nabla_X V), \quad (1)$$

где BX – тангенциальная к $\beta_V(M)$ составляющая X^H , $C(\nabla_X V)$ – вертикальная составляющая X^H .

Предложение 1. Горизонтальный лифт X^H касается подмногообразия $\beta_V(M)$ тогда и только тогда, когда $\nabla_X V = 0$.

Связь между AS-базисом, базисом $\{B_{(i)}, C_{(i)}\}$ и адаптированным к

связности базисом $\left\{ e_{(i)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^H, e_{(i)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^V \right\}$ имеет вид

$$\begin{cases} e_i = B_{(i)} - (\nabla_i V)^h C_{(h)}; \\ e_{\bar{i}} = C_{(i)}; \end{cases}$$

и соответственно для двойственных базисов $\{B_{(i)}, C_{(i)}\}$ и $\{e^i, e^{\bar{i}}\}$ –

$$\begin{cases} e^i = B^{(i)}; \\ e_{\bar{i}} = (\nabla_h V^i) B^{(h)} + C^{(i)}. \end{cases}$$

Воспользовавшись этими соотношениями, выразим тензоры \bar{J} и \bar{g} в AS-базисе:

$$\bar{J} = J^i e_i \otimes e^i + J^{\bar{i}} e_{\bar{i}} \otimes e^{\bar{i}} = J^i B_{(i)} \otimes B^{(i)} - J^i \nabla_i V^h C_{(h)} \otimes B^{(i)} + J^i \nabla_h V^j C_{(i)} \otimes B^{(h)} + J^i C_{(i)} \otimes C^{(i)}$$

т.е.

$$J^H : (J^i \nabla_h V^h - J^h \nabla_h V^i J^i_j)$$

Следовательно,

$$J^H(BX) = B(JX) + C(J\nabla_X V - \nabla_{JX} V)$$

Таким образом, имеет место

Предложение 2. Подмногообразие $\beta_V(M)$ инвариантно относительно $\bar{J} = J^H$ тогда и только тогда, когда $J\nabla_X V = \nabla_{JX} V, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

Если $\beta_V(M)$ инвариантно относительно \bar{J} , то определим оператор $J' \in T_1^1(\beta_V(M))$ следующим образом: $J'(BX) = J^H(BX) = B(JX)$.

Очевидно, что J – также почти комплексная структура.

Пусть \bar{N} – тензор Нейенхейса оператора \bar{J} . Тогда

$$\bar{N}(X^V, Y^V) = 0;$$

$$\bar{N}(X^V, Y^V) = (N(X, Y) + 2(\nabla_X Y + \mathcal{N}_X JY + \mathcal{N}_{JX} Y - \nabla_{JX} JY))^V;$$

$$\bar{N}(X^V, Y^V) = (N(X, Y)^H + 2(\gamma R(X, Y) + J^H \gamma R(X, JY) + J^H \gamma R(JX, Y) - \gamma R(JX, JY))$$

где $\gamma R(X, Y) = R(X, Y)y$.

Легко проверить, что если подмногообразиие $\beta_V(M)$ инвариантно относительно \bar{J} , то $N'(BX, BY) = \bar{N}(BX, BY)$, где N' – тензор Нейенхайса оператора J' . Значит,

$$\begin{aligned} N(BX, BY) &= \bar{N}(BX, BY) = \bar{N}(X^H + (\nabla_X V)^V, Y^H + (\nabla_Y V)^V) = \\ &= N(X, Y)^H + 2(\gamma R(X, Y)). \end{aligned}$$

Тем самым доказано

Предложение 3. Если подмногообразия $\beta_V(M)$ инвариантно относительно \bar{J} , то АС-структура J' интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема J и имеет место тождество R_2 .

Для римановой метрики $\bar{g} = (\lambda g_{ij})^V e^i \otimes e^j + (g_{ij})^V e^{\bar{i}} \otimes e^{\bar{j}}$, вычислив ее выражение в АС-базисе, получим:

$$\bar{g} : \begin{pmatrix} \lambda g_{ij} + g_{hk} \nabla_i V^h \nabla_j V^k & g_{hj} \nabla_i V^h \\ g_{ih} \nabla_j V^h & g_{ij} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\bar{g}(BX, BY) = \lambda g(X, Y) + g(\nabla_X V, \nabla_Y V).$$

Обозначим через g^i сужение метрики \bar{g} на подмногообразиие $\beta_V(M)$. В случае, когда $\beta_V(M)$ \bar{J} – инвариантно, с учетом предложения 2 получаем предложение 4.

Предложение 4. Пара $\{J', g^i\}$ – почти эрмитова структура на $\beta_V(M)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}\nabla_X V = \nabla_{JX} V, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

Литература

1. Yano K. and S. Ishihara. Tangent and Cotangent Bundles// New York, Marcel Dekker, INC., 1973, XII.
2. Заятуев Б.В. Об одном примере АН-структуры на касательном расслоении // Матем. заметки. – 2004. – Вып. 5. – Т. 76.

Заятуев Батор Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Бурятского государственного университета. Тел. 8(914) 832-91-95, e-mail: zayatuyev@yandex.ru

Zayatuev Bator Vladimirovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of geometry, Buryat State University. Tel. 8(914) 832-91-95, e-mail: zayatuyev@yandex.ru

5. Математическое моделирование и обработка данных

УДК 532.546

© А.М. Бубенчиков, В.Б. Цыренова, С.Г. Цыдыпов

ДИНАМИКА ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЫ В УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ

Представленная в настоящей работе уравнениями (1) – (2) задача является сложной, в том числе и для численных методов, поскольку в подобластях физической области, являющихся окрестностями $S=0$ и $S=1$, изменяется тип определяющих уравнений. Поэтому была выбрана наиболее универсальная итерационная вычислительная технология, позволившая получить конкретный результат без апелляции к типу исходных уравнений.

Ключевые слова: пористый объем, анизотропная среда, двухфазная фильтрация, влагонасыщенность, капиллярное давление, итерационно-разностная технология.

A.M. Bubenchikov, V.B. Tsyrenova, S.G. Tsydyпов

DYNAMICS OF GAS AND LIQUID MEDIA IN A COAL SEAM

The problem in this work represented by the equations (1)-(2) is complex, including for numerical methods, as a type of governing equations changes in subareas of physical area which are surrounding areas $S=0$ and $S=1$. So, the most universal iterative calculating technology has been chosen, it has allowed to obtain the concrete result without appeal to the type of initial equations.

Keywords: porous volume, anisotropic media, two-phase filtration, moisture saturation, capillary pressure, iterative differential technology.

Проблемы охраны окружающей среды выдвигают в качестве важнейшей задачу исследования миграции загрязненной соленосодержащей воды (флюида) в угольных пластах. Так как угольные пласты являются, как правило, неоднородными и имеют трещиноватую структуру, то требуются новые численные модели, позволяющие учитывать неоднородность и анизотропию пористого скелета, а также пространственный характер движения двухфазной среды в пласте.

Теория двухфазной фильтрации базируется на обобщенном законе Дарси, справедливом для медленной стационарной фильтрации несмешивающихся сред. Согласно обобщенному закону Дарси, неподвижная пористая среда и одна из подвижных фаз рассматриваются как некая фиктивная пористая среда, в которой происходит фильтрация другой фазы. Такая схематизация предполагает, что при медленном стационарном течении формируется равновесное распределение фаз, которое в процессе двухфазной фильтрации сохраняется статистически постоянным. В процессе двухфазной фильтрации формируется фиктивная пористость, состоящая из активных, соединяющихся между собой пор, образующих ка-

налы, по которым происходит движение фаз, и из застойных зон, где фазы неподвижны, или находятся в состоянии медленного циркуляционного движения. Смачивающая и несмачивающая фазы движутся каждая по своей системе каналов. Движение каждой из фаз происходит под действием своего фазового давления, а проницаемость фиктивной пористой среды определяется своей фазовой проницаемостью.

Эти результаты позволяют распространить теорию двухфазной фильтрации на течения в анизотропных средах и указать метод проведения и интерпретации экспериментов для определения коэффициентов в тензорных связях.

В настоящей работе используется математическая модель двухфазной фильтрации в пористых пластах, сформулированная на основе анализа работ [1-4]:

$$\frac{\partial \rho^G m(1-s)}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{K} k_r^G}{\mu^G} \rho^G (\nabla p^G - \rho^G \vec{g}) \right) = q^G ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho^F m s}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{K} k_r^F}{\mu^F} \rho^F (\nabla p^F - \rho^F \vec{g}) \right) = q^F ; \quad (2)$$

$\rho^G = \rho^G(p^G) = \rho^{G,0} \frac{p^G}{p^0}$, где p^0 – атмосферное давление;

$m = m(p^G)$ – пористость ($\frac{V_n}{V}$, V_n – объем пор);

s – эффективная влагонасыщенность (0–1);

\mathbf{K} – тензор проницаемости, в общем случае полнозаполненный;

$k_r^G = \sqrt{1-s} (1-s^2)$ – относительная проницаемость для газовой фазы;

μ^G – вязкость газа;

q^G – источниковый член в балансе газовой фазы;

q^F – источниковый член в балансе жидкости;

$\rho^F = \rho^{F,0} \frac{p^F}{p^0}$, $\rho^{F,0}$ – плотность флюида при атмосферном давлении;

$k_r^F = \sqrt{s} (1 - \sqrt{1-s^2})^2$ – относительная проницаемость для жидкой фазы;

зы;

μ^F – вязкость флюида;

$p^F = p^G - p^c(s)$; $p^c(s) = p^d \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}$ – капиллярное давление;

p^d – пороговое давление, причем $p^d = \frac{\rho^F g}{\alpha}$, где α – параметр, характеризующий пористую среду.

Одномерное приближение

Предельно упростим ситуацию. Примем, что источники отсутствуют, то есть $q^G=q^F=0$. Будем рассматривать одномерное движение, в этом случае $\vec{v} = i \frac{\partial}{\partial x}$, $\text{div} = \frac{\partial}{\partial x}$. Кроме того, примем, что движение происходит в горизонтальном направлении: $(\vec{g})_x = 0$. В этом случае уравнения (1) – (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho^G m(1-s)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^G}{\mu^G} \rho^G \left(\frac{\partial p^G}{\partial x} \right) \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho^F m s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K k_r^F}{\mu^F} \rho^F \left(\frac{\partial p^F}{\partial x} \right) \right), \quad (4)$$

здесь K – коэффициент проницаемости, уже скалярная характеристика.

В уравнениях (3), (4) перейдем к давлениям p^G, p^F . Для этого заменим ρ^G и ρ^F , входящие в левые части этих уравнений, по следующим формулам:

$$\rho^G = \frac{\rho^{G,0}}{p^0} p^G, \quad \rho^F = \frac{\rho^{F,0}}{p^0} p^F. \quad (5)$$

В результате получим два уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial p^G \alpha^G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial p^F \alpha^F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta^F \frac{\partial p^F}{\partial x} \right), \quad (7)$$

$$\alpha^G = m(1-s) \frac{\rho^{G,0}}{p^0}, \quad \alpha^F = m s \frac{\rho^{F,0}}{p^0}, \quad \beta^G = K \frac{\rho^{G,0}}{p^0} \frac{k_r^G}{\mu^G} p^G, \quad \beta^F = K \frac{\rho^{F,0}}{p^0} \frac{k_r^F}{\mu^F} p^F, \quad (8)$$

p^0 – атмосферное давление, $\rho^{G,0}$ – плотность газа при атмосферном давлении, $\rho^{F,0}$ – плотность жидкости при атмосферном давлении.

Итерационно-разностный алгоритм

Вернемся теперь к уравнениям (6), (7). Решение этой системы разберем на примере уравнения (6):

$$\frac{\partial p^G \alpha^G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Построим алгоритм решения этого уравнения с помощью итерационного подхода. Предварительно строим полностью неявную разностную схему для уравнения (9), которая по опыту решения задач теплопроводности и диффузии должна быть абсолютно устойчивой.

Аппроксимируя пространственные производные простейшими разностями на неравномерной сетке, а производную по времени разностями назад, найдем:

$$a_e p_{j-1}^G - a_p p_j^G + a_w p_{j+1}^G + b = 0, \quad (10)$$

где

$$a_e = \frac{2\beta_{j-\frac{1}{2}}^G}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})}, \quad a_w = \frac{2\beta_{j+\frac{1}{2}}^G}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)}, \quad (11)$$

$$a_p = a_e + a_w + \frac{\alpha_j^G}{\Delta t}, \quad b = \frac{(\alpha_j^G)^{n-1} (p_j^G)^{n-1}}{\Delta t}. \quad (12)$$

Коэффициенты в этом разностном уравнении определены на новом слое по времени, но с использованием значений на предыдущей итерации.

Выражая из (10) p_j^G , найдем

$$p_j^G = \frac{a_e p_{j-1}^G + a_w p_{j+1}^G + b}{a_p}, \quad (j = 2, \dots, N-1). \quad (13)$$

Заметим, что при вычислении источника b необходимо помнить значения величин на предыдущем слое по времени (обозначены верхним индексом $n-1$).

Расчет с использованием итерационно-разностной технология (ИРТ) нами выполняется следующим образом:

- 1) задаем начальные распределения давлений (газовой и жидкой фаз) по всей области;
- 2) с помощью граничных условий вычисляем значения плотностей на концах трубы на новом слое по времени;
- 3) используя (13), последовательно перевычисляем давление во внутренних узлах расчетной области. Когда перебор точек по индексу j закончен, считаем одну глобальную итерацию завершенной;
- 4) делаем порядка N глобальных итераций. После этого считается законченным расчет на очередном слое по времени;
- 5) далее осуществляется переход к новому слою по времени, то есть возвращаемся к пункту 2.

Этот ИРТ-алгоритм (разностная аппроксимация производных, движение по пространственному индексу j и последующие глобальные итерации) легко обобщается на плоский случай. При этом формула расчета давления будет выглядеть следующим образом:

$$p_{j,k}^G = \frac{a_e p_{j-1,k}^G + a_w p_{j+1,k}^G + a_s p_{j,k-1}^G + a_n p_{j,k+1}^G + b}{a_p}, \quad (14)$$

где

$$a_p = a_e + a_w + a_s + a_n + \frac{\alpha_{j,k}^G}{\Delta t}, \quad b = \frac{(\alpha_{j,k}^G)^{n-1} (p_{j,k}^G)^{n-1}}{\Delta t}, \quad (15)$$

а также на пространственный случай

$$p_{j,k,l}^G = \frac{a_e p_{j-1,k,l}^G + a_w p_{j+1,k,l}^G + a_s p_{j,k-1,l}^G + a_n p_{j,k+1,l}^G + a_b p_{j,k,l-1}^G + a_t p_{j,k,l+1}^G + b}{a_p}. \quad (16)$$

Здесь

$$a_p = a_e + a_w + a_s + a_n + a_b + a_t + \frac{(\alpha_{j,k,l}^G)^{n-1}}{\Delta t}, \quad b = \frac{(\alpha_{j,k,l}^G)^{n-1} (p_{j,k,l}^G)^{n-1}}{\Delta t}. \quad (17)$$

При этом a_e и a_w будут определяться формулами (11), а для a_s , a_n , a_b , a_t будем иметь

$$a_s = \frac{2\beta_{k-\frac{1}{2}}^G}{(y_{k+1} - y_{k-1})(y_k - y_{k-1})}, \quad a_n = \frac{2\beta_{k+\frac{1}{2}}^G}{(y_{k+1} - y_{k-1})(y_{k+1} - y_k)}, \quad (18)$$

$$a_b = \frac{2\beta_{l-\frac{1}{2}}^G}{(z_{l+1} - z_{l-1})(z_l - z_{l-1})}, \quad a_t = \frac{2\beta_{l+\frac{1}{2}}^G}{(z_{l+1} - z_{l-1})(z_{l+1} - z_l)}. \quad (19)$$

Здесь у диффузионного коэффициента β для простоты записи целые индексы опущены, а значения этого коэффициента в дробной точке определяются как полусумма значений в целых точках, например,

$$\beta_{k-\frac{1}{2}}^G = \frac{\beta_k^G + \beta_{k-1}^G}{2}.$$

С помощью (16) – (19) можно решать все задачи двухфазной фильтрации в однородных анизотропных пластах.

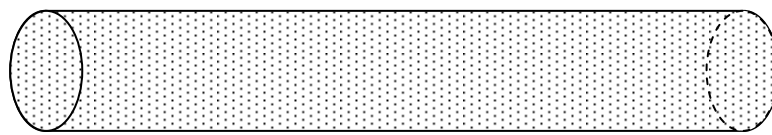
С использованием описанной математической модели были решены тестовые задачи однофазной фильтрации, а также одномерная задача двухфазной фильтрации, а именно, рассчитано течение газожидкостной среды в трубе, заполненной пористым материалом. Кроме этого, получено решение плоских задач двухфазной фильтрации.

Тестирование алгоритма при постоянной насыщенности

Вычисления проводились при следующих значениях определяющих параметров:

$$\begin{aligned} L &= 6 \text{ м} - \text{длина трубы}; \\ \rho^F &= 1000 \text{ кг/м}^3; \quad \rho^{G,0} = 1,27 \text{ кг/м}^3; \\ K &= 9,869233 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \\ \mu^F &= 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ Па}\cdot\text{с}; \quad \mu^G = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}. \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать движение газожидкостной среды в трубе, заполненной пористым материалом, например, песком ($m = 0,4$).



$$s = 0,8;$$

$$p_{\text{вх}}^G = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$s = 0,3;$$

$$p_{\text{вых}}^G = 10^5 \text{ Па}.$$

Рис. 1. Одномерная область двухфазной фильтрации

В случае постоянной насыщенности уравнение для давления газа принимает вид квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial p^G}{\partial t} = \frac{Kk_r^G(s)}{\mu^G m(1-s)} \frac{\partial}{\partial x} \left(p^G \frac{\partial p^G}{\partial x} \right). \quad (20)$$

На рис. 2 представлены результаты решения этого уравнения рассматриваемым численным методом. В случае установившегося течения, когда $\frac{\partial p^G}{\partial t} = 0$, решение легко находится аналитически. На графике аналитическое решение практически совпадает с численным, что говорит о корректности применения рассматриваемого численного метода для решения данных уравнений.

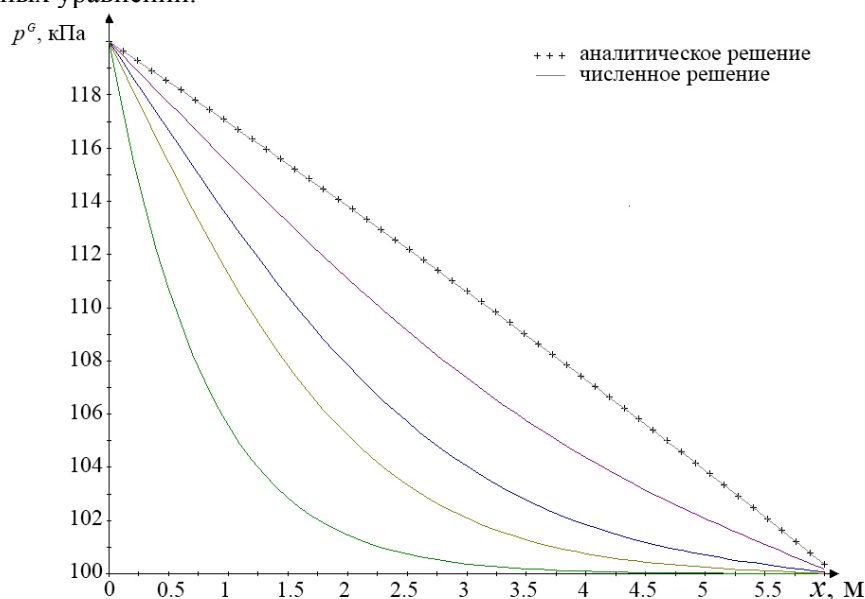


Рис. 2. Распределение давления газа по длине трубы в разные моменты времени

В рассматриваемом примере влага поступает с левого конца трубы за счет скачкообразного увеличения насыщенности в этой части канала от значения $s=0,3$ до значения $s=0,8$. Поэтому профиль давления газа, зна-

чально имеющий вид «левого нижнего уголка», постепенно деформируется в почти линейное распределение.

Численный эксперимент

При указанных выше параметрах проводился численный эксперимент, отслеживающий динамику развития течения в трубе, заполненной пористым материалом. Были получены распределение давления флюида и газа и распределение насыщенности флюидом пористого пространства с течением времени, представленное на рис. 3. Полученные результаты позволяют анализировать течение и характер заполнения пористого пространства.

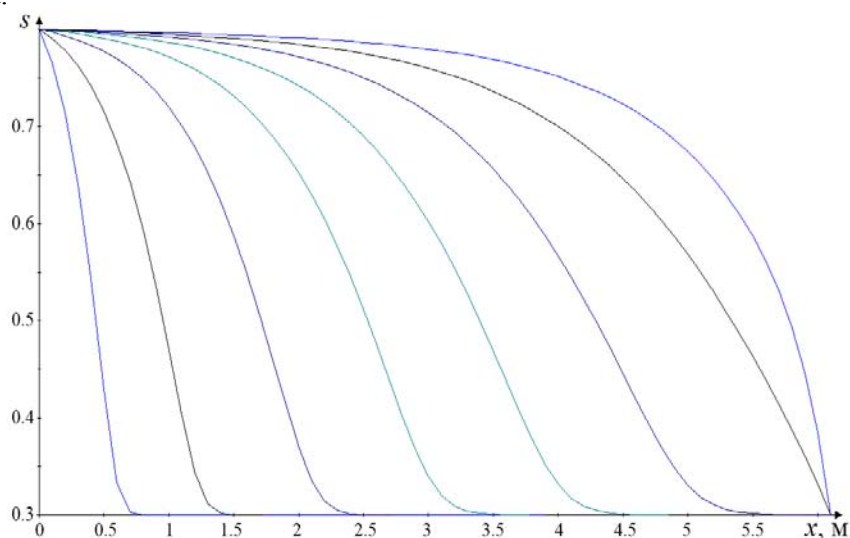


Рис. 3. Распространение волны насыщенности по объему пористого пространства

Как видно из рис. 3, наблюдается волновой механизм распространения насыщенности по пористому пространству трубы. Причем зона изменения насыщенности с течением времени увеличивается. Характерная выпукло-вогнутая форма ее распределения со временем становится более простой и к моменту, определяющему установившееся состояние течения, кривая $s = s(x)$ имеет вполне определенный знак кривизны.

Литература

1. Shikuo C., Tianhong Y., Chenhui W. Displacement Mechanism of the Two-Phase Flow Model for Water and Gas Based on Adsorption and Desorption in Coal Seams // Materials of Int. Symposium on Multi-field Coupling Theory of Rock and Soil Media and Its Applications, Chengdu City, CHINA. – 2010. – P. 597-603.
2. Van Genuchten M.Th. A closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils / M. Th. van Genuchten // Soil Sci. Soc. Am. J. – 1980. – Vol. 44. – P. 892-898.

3. Schaap M.G., Genuchten M. Th. van. A modified Mualem–van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation // Vadose Zone J. – 2006. – Vol. 5. – P. 27-34.

4. Никитин К.Д. Метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии и моделей двухфазных течений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 2010. – 105 с.

Бубенчиков Алексей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики ММФ Томского государственного университета, e-mail: Aleksy121@mail.ru

Цыренова Валентина Бабасановна, доцент, доктор педагогических наук, заведующий кафедрой геометрии Бурятского государственного университета, e-mail: v.ts@mail.ru

Цыдыпов Севан Гуро-Цыренович, преподаватель кафедры информационных технологий Бурятского государственного университета, e-mail: sivan77@mail.ru

Bubenchikov Aleksey Mikhailovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of theoretical mechanics, MMF Tomsk State University, e-mail: Aleksy121@mail.ru

Tsyrenova Valentina Babasanovna, doctor of pedagogical sciences, head of the department of geometry, Buryat State University, e-mail: v.ts@mail.ru

Tsydyпов Sevan Guro-Tsyrenovich, teacher, department of information technologies, Buryat State University, e-mail: sivan77@mail.ru

© *Ж.Г. Дамбаев*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВЗРЫВЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В РЯД

Представлены результаты численного решения задачи взрыва системы зарядов, расположенных в ряд. Демонстрируется технология шадящего взрывания модельных и натуральных экспериментов.

Ключевые слова: математическое моделирование, взрыв системы зарядов.

Zh.G. Dambaev

MATHEMATICAL MODELING OF VOLTAGES WAVES INTERACTION AT EXPLOSION OF CHARGES SYSTEM ARRANGED IN A ROW

In this work the results of numerical solution of the problem of explosion of charges system arranged in a row are presented. A technology of sparing explosion of model and field experiments has been shown.

Keywords: mathematical modeling, explosion of charges system.

Постановка задачи

Для решения задачи взрыва системы зарядов, расположенных по линии, применяется численный метод решения уравнений динамической теории упругости. Рассмотрим взаимодействие волн напряжений между

смежными цилиндрическими зарядами (полостями) с соответствующими граничными условиями, т.е. как показано на рис. 1.

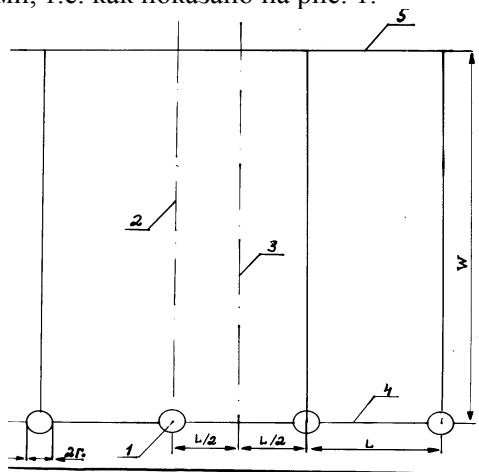


Рис. 1. Схема расположения цилиндрических зарядов

1 – цилиндрическая полость; 2 – ось симметрии между системами цилиндрических полостей; 3 – ось симметрии между двумя соседними (смежными) цилиндрическими полостями; 4 – ось симметрии между отбиваемым блоком и массивом горной породы; 5 – граница свободной поверхности.

Для численного решения данной задачи используются уравнения движения механики деформируемого твердого тела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

а также обобщенный закон Гука и уравнения Коши:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_y; \\ \tau_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}; \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y,$$

где σ_x, σ_y – компоненты напряжений по осям X и Y; τ_{xy} – касательное напряжение; U, V – компоненты вектора смещения по осям X и Y; t – время; ρ – плотность горной породы; λ, μ – упругие константы Лямэ [1].

Граничные условия:

$$\sigma_x \Big|_{x=r_0} = -P(t), \quad \sigma_y \Big|_{y=r_0} = -P(t) \quad \text{– на стенке зарядной камеры (позиция 1 на рис.1), где } r_0 \text{ – радиус зарядной полости, } P(t) \text{ – давление в зарядной полости;}$$

$\sigma_y \Big|_{y=W} = 0, \quad \tau_{xy} \Big|_{y=W} = 0$ – на свободной поверхности (позиция 5 на рис.1);

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \frac{L}{2} \quad \text{– при взаимодействии волн напряжений между смежными зарядными полостями, т.е. на оси симметрии (позиции 2, 3 на рис. 1), где } L \text{ – расстояние между зарядными полостями;}$$

$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ при $y = 0$ – по линии расположения зарядов (позиция 4 на рис. 1).

Для решения уравнений гиперболического типа использовались разностные схемы типа «крест» с использованием нецентральной схемы Макормака. Этот метод дает хорошие результаты при расчете движений сплошной среды, а динамический процесс интерференций волн напряжений близок к реальной картине.

В настоящее время подробно исследован вопрос для мгновенного создания давления в полости зарядной камеры, т. е. при стационарном давлении [2].

При взрыве в горной породе динамическая нагрузка внутри зарядной камеры, т.е. граничные условия с учетом изменения давления во времени, моделируется следующим образом:

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{P_0}{t_*} \cdot t, & 0 \leq t \leq t_*, \\ P_0, & t_* \leq t \leq t_k \end{cases}, \quad (3)$$

где t – текущее время; t_* – время нарастания давления (оптимизирующий параметр); t_k – конечное время; P_0 – максимальное давление.

Результаты численного расчета напряженного состояния по линии расположения зарядов и в ортогональных направлениях представлены при $t_* = 0, 3t_1, 6t_1$, где $t_1 = \frac{L}{2c_p}$, c_p – скорость продольных волн в горной породе. На рис. 2 показаны эпюры растягивающих напряжений с областями разрушения законтурного массива (вокруг зарядных камер), где заштрихованными областями указаны зоны разрушения и жирными линиями показаны трещины.

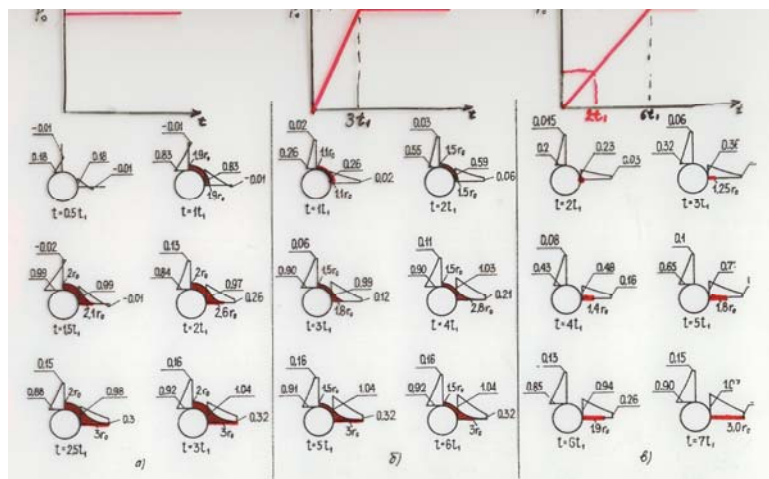


Рис. 2. Эпюры максимальных растягивающих напряжений P_0

а) $t_* = 0$; б) $t_* = 3t_1$; в) $t_* = 6t_1$

На рис. 2а представлены результаты расчетов эпюр растягивающих напряжений при $t_* = 0$ и при $t < t_1$ симметричное распространение расходящихся цилиндрических волн напряжений вокруг зарядных полостей, а при $t > t_1$ нарушается симметричность волн напряжений и образуется асимметрия. В результате интерференции волн напряжений между смежными зарядами формируется увеличение растягивающих напряжений по линии расположения, и при $t > 3t_1$ уменьшается растягивающее напряжение в ортогональных направлениях, т.е. формируется перераспределение эпюр растягивающихся напряжений вокруг зарядных полостей.

При изменении формы импульса взрыва (рис. 2 б), когда время нарастания составляет $t_* = 3t_1$, имеет место уменьшение главных компонент напряжений в ортогональных направлениях, проявляющееся при $t > 3t_1$ некоторое снижение уровня напряжений в ортогональных направлениях и увеличение растягивающей компоненты напряжений по линии расположения зарядов. В этом случае наблюдается снижение разрушающего действия вокруг зарядных полостей и появляется возникновение асимметричных полей напряжений в меньшей степени.

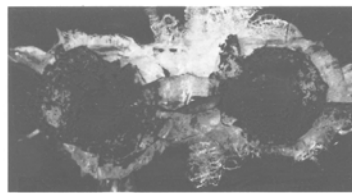
Дальнейшее увеличение времени t_* нарастания давления принципиально не меняет характера распределения напряжений (рис. 2 в), однако асимметрия поля напряжений проявляется в еще меньшей степени. При оптимизации динамических нагрузок необходимо появление эффекта зарождения (старт) радиальных трещин по линии расположения зарядов и тем самым увеличивается вероятность сохранности законтурного массива [3].

Численные результаты (рис. 2) подтверждают, что режим взрывного нагружения массива горных пород существенно влияет на процесс формирования динамического напряженно-деформированного состояния массива и результаты нарушенности законтурного массива представлены:

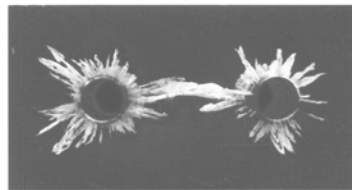
- по первой схеме – мгновенное взрывчатое превращение, т.е. когда давление выравнивается мгновенно во всем объеме зарядной камеры;
- по второй схеме – медленное взрывчатое превращение, связанное с кинетикой разложения, т.е. когда заряд взрывчатого вещества детонирует также мгновенно, но еще сказывается скорость нарастания давления продуктов взрыва в зарядной камере;
- по третьей схеме – имеет место еще более медленное взрывчатое превращение, чем в предыдущем случае. При этом процесс определяется кинетикой взрывчатого превращения.

Учитывая, что для крепких горных пород (гранит, мрамор) критические растягивающие напряжения в 10–12 раз меньше, чем критические сжимающие напряжения, то для сохранности законтурного массива необходимо, чтобы давление в зарядных камерах не превышало предела прочности на сжатие.

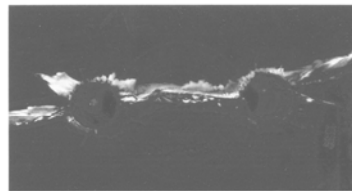
На рис. 3 представлены результаты модельных экспериментов, где показана качественная картина разрушения вокруг зарядных камер при различных воздействиях динамических нагрузок.



а)



б)



в)

Рис. 3. Образцы после воздействия при различных режимах взрывного нагружения

На рис. 4 представлены натурные эксперименты добычи блочного камня.

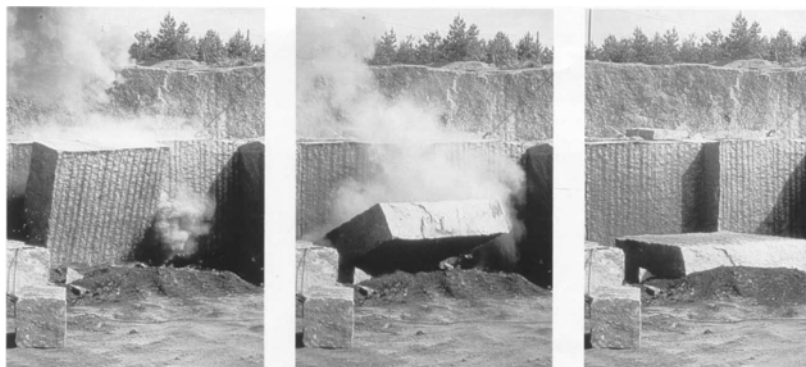


Рис. 4. Качественная картина добычи блочного камня

Основные результаты:

1) показано, что асимметричное поле напряжений вокруг зарядных полостей формируется за счет взаимодействия волн напряжений между смежными зарядами и эффект увеличения растягивающихся напряжений по линии расположения зарядных камер;

2) установлено, что при увеличении начальной фазы импульса взрыва в полости зарядных камер более вероятно проявляется эффект зарождения направленной радиальной трещины по линии расположения зарядов, т.е. за счет создания критической асимметрии растягивающих напряжений.

3) демонстрируется технология щадящего взрывания модельных и натуральных экспериментов, где показаны качественные результаты добычи строительных материалов.

Литература

1. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. – Новосибирск: Наука, 1979. – 271 с.
2. Механический эффект подземного взрыва / В.Н. Родионов и др. – М.: Недра, 1971. – 284 с.
3. Дамбаев Ж.Г. Управление энергией взрыва для направленного разрушения твердых тел. ВНИМИ. – Санкт-Петербург, 1999. – 120 с.
4. Ковалевский В.Н., Дамбаев Ж.Г. К методике расчета оптимального расстояния между смежными удлиненными зарядами при добыче блоков природного камня // Взрывное дело. – 2012. №108-65. – С. 101-106.

Дамбаев Жаргал Гомбоевич, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией методов оптимального управления НОИЦ СИА. Тел.(3012)221215, e-mail: g.dambaev@rambler.ru

Dambaev Zhargal Gomboevich, doctor of technical sciences, professor, head of the laboratory of methods of optimal management SEIC SRA. Tel. (3012)221215, e-mail: g.dambaev@rambler.ru

УДК 539.3

© *М.Ю. Орлов, Ю.Н. Орлова, Е.Ю. Повереннов***КОМПЛЕКСНОЕ ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ЛЬДА
ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ. РАСЧЕТ ПРОЦЕССА ВНЕДРЕНИЯ
УДЛИНЕННЫХ УДАРНИКОВ В ЛЕД**

Работа выполнена при поддержке РФФИ 13-08-90719, 13-08-00509, 13-08-00296

Впервые представлены результаты численных исследований процесса внедрения удлиненных ударников с различной формой головных частей в ледяную пластину в дозвуковом диапазоне начальных скоростей. Детально исследован процесс деформирования и разрушения льда при внедрении ударников с оживальной, конической и плоской головными частями.

Ключевые слова: лед, модель, метод, деформация, разрушение, ударник, внедрение.

М. Yu. Orlov, Yu. N. Orlova, E. Yu. Poverennov

COMPLEX THEORETICAL-EXPERIMENTAL STUDY ON BEHAVIOR OF POLYCRYSTALLINE ICE UNDER DYNAMIC LOADS. CALCULATION OF PENETRATION PROCESS OF ELONGATED STRIKERS IN ICE

The results of numerical studies on the process of penetration of elongated strikers with various forms of head parts in ice plate in the subsonic range of initial velocities have been submitted for the first time. The process of deformation and destruction of ice at penetration of the strikers with ogival, conic and flat head parts has thoroughly been studied.

Keywords: ice, model, method, deformation, destruction, striker, penetration.

Введение

В настоящее время актуальным является изучение поведения морского и пресноводного льда при динамических нагрузках. РФ входит в пятерку ледовых стран, поэтому существует необходимость развития транспортных связей и увеличение добычи полезных ископаемых на Крайнем Севере. Острой все еще остается проблема заторов на сибирских реках, длина которых может достигать более 150 км.

Основная сложность исследований была определена в прошлом веке в пионерских работах Мальгрема, Канна, Маэно, Богородского и заключается в том, что такой древнейший природный материал как лед (сегодня известно более 15 его разновидностей) мало изучен в условиях динамического нагружения. Это объясняется сложной внутренней структурой, особенностями кристаллической решетки, аномальными пластическими свойствами, многократными фазовыми переходами в процессе деформации и т.д. С точки зрения разрушения лед вообще может не иметь аналогов.

Ежегодно по «ледовой» тематике в печать выходит более тысячи статей (данные сети Интернет), однако полноценных работ по изучению его поведения в условиях динамического нагружения совсем немного. На конец 2013 г. известно, что такими исследованиями занимаются группы ученых как в нашей стране, так и за ее пределами в ведущих научных центрах планеты.

В РФ постоянно ведутся работы в ФГУП «ЦНИИ им. А.Н. Крылова», ААНИИ, ВНИИ им. Б.Е. Веденева (Санкт-Петербург), ИПМ им. А.Ю. Ишлинского (Москва), НИ ННГУ им. Н.И. Лобачевского (Н.Новгород), РФЯЦ-ВНИИ ЭФ (Саров), ИГ им. М.А. Лаврентьева, ИГД им. Н.А. Чалакала, ИТПМ СО РАН им. С.А. Христиановича (Новосибирск), НИ ТГУ, НИ ТПУ (Томск), ИВМ СО РАН (Красноярск), ИММ ДВО РАН (Комсомольск-на-Амуре), ЯГУ (Якутск), ДФУ (Владивосток) и др. За рубежом проводятся исследования в следующих организациях: Columbia University, University of California, Mississippi State University, NASA, Harvard University, Cambridge, Los Alamos National Laboratory, Clarkson University, Purdue University (США), Chevron Resources, Canadian Hydraulics Centre, National Research Council of Canada, Institute for Ocean

Technology, Memorial University of Newfoundland (Канада), Norwegian University of Science and Technology (NTNU) (Норвегия), Institute for Snow and Avalanche Research (Швейцария), Cranfield University (Великобритания), SICOMP (Sweden), Dalian University of Technology (Китай), Nagoya University (Япония), Universite de Lyon (Франция), National University of Singapore (Сингапур), Technical University of Catalonia (Испания), Indian Institute of Science (Индия) и т.д.

Анализ научно-технической литературы указывает на то, что в настоящее время актуальны новые адекватные модели и методы расчета динамического нагружения льда, при помощи которых возможно детально исследовать поведение этого сложнейшего материала в труднодоступной для физического эксперимента области. Для углубления знаний в области современной механики разрушения льда большой практический интерес представляют натурные и физические эксперименты по ударно-взрывному нагружению льда.

1. Физико-математическая модель и метод динамического нагружения поликристаллического льда

Описание поведения льда при динамических нагрузках проводится с позиции феноменологической макроскопической теории механики сплошных сред на основе фундаментальных законов сохранения. Лед моделируется упруго-пластической, пористой, сжимаемой средой с учетом свойств прочности, ударно-волновых явлений, а также совместного образования отрывных и сдвиговых разрушений. Упруго-пластическое течение задается уравнениями Прандтля–Рейса при условии текучести Мизеса. Уравнение состояния выбрано в форме Уолша, основным достоинством которого является широкая доступность постоянных. Действие взрывного нагружения задается в приближении модели мгновенной детонации заряда взрывчатого вещества (ВВ). Уравнение состояния продуктов детонации описывается политропой Ландау – Станюковича [1].

В качестве основного инструмента исследований использован модифицированный лагранжев метод, расчетная часть которого дополнена механизмами расщепления расчетных узлов и разрушения расчетных элементов. Оригинальность метода заключается в новом способе выделения поверхностей разрыва сплошности материалов, который не накладывает серьезных ограничений на решение современных динамических многоконтактных задач МДТТ. В процессе счета допускается появление новых свободных поверхностей, в том числе разделяющих взаимодействующие тела на отдельные фрагменты [2].

Для двумерного плоского и осесимметричного случая разработан пользовательский многофункциональный программный комплекс решения динамических многоконтактных задач МДТТ, позволяющий в интерактивном режиме подготавливать начальные данные, включая автоматическое разбиение расчетной области, осуществлять расчет в консольном режиме, а также проводить графическую и табличную обработку полу-

ченных результатов. (Св-ва о государственной регистрации программ для ЭВМ 2010610912 от 21.01.2010 г. и №2010610911 от 28.01.2010 г.) [3].

Достоверность результатов численного моделирования установлена путем решения ряда тестовых задач и сравнением с известным аналитическим решением, а также экспериментальными данными. Экспериментальные данные были получены на уникальном баллистическом стенде с высокоточными приборами регистрации в НИИ прикладной математики и механики. Отдельные эксперименты специально были проведены в ЦНИИ им. А.Н. Крылова (Санкт-Петербург). Результаты физических экспериментов представлены в [4].

2. Исследование процессов динамического нагружения поликристаллического льда

В НИИ прикладной математики и механики Томского госуниверситета более 25 лет ведутся поисковые научно-исследовательские работы, предметом изучения которых является напряженно-деформированное состояние льда и ледяного покрова с учетом эволюции деформационных картин и областей его разрушения. Следует отметить, что последние экспериментальные исследования ударного нагружения льда проведены в работе [5].

В [6] исследовано влияние заглупления ВВ во льду на процесс его деформации и разрушения. В данной задаче лед располагался на воде. Толщина ледяной пластины – 250 см. Масса безоболочечного заряда ВВ равна 4,8 кг. Расчетным путем установлено, что диаметр образовавшейся вследствие действия продуктов детонации майны достигал 150 см. Объем разрушенного льда приближался к 40%. Было рекомендовано для наиболее эффективного разрушения льда закладывать ВВ в середине пластины.

3. Исследование процесса внедрения удлиненных ударников в толстую ледовую пластину

Впервые было исследовано внедрение ударников различной формы головных частей в толстую ледяную пластину в дозвуковом диапазоне начальных скоростей. Рассмотрены ударники, одинаковые по массе и диаметру, с оживальной, конической и плоской головными частями (ОГЧ, КГЧ и ПГЧ). Цель исследований заключалась в выявлении влияния головной части ударников на процесс деформирования и разрушения поликристаллического льда.

Объект исследования – пластина пресноводного льда размерами в сечении 20×20 мм. Физико-механические характеристики льда приведены в [4]. Предмет исследования – напряженно-деформированное состояние льда с учетом эволюции деформационных картин и областей его разрушения.

В процессе счета исследованы деформационные картины и области разрушения льда, рассчитано время процесса внедрения t_k , глубина вне-

дрения ударников L_k и диаметр образовавшегося во льду кратера D_k , объем поврежденности льда D_{ice} , а также гидростатическое давление (P) и тангенциальные напряжения S_{Tz} в контрольных точках.

Анализ деформационных картин и областей разрушения льда при действии ударников выявил следующие закономерности (рис. 1). Установлено, что первые очаги разрушения образуются вследствие действия растягивающих напряжений в зоне контакта «ударник – лед» уже на 2 мкс процесса. Процесс внедрения сопровождался уплотнением льда на начальных стадиях и выплеском с приповерхностных слоев. В процессе внедрения формировались зоны разрушения на оси симметрии и вблизи тыльной границы пластины. В последнем случае очаги разрушения были слабыми, едва заметными. Получено, что при действии ударника с ПГЧ объем разрушений в приконтактной области был наибольший.

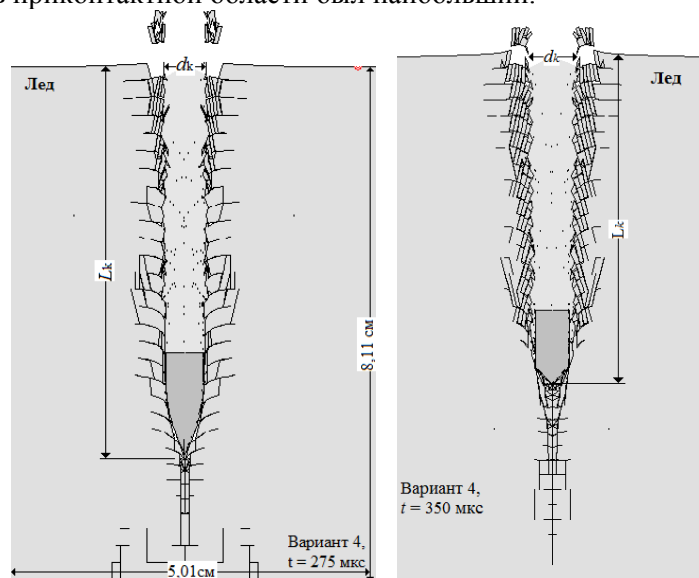


Рис. 1. Фрагменты рассчитанных конфигураций «ударник – лед»

Зависимость глубины внедрения ударника с ОГЧ от времени проиллюстрирована на рис. 2. В случае внедрения ударников с КГЧ и ПГЧ поведение кривых было аналогичным. Установлено, что с увеличением начальной скорости ударника увеличивается глубина его внедрения. Вначале процесса взаимодействия ударник внедрялся намного быстрее, чем в конце. Отмечено, что в последних вариантах глубина внедрения ударников почти в пять раз превышала их высоту.

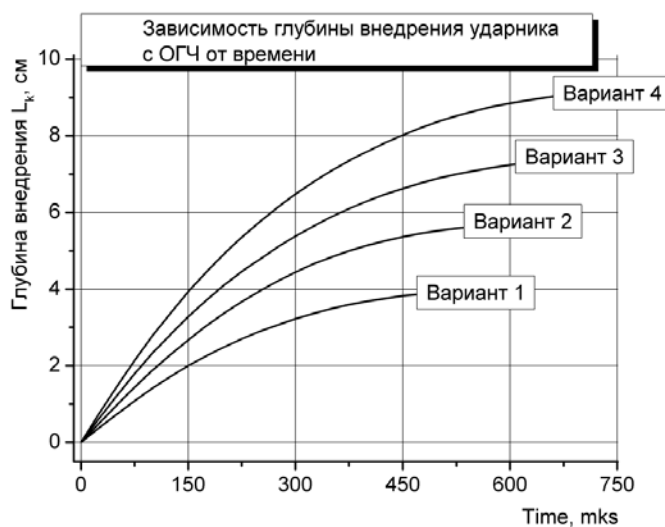


Рис. 2. Зависимость глубины внедрения ударника с ОГЧ от времени

Детальный анализ временных зависимостей скорости ударников от времени показал, что процесс внедрения протекал по линейному закону. На некоторых участках кривые были параллельны друг другу. Установлено, что при внедрении ударника с КГЧ и ПГЧ кривые для вариантов 2 и 3, а также 3 и 4 пересекались на конечных стадиях процесса.

На рисунке 3 показаны зависимости параметра поврежденности льда от времени при внедрении ударника с КГЧ. Параметр поврежденности впервые был предложен в [4].

Таким образом, основной объем разрушений формировался во льду в начале процесса внедрения, а на некоторых участках кривые совпадали. С увеличением начальной скорости объем разрушений во льду рос, но оставался незначительным. Видно, что в конце процесса внедрения кривые были параллельны друг другу. При внедрении ударников с ОГЧ и КГЧ характер кривых был аналогичным. При внедрении ударника с ПГЧ на кривых наблюдалась «ступенька», присутствие которой объясняется развитием зоны разрушений в приконтактной области.

Дальнейший анализ показал, что скорость поврежденности достигала своего максимума в начале процесса внедрения в интервале 65–225 мкс. В указанном интервале наблюдалось несколько локальных максимум скорости.

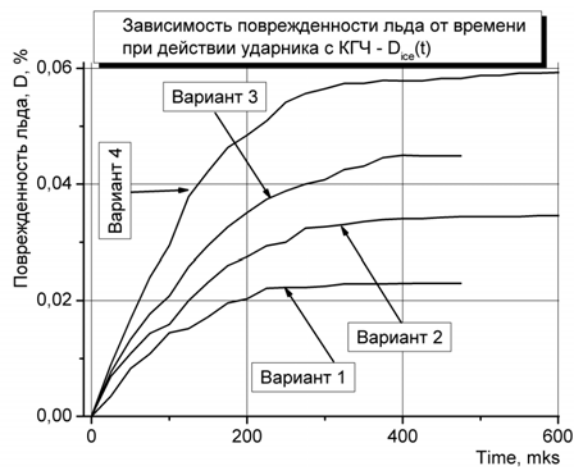
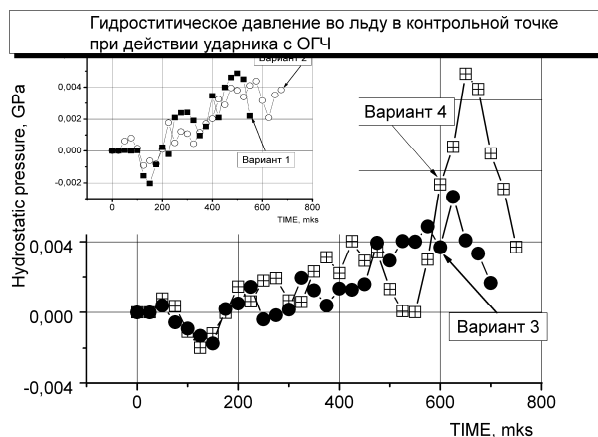


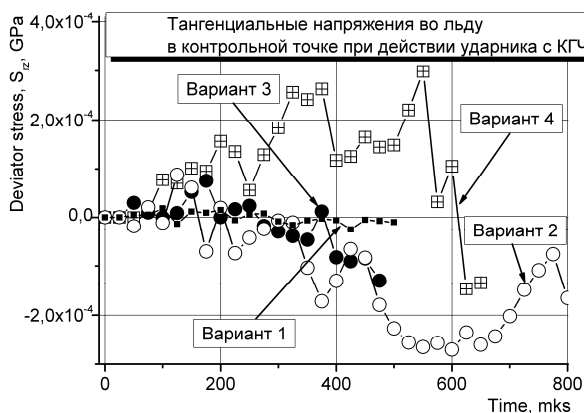
Рис. 3. Зависимость поврежденности льда от времени

Возможность иметь наиболее полную информацию о напряженно-деформированном и термодинамическом состоянии позволила рассчитать временные зависимости гидростатического давления и тангенциальных напряжений в контрольной точке. Контрольная точка была выбрана во льду на оси симметрии в середине пластины (глубина 10 см).

На рис. 4 а, б показаны графические зависимости гидростатического давления и тангенциальных напряжений во льду при внедрении ударника с ОГЧ и ПГЧ.



а)



б)

Рис. 4. Компьютерная визуализация результатов расчетов
 а) зависимость гидростатического давления от времени;
 б) зависимость тангенциального напряжения от времени.

Видно, что давление во льду растет в течении всего процесса внедрения. Установлено, что с ростом начальной скорости ударника давление во льду также увеличивается из отрицательной области после 100 мкс. Максимальное давление зафиксировано в варианте 4 и составило 0,013 ГПа.

Рассчитано, что напряжение во льду практически на порядок меньше, чем давление. На всех кривых имеются колебания, которые объясняются волновым характером деформационного процесса. Максимальное тангенциальное напряжение также зафиксировано в варианте 4. Кривые для вариантов 1, 2 и 3 практически полностью находятся в отрицательной области. Большую часть процесса внедрения кривая 1 стремилась к нулю.

Результаты расчетов

В таблице приведены результаты расчетов процесса нормального внедрения ударников с различной формой головной частью (ОГЧ, КГЧ, ПГЧ).

Таблица

Результаты расчетов процесса внедрения ударников с различной формой головных частей в лед

	V_0 , [м/с]	L_k , [см]	D_{ice} , [%]	t_k , [мкс]	D_k , [см]
Ударник с ОГЧ					
Вариант 1	150	3,92	2,73	565	0,64
Вариант 2	200	5,69	3,68	640	0,66
Вариант 3	250	7,42	5,44	715	0,75

Вариант 4	300	9,19	6,00	840	0,75
Ударник с КГЧ					
Вариант 1	150	2,58	2,3	470	0,82
Вариант 2	200	3,96	3,7	520	0,82
Вариант 3	250	5,12	4,49	555	0,79
Вариант 4	300	6,35	6,12	565	0,84
Ударник с ПГЧ					
Вариант 1	150	2,09	1,82	330	0,83
Вариант 2	200	3,29	2,48	419	0,87
Вариант 3	250	4,71	4,03	470	0,78
Вариант 4	300	5,43	4,05	500	0,75

Выявлено, что процесс внедрения ударников протекал по линейному закону без разрушения его материала. В процессе внедрения ударников с ростом начальной скорости отмечено увеличение глубины внедрения. Наибольшие значения отмечены при внедрении ударника с ОГЧ, а наименьшие – при внедрении ударника с ПГЧ. Максимальная глубина внедрения зафиксирована при внедрении ударника с ОГЧ в варианте 4, а минимальная – при внедрении ударника с ПГЧ в варианте 1. Результаты являются предсказуемыми и соответствуют физике процесса.

Объем поврежденного льда являлся незначительным. Объем разрушений формировался в основном за счет областей разрушения льда в зоне контакта «ударник – лед» в начале процесса. При внедрении ударников с ОГЧ и КГЧ кривые поврежденности льда были подобными. При внедрении ударника с ПГЧ на кривых имелись отличия, которые можно объяснить развитием областей разрушений вне зоны контакта ударника и льда. Скорость поврежденности достигала своего максимума на начальных стадиях процесса (после полного внедрения ударника в лед). Установлено, что позже всех максимум скорости фиксировался при внедрении ударника с ОГЧ, а раньше – при внедрении ударника с ПГЧ.

Получено, что время процесса внедрения ударников увеличивалось с ростом их начальной скорости, но не выходило из микросекундного диапазона. Максимальное время процесса внедрения зафиксировано при внедрении ударника с ОГЧ в варианте 4. Минимальное время внедрения получено при внедрении ударника с ПГЧ в варианте 1. Получено, что расчетное время внедрения ударника ОГЧ в лед при начальной скорости 150 м/с совпадало с временем внедрения ударника с КГЧ при скорости 300 м/с. Имело место одинаковое время внедрения ударника с КГЧ (вариант 1) и ударника с ПГЧ (вариант 3). Разница между временем внедрения ударника с ОГЧ и ударников с КГЧ и ПГЧ в варианте 4 составляла 32 и 40% соответственно.

Установлено, что наименьшие диаметры кратеров во льду зафиксированы при внедрении ударников с ОГЧ. Максимальный диаметр кратера получился в варианте 2 при внедрении ударника с ПГЧ, а минимальный – в варианте 1 при внедрении ударника с ОГЧ. В процессе внедрения ударников с ОГЧ в лед диаметр кратера увеличивался с ростом начальной скорости. В варианте 3, 4 получены одинаковые диаметры кратеров. В

процессе внедрения ударников с КГЧ в первых двух вариантах рассчитанные диаметры кратеров совпадали. При внедрении ударника с ПГЧ

обнаружено, что с ростом начальной скорости до 200 м/с диаметр кратера увеличивался. Дальнейший рост скорости, наоборот, приводил к уменьшению диаметра кратера.

Заключение

Таким образом, исследован процесс внедрения ударников с различными формами головных частей в ледяную преграду в дозвуковом диапазоне начальных скоростей удара. Полученные результаты позволили количественно описать процесс деформирования и разрушения льда на всех стадиях процесса внедрения. Результаты расчетов направлены на углубление теоретических знаний в области механики разрушения льда и показывают перспективность разработанных средств математического моделирования для решения подобного класса динамических задач МДТТ.

Литература

1. Физика взрыва / под ред. Станюковича – М: Мир, 1973. – С. 704.
2. Орлов Ю.Н. Исследование процессов высокоскоростного деформирования и разрушения комбинированных ударников: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2007. – 34 с.
3. С-во о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010610911 от 28.01.2010 «Удар-ОС1. Ударно-волновое нагружение конструкций. Осесимметричная задача» / Ю.Н. Орлов, В.П. Глазырин, М.Ю. Орлов.
4. Глазырин В.П., Орлов Ю.Н., Орлов М.Ю. Разрушение льда при ударном и взрывном нагружении // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13. – Ч. 1, спец. выпуск. – С. 425-432.
5. Горельский В.А., Коняев А.А., Толкачев В.Ф. Моделирование глубины проникания ударников в пресный лед при температуре -25 °С // Полярная механика – 2013: тезисы докладов всерос. конф. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. – С. 21-22.
6. Комплексное теоретико-экспериментальное исследование поведения поликристаллического льда при динамических нагрузках. Часть 1. Эксперименты по ударно-взрывному нагружению пресноводного льда. Расчет процесса взрывного нагружения системы «Лед – ВВ – Вода» / М.Ю. Орлов и др. // Принято к опубликованию в Вестнике Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема, 2013.

Орлов Максим Юрьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета. Тел. (3822) 529569, e-mail orloff_m@mail.ru

Орлова Юлия Николаевна, ассистент НИ Томского политехнического университета, Институт природных ресурсов. Тел. +79627824760, e-mail: orlovaun@mail.ru

Повереннов Евгений Юрьевич, научный сотрудник НИИ механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Тел. +79047811742, e-mail: kochetkov@dk.mech.unn.ru

Orlov Maxim Yurevich, candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics at Tomsk State University.

Tel. (3822) 529569, e-mail orloff_m@mail.ru

Orlova Yuliya Nikolaevna, assistant, Tomsk Polytechnic University, Institute of Natural Resources. Tel. +79627824760, e-mail orlovaun@mail.ru

Poverennov Evgeny Yurevich, candidate of physical and mathematical sciences, researcher, Scientific Research Institute of Mechanics, Nizhegorodsky State University named after N.I. Lobachevsky. Tel. +79047811742, e-mail: kochetkov@dk.mech.unn.ru

© *В.Е. Архинчев, Н.В. Юмозжапова*

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА
ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИФФУЗИИ В НАНОПОРИСТЫХ СРЕДАХ
И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ ОСАЖДЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ**

Доказано, что многомерная диффузия в рамках гребешковой модели описывается дифференциальными уравнениями дробного порядка. Получено решение обобщенного диффузионного уравнения дробного порядка по времени. Показано, что включение электрического тока приводит к возникновению двух предельных случаев в зависимости от соотношения времени диффузии t и полевого времени t_E . Найдены асимптотические решения в обоих случаях и приведены их графические представления. Полученные результаты использованы для управления процессами осаждения полимеров в нанопористых материалах.

Ключевые слова: дробные производные, эффективные уравнения, нанопористые материалы.

V.E. Arkhincheev, N.V. Yumozhapova

**DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER
FOR DESCRIPTION OF DIFFUSION IN NANOPOROUS MEDIA
AND CONTROL THE PROCESSES OF POLYMERS DEPOSITION
BY ELECTRIC FIELD**

The multidimensional diffusion within pectinate model is proved to be described by differential equations of fractional order. A solution of generalized diffusion equation of fractional order is obtained in time. Switching of electric current gives rise to two extreme cases depending on the ratio between diffusion time t and field time t_E . Asymptotic solutions in both cases are found and their graphical representations are submitted. The obtained results have been used for control the processes of polymers deposition in nanoporous materials.

Ключевые слова: fractional derivatives, efficient equations, nanoporous materials.

Введение

В настоящее время нанопористые материалы нашли свое применение практически во всех областях науки и техники. Связано это с их необычными механическими, физическими и химическими свойствами. Для понимания характера физических процессов, происходящих в них, применяют аппарат дробного интегрирования. Поскольку много-

численные исследования показали, что диффузию в таких средах нельзя описать классическим уравнением диффузии из-за аномальной зависимости среднеквадратичного смещения диффундирующих частиц от времени [1]. Она определяет новое автомодельное поведение, а также негауссову форму для устойчивого распределения диффундирующих частиц [2].

Несмотря на интенсивное исследование проблемы аномальной диффузии, тем не менее до сих пор остается ряд нерешенных вопросов. В частности, до конца не исследовано влияние электрического поля на характер диффузионного распространения активных частиц в пористых материалах. Дело в том, что в случае классической диффузии влияние электрического поля можно исключить переходом в инерциальную систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью, – имеется лоренцовская инвариантность; в случае аномальной субдиффузии средняя скорость уменьшается со временем [6-8]:

$$V(t) \propto \mu E / \sqrt{t},$$

что означает отсутствие лоренцовской инвариантности для субдиффузионных аномальных процессов. Также возникает вопрос и о том, каким образом происходит переход к стационарному распределению больцмановского вида в задачах аномальной диффузии.

1. Модель гребешковой структуры как модель пористых материалов

Напомним коротко гребешковую модель. Впервые она была введена для описания субдиффузии на перколяционных кластерах [9], которая также аналогична перколяции в пористых материалах. Она состоит из хорошо проводящей оси – проводящего канала (аналог скелета перколяционного кластера) и ребер, прикрепленных к оси (рис. 1).

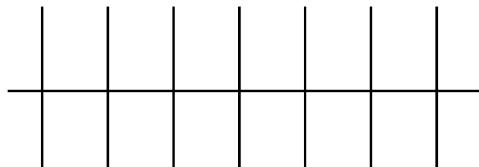


Рис. 1. Гребешковая модель: ось и ребра, прикрепленные к оси структуры

Особенность диффузии в гребешковой структуре состоит в возможности смещения по X -направлению только вдоль оси структуры (при $y = 0$). Это означает, что коэффициент диффузии D_{xx} отличен от нуля только при $y = 0$ [10]:

$$D_{xx} = D_1 \delta(y). \quad (1)$$

Т.е. X – компонента диффузионного тока равна:

$$J_x = -D_{xx} \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (2)$$

Диффузия вдоль осей структуры носит обычный характер: $D_{yy} = D_2$.

Следовательно, случайные блуждания на гребешковой структуре описываются тензором диффузии:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} D_1 \delta(y) & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Используя закон Фика с тензором диффузии (3)

$$\vec{J}_d = -\hat{D} \vec{\nabla} N,$$

получим диффузионное уравнение:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D_1 \delta(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - D_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] G(x, y, t) = \delta(x) \delta(y) \delta(t). \quad (4)$$

Здесь $G(x, y, t)$ – функция Грина уравнения диффузии. Для дальнейшего удобства сделаем преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по x -координате:

$$\left[s + D_1 k^2 \delta(y) - D_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] G(s, k, y) = \delta(y). \quad (5)$$

В качестве начальных данных используется точечный источник $\delta(x) \delta(y) \delta(t)$. Решение уравнения (12) будем искать в виде:

$$G(s, k, y) = g(s, k) \exp(-\lambda |y|). \quad (6)$$

Подставляя решение (6) в уравнение получим две части: регулярное выражение и выражение с сингулярным коэффициентом $\delta(y)$:

$$\left[s - D_2 \lambda^2 \right] G(s, k, y) = 0; \quad (7)$$

$$\left[D_1 k^2 + 2\lambda D_2 \right] \delta(y) g(s, k, y) = \delta(y). \quad (8)$$

Из первого уравнения (7) мы определим значение параметра λ , а из второго уравнения (8) – выражение для функции $g(s, k)$:

$$\lambda = \sqrt{\frac{s}{D_2}}, \quad g(s, k) = \frac{1}{2D_2 \lambda + D_1 k^2}. \quad (9)$$

Сделав обратное преобразование Фурье, получим выражение для функции Грина:

$$G(x, y, t) = \int_0^\infty (\tau + |y|) \exp\left(-\frac{x^2}{4D_1 \tau} - \frac{D_2 (\tau + |y|)^2}{4t}\right) \frac{\partial \tau \sqrt{D_2^3}}{\pi \sqrt{D_1 t^3 \tau}}. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что среднеквадратичное смещение вдоль оси структуры оказывается аномальным:

$$\langle x^2(t) \rangle = D_1 \sqrt{\frac{t}{D_2}}. \quad (11)$$

Диффузия вдоль ребер гребешковой структуры носит обычный характер:

$$\langle y^2(t) \rangle = 2D_2 t . \quad (12)$$

Таким образом, анизотропные случайные блуждания в пористых материалах описываются различными степенными зависимостями (11) и (12).

2. Аномальная диффузия в электрическом поле

Включение электрического поля приводит к анизотропии случайных блужданий. В слабых полях параметр анизотропии мал:

$$\alpha(E) \ll 1 \quad (13)$$

и пропорционален полю. Соответственно, полевой ток имеет вид:

$$J = n\mu E . \quad (14)$$

В гребешковой структуре тензор подвижности равен

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \delta(y) & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Тогда уравнение диффузии в электрическом поле по гребешковой структуре имеет вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \delta(y) \left(D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1 E_x \frac{\partial}{\partial x} \right) - D_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu_2 E_y \frac{\partial}{\partial y} \right] \rho(x, y, t) = 0 . \quad (16)$$

Формальное решение уравнения дробного порядка по времени имеет вид:

$$G(x, y, t; E) = s_0 \int \int e^{-2D_2 \sqrt{\frac{s'}{D}} \tau} e^{s't} e^{-\frac{(x-v_x \tau)^2}{4D_2 \tau}} e^{-\lambda_{\pm} |4|} ds' d\tau . \quad (17)$$

Здесь $s_0 = \frac{\mu_y^2 E_y^2}{D_2}$, $v_x = \mu_1 E_x$, $s' = s + s_0$.

3. Предельный переход к стационарному распределению

Проанализируем полученное выше решение (17), описывающее случайные блуждания по гребешковой структуре в электрическом поле, методом перевала. Для этого определим перевальные точки:

$$-\frac{\tau^2}{4t} - \frac{v_x^2}{4D_2} \tau + \frac{x}{2D_2} v_x - \frac{x^2}{4D_2 \tau} = 0 \quad (18)$$

Выражения для перевальных точек в электрическом поле отличаются от выражений для перевальных точек без поля. Более того, сами значения перевальных точек зависят от величины электрического поля.

В пределе слабых электрических полей $t \ll t_{E_y}$, где $t_{E_y} = 4D_2/v_y^2$ время, определяемое компонентой электрического поля, выражение для перевальных точек аналогично формуле без электрических полей:

$$\tau_{1,2} = \pm A \frac{x^{4/3}}{t^{1/3}} .$$

В случае сильных электрических полей $t \ll t_{E_y}$ перевальные точки описываются выражением:

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{x}{v_x}$$

Как следует из полученных выше формул в пределе больших времен функция распределения принимает больцмановский вид:

$$N(x, t; E) \approx N_0 \exp\left(-\frac{qEx}{kT} - \frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (19)$$

При этом выход на стационарное распределение происходит медленным диффузионным образом.

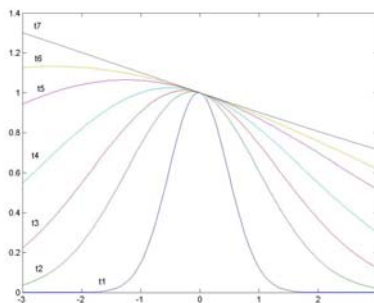


Рис. 2. Выход на стационарное распределение при различных временах

4. Численный анализ функции плотности распределения в электрическом поле и управление процессами осаждения полимеров

Ниже представлен анализ поведения функции плотности распределения диффундирующих частиц численными методами в системе Matlab и методом Монте-Карло при различных соотношениях параметров задачи: электрическое поле, время и коэффициент диффузии.

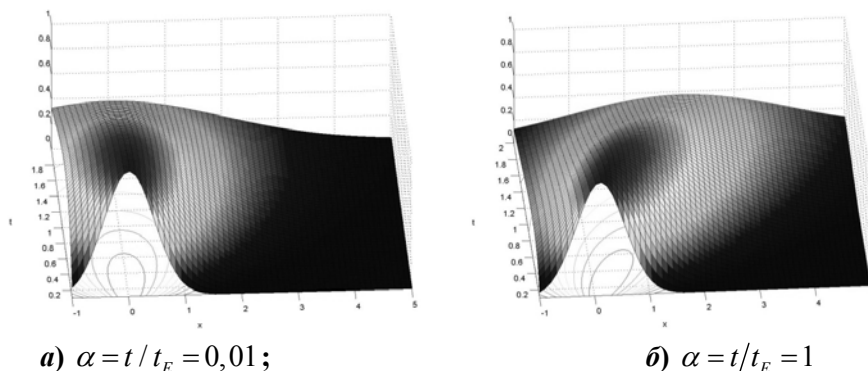


Рис. 3. Распределение диффундирующих частиц от времени при различных параметрах α

Как видно при малых параметрах α электрическое поле не влияет на форму распределения частиц; полученные результаты согласуются с результатами работ [7–9]. Дальнейшее увеличение электрического поля приводит к изменению формы распределения и смещению вправо максимума распределения частиц. Также необходимо отметить, что со временем растет деформация решения, при увеличении параметра α эта деформация уменьшается – решение стремится к стационарному распределению.

В сильных полях и предельном случае малых времен влияние поля не успевает сказываться в соответствии с развитой выше теорией, согласно которой важно соотношение между временем диффузии и «полевым» временем $t \gg t_E$.

В случае сильных полей и обратном предельном случае больших времен, когда время диффузии много больше «полевого» времени $t \ll t_E$, влияние поля оказывается существенным вплоть до выхода на стационарное распределение, что соответствует большим временам. При соотношении $t/t_E > 5$ картина распределения практически не изменяется (рис. 4).

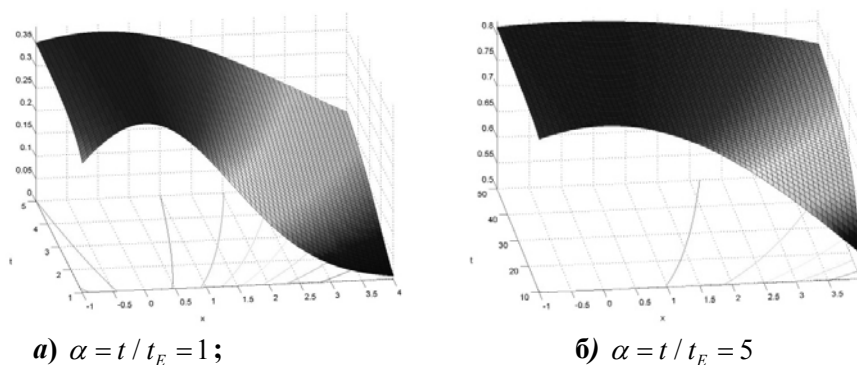


Рис. 4. Распределение плотности вероятности в сильных полях и на больших временах при различных соотношениях времен

В сильных полях и предельном случае малых времен влияние поля не успевает сказываться в соответствии с теорией, согласно которой важно соотношение между временем диффузии и «полевым» временем $t \ll t_E$.

Нетрудно понять, что появление нового параметра в задачах диффузии с электрическим полем приведет к новой кинетике процессов осаждения полимеров в нанопористых материалах. В приложение к указанной проблеме кинетика заполнения нанопор в диэлектрических материалах на больших временах существенно отличается от кинетики при обычной диффузии с гауссовым распределением. Другим важным результатом является существенное ускорение электрическим полем кинетики заполнения пор.

Практическое использование полученных результатов прежде всего следует связывать с дальнейшей разработкой технологии формирования нанопористых материалов.

Заключение

Исследовано поведение функции плотности вероятности диффундирующих частиц в электрическом поле. Показано, что возможны два предельных случая в зависимости от соотношения времени диффузии t и полевого времени t_E . В случае слабых полей (малых времен) асимптотическое поведение носит аномальный характер аналогично случаю в отсутствие электрического поля. В случае сильных полей происходит сильное изменение формы диффузионного пакета и на больших временах приобретает характер больцмановского распределения. Выход на больцмановское распределение описывается диффузионной гауссовой асимптотикой. Полученные результаты могут быть использованы для управления процессами осаждения, испарения полимеров в нанопоры.

Литература

1. Isichenko M.V. Percolation, statistical topography, and transport in random media // *Rev. Mod. Phys.* – 1992. – V. 64. – P. 961-984.
2. Uchaikin V.V. Anomalous diffusion and fractional stable distributions // *JETP.* – 2003. – V. 97. – P. 810-825.
3. Applications of fractional calculus in physics / ed. R. Hilfer // *World Sci, Singapore.* 2000. – P. 1-85.
4. Arkhincheev V.E. Diffusion on random comb structure: effective medium approximation // *Physica A.* – 2002. – V. 307. – P. 131-141.
5. Arkhincheev V.E. Random walks on comb model and its generalizations // *Chaos.* – 2007. – V. 17. – P. 043102-0143108.
6. Klafter J., Metzler R. *Phys. Rep.*, 339, 1 (2000).
7. Metzler R., Klafter J. *Advances in Chem // Physics.* – 2001. – V. 116. – P. 223.
8. Забурдаев В.Ю., Чукбар К.В. *ЖЭТФ.* – 2002. 121, 299.
9. Weiss G., Havlin S. Some properties of random walks on a comb structure // *Physica A.* 1986. – V. 134. – P. 474-482.
10. Архинчев В.Е. Обобщенный закон Фика для аномальной диффузии в многомерной гребешковой модели // *Письма в ЖЭТФ.* – 2007. – Т. 86, № 8. – С. 580-583.

Архинчев Валерий Ефимович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН. Тел. 43-32-38, e-mail: varkhin@mail.ru

Юмозжапова Наталья Вячеславовна, аспирант Института физического материаловедения СО РАН. Тел. 43-32-38, e-mail: ynat81@bk.ru

Arkhincheev Valery Efimovich, doctor of physical and mathematical sciences, chief researcher, Institute of Physical Material Studies SB RAS. Tel. 43-32-38, e-mail: varkhin@mail.ru

Yumozhapova Natalya Vyacheslavovna, postgraduate student, Institute of Physical Material Studies SB RAS. Tel. 43-32-38, e-mail: ynat81@bk.ru

Научное издание

В Е С Т Н И К
БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1 / 2014

МАТЕМАТИКА

Редактор *Я.С. Суворова*
Компьютерная верстка *Т.А. Олоевой*

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 16.06.14. Формат 70 x 100 1/16.
Усл. печ. л. 3,60. Уч.-изд. л. 6,8. Тираж 1000. Заказ 128.
Цена договорная

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а