

Учредитель  
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

# ВЕСТНИК

БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

## 1/2015



## Математика, информатика

Журнал издается  
с 2012 года

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-48732 от 28 февраля  
2012 г. Федеральная служба по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
(Роскомнадзор)

Ответственные за выпуск  
**Д. О. Трунин, И.-Х. Д. Хишектуева**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А. С. Булдаев**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(гл. редактор, Улан-Удэ)  
**С. Н. Васильев**, акад. РАН, проф. (Москва)  
**В. И. Гурман**, д-р техн. наук, проф. (Москва)  
**Ж. Г. Дамбаев**, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)  
**А. В. Данеев**, д-р техн. наук, проф. (Иркутск)  
**А. И. Кожанов**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(Новосибирск)  
**А. В. Лакеев**, д-р физ.-мат. наук (Иркутск)

**А. Д. Мижидон**, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)  
**Ни Минь Кань**, д-р наук, проф. (КНР, Шанхай)  
**Б. Очирбат**, д-р наук, проф. (Монголия,  
Улан-Батор)  
**В. А. Срочко**, д-р физ.-мат. наук, проф. (Иркутск)  
**Д. Ш. Ширапов**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(Улан-Удэ)  
**Р. Энхбат**, д-р наук, проф. (Монголия,  
Улан-Батор)

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ  
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ,  
ул. Смолина, 24а  
☎ 21-77-33, vbsumi@yandex.ru

✉ АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ  
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ,  
ул. Смолина, 24а  
☎ 21-95-57, riobsu@gmail.com

**GH**

## **1. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения**

УДК 517.926.4

© Д. Д. Николаева

### **О СВОЙСТВАХ ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА НА ПРОЕКТОРЕ КЛАССА БЭРА**

В оптимальном управлении показатели Ляпунова играют основную роль. Статья посвящена изучению следующего вопроса: если существует проектор первого класса Бэра, то каковы свойства показателя Ляпунова? В данной работе проведены: анализ одной задачи о существовании проектора первого класса Бэра, построение равномерно непрерывной ретракции на выпуклое множество, анализ различных свойств пространства  $\mathbb{R}^X$ .

**Ключевые слова:** равномерно непрерывная ретракция, линейно-непрерывный операторы, проекторы первого класса Бэра.

© D. D. Nikolaeva

### **ABOUT PROPERTIES LYAPUNOV EXPONENT ON THE PROJECTOR OF BAIRE CLASS**

The Lyapunov exponents play a major role in optimal control. The paper is devoted to the following question: If a projection of Baire class one exists, then what are the properties of the Lyapunov exponent? In this research work the analysis of one problem of the existence of the of Baire class one projection, building a uniformly continuous retraction to the convex set, the analysis of the different properties of space  $\mathbb{R}^X$  have been performed.

**Keywords:** uniform continuous retractions, linear continuous operator, projection of Baire class one.

#### **Введение**

В работе [1] центральное место занимает вопрос о принадлежности или непринадлежности конкретных ляпуновских показателей тому или иному классу Бэра, доказана непринадлежность минимальных полунепрерывных сверху мажорант показателей Ляпунова первому классу Бэра». Отсюда возникает актуальность исследования следующего вопроса: если существует проектор первого класса Бэра, то каковы свойства показателей Ляпунова? Для этого исследуется понятие проекции (в случае не-

линейного отображения соответствующее отображение называется ретракцией) и построение равномерно непрерывной ретракции на выпуклое множество, а также проведен анализ различных свойств пространства  $\mathbb{R}^X$ .

### Равномерно-непрерывные ретракты

Пелчинский [2] доказал, что пространство  $C[0,1]$  не дополняемо в пространстве  $D[0,1]$ , то есть не существует проектора из пространства  $D[0,1]$  на его подпространство  $C[0,1]$ , где  $D[0,1]$  – пространство всех ограниченных функций на  $[0,1]$ , непрерывных в каждой недвоично-рациональной точке, непрерывных слева и справа в каждой точке и имеющих для каждого  $\varepsilon > 0$  только конечное число «скачков», больших, чем  $\varepsilon$ . Но актуален следующий вопрос: существует ли между данными пространствами проектор первого класса Бэра?

*Бэр Рене-Луи* в 1899 году предложил свою классификацию разрывных функций:

- нулевым классом Бэра, называется множество всех непрерывных функций;
  - если функция представляется, как поточечный предел последовательности функций нулевого класса, то она принадлежит первому классу Бэра;
  - если функция представляется, как поточечный предел последовательности функций первого класса, то она принадлежит второму классу Бэра;
- и т. д.

Введем алогичную классификацию для операторов:

- множество всех непрерывных операторов назовём множеством нулевого класса;
  - если оператор  $P$  не входит в нулевой класс, но представим в виде:  $P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ , для  $\forall x$ , где каждый оператор  $P_n$  непрерывен, то оператор  $P$  называется оператором первого класса Бэра;
  - если оператор  $P$ , не входит ни в нулевой, ни в первый классы, но представим в виде:  $P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ , где каждый оператор  $P_n$  непрерывный, то оператор  $P$  называется оператором второго класса Бэра;
- и т.д по трансфинитной индукции.

**Теорема 1.** Не существует линейного проектора первого класса Бэра пространства  $D[0,1]$  на его подпространство  $C[0,1]$ .

**Доказательство.** Для доказательства используем классическую теорему о принципе равномерной сходимости [3] из общего курса функционального анализа:



Пусть пространство  $E$  банахово, а пространство  $F$  нормированное и задано некоторое множество отображений  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L(E, F)$ . Тогда равносильны следующие условия:

(1)  $\{T_\alpha\}$  равномерно ограничено, т.е.  $\|T_\alpha\| < M$  для  $\forall \alpha \in A$ .

(2)  $\{T_\alpha\}$  поточечно ограничено, т.е.  $\{T_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$  ограничено в пространстве  $F \Rightarrow \|T_\alpha x\| \leq M_x$  для  $\forall \alpha \in A$ .

Предположим, что проектор  $P(f)$  представим в виде предела непрерывных операторов, где каждый  $P_m$  линейный:

$$P(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(f).$$

Это означает, что  $P$  есть проектор первого класса Бэра. Если данный предел существует для каждого  $f$ , то по принципу равномерной ограниченности, это будет означать, что и

$$\|P(f)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m(f)\| \Rightarrow \sup_m \|P_m(f)\| < +\infty,$$

то есть  $\sup_m \|P_m\| < +\infty$ , а этого не может быть. Таким образом, мы

приходим к выводу, что проектора первого класса Бэра между данными пространствами не существует. Теорема доказана.

Пусть  $X$  топологическое подпространство пространства  $Y$ .

**Определение 1.** [4] Непрерывное отображение  $r: Y \rightarrow X$  называется *ретракцией*, если  $r(x) = x$  для любой точки  $x \in X$ .

**Определение 2.** [4] Если существует ретракция  $r: Y \rightarrow X$ , то  $X$  называют *ретрактом* пространства  $Y$ .

**Определение 3.** [4] Топологическое пространство  $X$  называется *абсолютным ретрактом*, если оно является ретрактом всякого топологического пространства, содержащего  $X$  в качестве замкнутого подпространства.

Рассмотрим случай существования равномерно-непрерывных ретрактов в пространстве  $C_p(X)$ .

**Лемма 1.** Для любого пространства  $X$ , если  $C_p(X)$  содержит всюду плотное подмножество типа  $G_\delta$  из пространства  $\mathbb{R}^X$ , то пространство  $X$  является дискретным.

**Доказательство.** Предположим, что пространство  $X$  недискретно. Тогда функция  $g \in \mathbb{R}^X \setminus C_p(X)$ . Определим отображение  $F: \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}^X$ , такое что  $F(f) = f + g$ . Тогда отображение  $F$  есть гомеоморфизм  $\mathbb{R}^X$  на самого себя, и  $F(C_p(X)) \subset \mathbb{R}^X \setminus C_p(X)$ . Таким образом  $\mathbb{R}^X \setminus C_p(X)$  также содержит плотное  $G_\delta$  подмножество из пространства  $\mathbb{R}^X$ , чего быть не

может, так как пространство  $\mathbb{R}^X$  является бэрдовским, и в бэрдовском пространстве каждая пара плотных  $G_\delta$  множеств имеют непустое пересечение.

**Теорема 2.** Пусть  $X$  – вполне регулярное пространство и пусть дана равномерно непрерывная функция  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $\varphi(x) > 0$  для любого  $x \in X$ . Тогда выпуклое множество

$$L = \{f \in C_p(X) : |f(x)| \leq \varphi(x)\}$$

является равномерным ретрактом пространства  $C_p(X)$ .

**Доказательство.** Множество  $L$  является выпуклым, то есть

$$f_1\lambda + f_2(1-\lambda) \in L \Leftrightarrow |f_1\lambda + f_2(1-\lambda)| \leq \varphi,$$

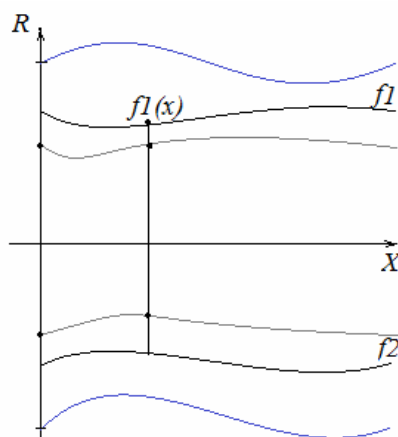


рис. 1

для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f_1(x)\lambda + f_2(x)(1-\lambda)| \leq \varphi(x)$ , при  $f_1(x) > f_2(x)$  справедливо неравенство  $f_1(x) \leq |f_1(x)\lambda + f_2(x)(1-\lambda)| \leq f_2(x)$ .

Необходимо показать, что выпуклое множество  $L$  является равномерным ретрактом. Для любого  $x \in X$  определим некоторое отображение  $r: C_p(X) \rightarrow L$ , такое что  $r(f)(x) = f(x)$ . Функции  $f(x) \in C_p(X)$  и  $f(x) > 0$ . Рассмотрим случаи:

- 1) Если  $|f(x)| < \varphi(x)$ , то  $r(f)(x) = f(x)$ .
- 2) Если  $f(x) > \varphi(x)$ , то  $r(f)(x) = \varphi(x)$ .
- 3) Если  $f(x) < -\varphi(x)$ , то  $r(f)(x) = -\varphi(x)$ .

Нетрудно видеть, что наше полученное отображение  $r$  является непрерывным. Следовательно, по определению ретракта, выпуклое множество  $L$  является равномерным ретрактом в пространстве  $C_p(X)$ .

Теорема доказана.

**Определение 4.** [1] Пространство  $X$  обладает свойством Бэра, если в нем пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных множеств является всюду плотным.

**Предложение.** Если  $C_p(X)$  пространство со свойством Бэра, то каждое ограниченное в  $X$  множество конечно.

**Доказательство.** Допустим, что существует бесконечное неограниченное множество  $A \subset X$ . Положим  $G_i = \{f \in C_p(X) : \text{существует } x \in A, \text{ такой, что } f(x) > i\}$ ,  $i \in \mathbb{N}^+$ , и покажем, что  $G_i$  открыто и всюду плотно в  $C_p(X)$ .

Пусть  $f \in G_i$ . Возьмем  $x \in A$ , такой, что  $f(x) > i$ . Положим  $\varepsilon = f(x) - i$  и рассмотрим стандартное открытое множество  $W(f, x, \varepsilon)$  в  $C_p(X)$ . Очевидно,  $f \in W(f, x, \varepsilon) \subset G$ . Следовательно,  $G_i$  открыто в  $C_p(X)$ .

Пусть  $W(g, x_1, \dots, x_k, \varepsilon')$  – любое стандартное открытое множество в  $C_p(X)$ . Так как множество  $A$  бесконечно, найдется  $y \in A \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ . Существует функция  $f \in C_p(X)$ , такая, что  $f(y) > i$  и  $|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon'$  при всех  $i = 1, \dots, k$ . Тогда  $f \in G_i \cap W(g, x_1, \dots, x_k, \varepsilon')$ . Следовательно,  $\bar{G}_i = C_p(X)$ . Покажем, что  $\bigcap \{G_i : i \in \mathbb{N}^+\} = \emptyset$ . Пусть это не так, и  $f \in \bigcap \{G_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ . Тогда для каждого  $i \in \mathbb{N}^+$  найдется точка  $x_i \in A$ , такая, что  $f(x_i) > i$ . Значит, функция  $f$  не ограничена на  $A$ , в противоречие с условием. Следовательно,  $\bigcap \{G_i : i \in \mathbb{N}^+\} = \emptyset$ , что невозможно, так как пространство  $C_p(X)$  обладает свойством Бэра.

**Лемма 2.** Пусть  $X$  дискретно и счетно. Тогда  $\mathbb{R}^X$  есть абсолютный ретракт в классе всех нормальных пространств.

**Доказательство.** Предположим, что  $\mathbb{R}^X$  есть некоторое подпространство нормального пространства  $Y$ . Рассмотрим семейство тождественных отображений  $t : \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}^X$ . Семейство  $t$  есть диагональное произведение вещественных функций, каждое из которых по теореме Титце-Урысона [3] можно непрерывно продолжить на все пространство  $Y$ . Данное декартово произведение тождественного отображения  $t$  есть ретракция пространства  $\mathbb{R}^X$ .

**Теорема 3.** Пусть множество  $\Gamma$  бесконечно и  $U$  есть единичный шар в пространстве  $l_2(\Gamma)$ . Вложим  $l_2(\Gamma)$  в пространство  $\mathbb{R}^\Gamma$  (т. е. в простран-

стве  $l_2(\Gamma)$  будем рассматривать топологию, индуцированную из пространства  $\mathbb{R}^\Gamma$ ). Тогда естественная ретракция

$$r : l_2(\Gamma) \rightarrow U$$

не является непрерывной.

**Доказательство.** Заметим, что если мы наделим гильбертово пространство  $l_2(\Gamma)$  нормированной топологией, то отображение  $r$  является непрерывной ретракцией.

Рассмотрим отображение:

$$r : l_2(\Gamma) \rightarrow U,$$

в том случае, когда пространство наделено топологией поточечной сходимости.

Окрестность элемента  $x$  имеет вид :

$$W(x, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta) = \{y : |x(\gamma_i) - y(\gamma_i)| < \delta, i = 1, \dots, n\}.$$

А окрестность образа  $r(x)$  имеет следующий вид:

$$W(r(x), \alpha, \varepsilon) = \{z \in L_2(\Gamma) : \left| z_\alpha - \frac{x_\alpha}{\|x\|} \right| < \varepsilon\}.$$

Ограничимся предбазисной окрестностью (т.е. всякая окрестность есть пересечение окрестностей такого вида).

Элемент  $r(x)$  принадлежит пространству  $l_2(\Gamma)$ , следовательно,

$$r(x)(\alpha) = \frac{x_\alpha}{\|x\|} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma|^2}}, \text{ где } x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} r(W(x, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta)) &= \{r(y), y \in W : |x(\gamma_i) - y(\gamma_i)| < \delta, i = 1, \dots, n\} = \\ &= \{r(y)(\beta) = \frac{y_\beta}{\sqrt{\sum_{\beta \in \Gamma} |y_\beta|^2}}\}. \end{aligned}$$

Покажем, что не существует конечного набора  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , такого что

$$(*) \quad r(W(x, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta)) \subset W(r(x), \alpha, \varepsilon)$$

Так как в окрестности  $W(r(x), \alpha, \varepsilon)$  образа  $r(x)$  фиксируем только одну координату и в сумме ряда нормы участвуют координаты  $x$ , то в окрестности  $r(W(x, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta))$  прообраза фиксируется конечное число координат и в сумме ряда участвуют координаты  $y$ . Ограничения накладываются только на конечное число координат, а остальные координаты могут изменяться как угодно. Мы можем заставить координаты  $y$  изменяться так

сильно, что они не войдут в окрестность  $W(r(x), \alpha, \varepsilon)$ . Следовательно, формула (\*) не верна. Теорема доказана.

**Замечание.** Отображение  $r$  конечно же является непрерывным в топологии нормы.

### Заключение

Доказано, что не существует линейного проектора первого класса Бэра пространства  $D[0,1]$  на пространство  $C[0,1]$ . Следовательно, так как не существует проектора первого класса Бэра, то нет необходимости исследовать свойства показателей Ляпунова при условии существования проектора.

Рассмотрены случаи существования равномерно-непрерывных ретрактов в пространстве  $C_p(X)$ . При этом доказано, что выпуклое множество

$$L = \{f \in C_p(X) : |f(x)| \leq \varphi(x)\}$$

является равномерным ретрактом пространства  $C_p(X)$ . Доказано, что естественная ретракция

$$r : l_2(\Gamma) \rightarrow U$$

не является непрерывной.

### Литература

1. Ветохин А. Н. Метод неординарных семейств в теории Бэровских классов показателей Ляпунова: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук : 01.01.02 / А. Н. Ветохин. – Москва, 2013. – 16 с.
2. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций / А. Пелчинский. – Москва : МИР, 1970. – 143 с.
3. Данфорд Н. Линейные операторы: в 3 томах / Н. Данфорд, Дж. Шварц. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. - Т. 1: Общая теория. – 895 с.
4. Angosto, C., Cascales, B., Namioka, I.: Distances to spaces of Baire one functions. Z. Math. 263, 103-124 (2009)

### References

1. Vetohin A. N. Metod neordinarnykh semeistv v teorii Berovskiykh klassov pokazatelei Lyapunova: avtoreferat dissertacii na soiskanie ychenoi stepeni doctora phisico-matematicheskikh nauk: 01.01.02 / A. N. Vetohin. – Moskva, 2013. 16 p.

---

2. Petczynski, A. Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions / A. Petczynski. – Moscow : MIR publ., 1970. 143 p.

3. Dunford N. Linear Operations : in 3 parts / N. Dunford, J. Schwartz. – Moscow : foreign literature publ., 1962. – part 1 : General Theory. 895 p.

4. Angosto, C., Cascales, B., Namioka, I.: Distances to spaces of Baire one functions. Z. Math. 263, 103-124 (2009)

*Николаева Дарима Доржиевна*, аспирант кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: Darisha89@yandex.ru

*Nikolaeva Darima Dorgievna*, Research Assistant, Applied mathematics department, Buryat State University, e-mail: Darisha89@yandex.ru

УДК 517.948

© *Г. А. Шишкин*

### **РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА**

Используя новую модификацию функции гибкой структуры, в статье исследуется возможность решения краевых задачи для дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, разрешающие уравнения, функция гибкой структуры, запаздывающий тип уравнений.

© *G. A. Shishkin*

### **THE DECISION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS DIFFERENTIAL EQUATIONS OF LATE TYPE**

Using new updating of function of flexible structure, in article possibilities of the decision of boundary value problems for the linear differential equations of late type is investigated.

**Keywords:** the differential equations, resolving the equations, function of the flexible structure, late type of the equations.

#### **Введение**

В монографии [2] рассматривались начальные задачи для линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом запаздывающего, нейтрального и опережающего типов. Проведены исследования возможностей преобразования начальных задач с помощью функции гибкой структуры к интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом. Доказано, что задачи Коши для всех дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры преобразуется к разрешающим интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом, решение которых существует и притом единственное при выполнении условий ограниченности функций входящих в уравнения. Рассмотрены возможности решения в замкнутом виде и варианты приближённого решения, если точное решение найти затруднительно.

В данной работе исследуем вопрос о возможности аналогичных преобразований линейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа.

**Постановка краевой задачи для дифференциальных уравнений запаздывающего типа**

Выпишем общий вид уравнений запаздывающего типа

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) = f(x), \quad (1)$$

где  $u_0(x) \equiv x$ ,  $u_j(x) \leq x$ ,  $u_j(x) \neq x$ ,  $j = \overline{1, l}$ ,  $f_{ij}(x)$ ,  $f(x)$  и  $u_j(x)$  непрерывны, ядра  $K_{ij}(x, \eta)$  регулярны в квадрате  $a \leq x, \eta \leq b$ . с начальными функциями

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0) \varphi_i(u_j(x)), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \quad (2)$$

где  $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^l E_{x_0}^j$ ,  $E_{x_0}^j$  – множество точек, для которых соответствующие  $u_j(x) \leq x$  при  $x \geq x_0 \forall j = \overline{1, l}$ , а  $E_{x_0}^0 = [a, x_0]$ , функции  $\varphi_i(x)$  заданы и  $\varphi_i(x_0) = 1, \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ .

Рассмотрим уравнение (1) с линейными билокальными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{i\tau} y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau} y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau, \quad \tau = \overline{0, n-1}, \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b. \quad (3)$$

**Преобразование краевой задачи к уравнению с обыкновенным аргументом**

Предполагая, что решение задачи (1), (2), (3) существует и единственно, решение на отрезке  $x \in [x_0, b]$  будем искать, применив для преобразований новую модификацию функции гибкой структуры, полученную для решения краевых задач в работе [3]

$$y^{(i)}(u_j(x)) = D^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{\partial^s \Delta_s(u_j(x) - x_0)}{\partial x^s} \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} [\gamma_\tau - \right. \\ \left. - D^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1 - t)}{\partial x_1^k} \mu(t) dt \right] + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^n \Delta_n(u_j(x) - t)}{\partial x^n} \mu(t) dt \Big\} + \\ + \gamma_i u_j^{(i)}(x) \mu(u_j(x)), \quad (4)$$

где  $i = \overline{0, n}$ ,  $\gamma_n = 1$ ,  $\gamma_i = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ .  $j = \overline{0, l}$ ,  $x \in [c_j, b]$ .

$D = D(r_1, r_2, \dots, r_n)$  определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Параметры определяются в ходе решения задачи исходя из оптимальности ее решения, определитель  $\Delta_s(x-t), s = \overline{1, n}$  получается из определителя  $D$  заменой  $s$ -ой строки стро-



кой  $\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t), \dots, \exp r_n(x-t)$  и  $\mu(x)$  – новая неизвестная функция.

При этом начальные функции примут вид

$$y^{(i)}(u_j(x)) = \varphi_i(u_j(x)) \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{i\tau}}{\omega} [\gamma_{\tau} - D^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1-t)}{\partial x^k} \mu(t) dt], \quad (4^*)$$

$$i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, l}, \quad x \in E_{x_0}.$$

Подставим формулы функции гибкой структуры и ее производных (4\*), полученные для краевой задачи в работе [3] в уравнение (1). Затем, перенесём все известные получившиеся при этом выражения в правую часть равенства и под знаками интегралов для известных выражений введя обозначения получим разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом

$$\mu(x) + \sum_{j=0}^l \int_{x_0}^{x_1} G_j(x,t) \mu(t) dt + \lambda \int_{x_0}^{u_j(x)} H_j(x,t) \mu(t) dt = F(x), \quad (5)$$

где для ядер  $G_j(x,t)$ ,  $H_j(x,t)$  и функции  $F(x)$  получены определённые формулы.

**Пример 1.** Найдём решение краевой задачи

$$\begin{cases} y'(x) + xy(\frac{x}{2}) = 1 + \frac{x^2}{2}, & y(x) = y(0)\frac{x}{2}, & 3y(0) + y(1) = 1. \end{cases}$$

**Решение.** В данной краевой задаче  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $u_0(x) = x$ ,

$$u_1(x) = \frac{x}{2}, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0 \quad \text{и} \quad E_{x_0} = [0].$$

Выпишем функцию гибкой структуры по формулам (4) учитывая условия краевой задачи

$$y(x) = \frac{e^{rx}}{3+e^r} - \frac{e^{rx}}{3+e^r} \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt + \int_0^x e^{r(x-t)} \mu(t) dt$$

$$\text{и} \quad y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r} - \frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r} \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt + \int_0^{\frac{x}{2}} e^{r(\frac{x}{2}-t)} \mu(t) dt.$$

С целью сокращения объёма выкладок положим  $r = 0$ , тогда выражения функции гибкой структуры упростятся

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 \mu(t) dt + \int_0^x \mu(t) dt \quad \text{и} \quad y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 \mu(t) dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \mu(t) dt.$$

Вычислив  $y'(x) = \mu(x)$  и подставив полученные выражения для данной краевой задачи в исходное уравнение получим разрешающее уравнение

$$\mu(x) - \frac{x}{4} \int_0^1 \mu(t) dt + x \int_0^{\frac{x}{2}} \mu(t) dt = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

Решение этого интегрального уравнения будет  $\mu(x) = 1$ . Подставив это значение  $\mu(x)$  в функцию гибкой структуры краевой задачи найдём её решение  $y = x$ . Нетрудно проверить, что все условия краевой задачи выполняются.

### Заключение

В журнальной литературе имеются работы которые затрагивают некоторые вопросы решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, но мало работ которые бы поднимали и решали проблему преобразования начальных и краевых задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом.

В данной статье исследованы возможности построения модели с обыкновенным аргументом для краевых задач дифференциальных уравнений запаздывающего типа и для них этот вопрос решён положительно. Для уравнений нейтрального и опережающего типов скорее всего такое преобразование возможно только для некоторых видов уравнений. Полученные аналитические выражения модели начальной задачи дают возможность оптимизировать нахождение её точного или приближённого решений за счёт оптимального выбора параметров функции гибкой структуры.

### Литература

1. Куликов Н.К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой/ Н.К.Куликов // Тематический сб. МТИПП. – М., 1974. – С. 47-57.
2. Шишкин Г.А. Исследование и решение начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с функциональным запаздыванием / Г.А. Шишкин. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2011. – 67 с.
3. Шишкин Г.А. Функция гибкой структуры и её модификация при решении краевых задач для уравнений с функциональным запаздыванием/ Г.А. Шишкин // Вестник БГУ, выпуск 9. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2013. – С. 144-147.

### References

1. Kulikov N.K. Reshenie i issledovanie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij na osnove funkcij s gibkoj strukturoj / N.K.Kulikov // Tematicheskij sb. MTIPP. – M., 1974. – P.47-57.

2. Shishkin G.A. Issledovanie i reshenie nachal'nyh zadach dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s funkcional'nym zapazdyvaniem / G.A. Shishkin. – Ulan-Ude: Izd-vo BГУ, 2011. – 67 p.

3. Shishkin G.A. Funkcija gibkoj struktury i ejo modifikacija pri reshenii kraevyh zadach dlja uravnenij s funkcional'nym zapazdyvaniem / G.A. Shishkin // Vestnik BГУ, vypusk 9. – Ulan-Ude: Izd-vo BГУ, 2013. – P. 144-147.

*Шшикин Геннадий Александрович*, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета.

*Shishkin Gennady Aleksandrovich*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, applied mathematics department, Buryat State University.

## 2. Математическое моделирование и обработка данных

УДК 681.51:519.6

© А. П. Мадыев, Д. Ш. Ширапов

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Описаны математические модели нестационарных случайных процессов, вызванных различными видами многократных скачкообразных изменений стационарных случайных воздействий, которые имеют место в различных технических задачах. Получены формулы вычисления корреляционных функций и дисперсий в рамках описанных моделей.

**Ключевые слова:** линейный динамический объект, многократное включение и отключение, инверсия, переходный режим, нестационарный случайный сигнал, корреляционная функция, дисперсия.

© А. P. Madyev, D. Sh. Shirapov

### MATHEMATICAL MODELS OF NONSTATIONARY RANDOM SIGNALS OF MULTIPLE TRANSIENTS OF FIXED EFFECTS

The mathematical models of nonstationary stochastic processes, caused by different types of multiple step changes in stationary random influences that occur in various technical tasks. The formulas are obtained to calculate the correlation functions and variances within the models.

**Keywords:** linear dynamic object, the repeated enabling and disabling, inversion, transition regime, non-stationary random signal, correlation function, dispersion.

#### Введение

В рамках корреляционной теории случайных сигналов реакция линейного динамического объекта/системы (ЛДО/ЛДС) от включения стационарных случайных воздействий (ССВ) с нулевым математическим ожиданием полностью описывается нестационарной корреляционной функцией [1-3], но только для однократных скачкообразных изменений ССВ.

Математические модели, описывающие статистические характеристики реакции ЛДО на разные виды многократных скачкообразных изменений ССВ, в литературе отсутствуют.

Целью данной работы является разработка подобных математических моделей, позволяющих вычислить результирующие корреляционные

функции и дисперсии нестационарной реакции ЛДО от различных видов многократных скачкообразных изменений ССВ.

### 1. Математические модели реакции линейного динамического объекта для многократных переходных режимов

В общем случае ЛДО может испытывать следующие виды переходных режимов от многократных скачкообразных изменений текущих значений реализации  $x_B(t)$  входного ССВ, не выходящих за пределы своего динамического диапазона (рисунок 1):

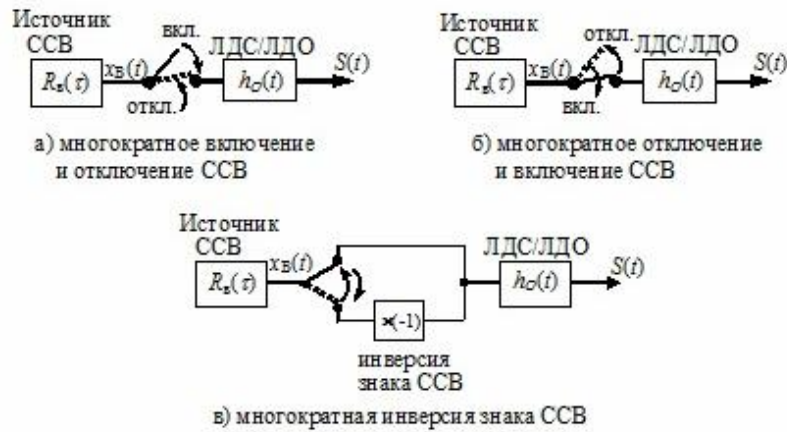


Рисунок 1 – Виды переходных режимов в ЛДО от ССВ

Во временной области ЛДО полностью описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами [1]. Технические задачи, где требуется найти реакцию  $S(t)$  ЛДО на одиночное включение воздействия  $x(t)$  (скачок от 0 до текущего значения) решаются с помощью свертки [1, 2]:

$$S(t) = \int_0^t h_o(t-u)x(u)du = \int_0^t h_o(u)x(t-u)du, \quad (1)$$

которая содержит непрерывную и дифференцируемую импульсную характеристику (ИХ)  $h_o(t)$  (называемую также импульсной переходной функцией или функцией веса). ИХ однозначно вытекает из дифференциального уравнения ЛДО.

В теории случайных процессов задача нахождения корреляционной функции  $R_S(t_1, t_2)$  реакции ЛДО на одиночное включение ССВ с корреляционной функцией  $R_B(y-x)$  решается с помощью двойной свертки [2-4], которая однозначно вытекает из (1):

$$R_S(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_o(t_1-x)h_o(t_2-y)R_B(y-x)dx dy. \quad (2)$$

Однако, (2) дает решение только для переходного режима типа одиночного включения ССВ.

Для построения математических моделей нестационарных случайных процессов, вызванных различными видами многократных скачкообразных изменений ССВ, не выходящих за пределы своего динамического диапазона, сначала получим формулы реализаций выходного сигнала ЛДО в рассматриваемых на рис.1 режимах.

Прежде всего, следует выразить многократные скачки реализаций ССВ, соответствующие отключениям и смене знака (инверсии) через скачки, соответствующие включениям реализаций ССВ.

Многократное включение и отключение (МВО) ССВ: каждое отключение реализации в моменты времени  $t_{ик}$  равносильно добавочному включению  $x(t - t_{ик})$  с отрицательным знаком.

Многократное отключение и включение (МОВ) ССВ: характер изменения реализаций ССВ в рассматриваемом режиме во многом совпадает с предыдущим режимом. Отличие в том, что первый переходный режим начинается с добавочного включения реализации ССВ с отрицательным знаком.

Многократные инверсии (МИ) знака ССВ: первая инверсия знака ССВ соответствует добавочному включению удвоенной реализации ССВ с отрицательным знаком. Каждая следующая инверсия знака ССВ соответствует добавочному включению удвоенной реализации ССВ с противоположным, относительно предыдущего включения, знаком.

Далее находим реализации сигналов реакций ССВ как суперпозицию реакций на многократные включения реализаций ССВ с соответствующими знаками и множителями.

Таким образом, выходной сигнал  $S(t)$  в любом из многократных режимов представляет собой суперпозицию реакций ЛДО на включения реализации ССВ с различными знаками и множителями в различные моменты времени  $t_{иi}$ , ( $i = \overline{1, M}$ ,  $M$  – число либо включений, либо отключений либо инверсий знака ССВ).

В таблице 1 представлены реализации ССВ и выходных сигналов ЛДО в многократных переходных режимах, показанных на рис.1.

Таблица 1  
Реализации ССВ и выходного сигнала ЛДО в многократных переходных режимах

Вид переходного режима	Реализации ССВ $x_B(t)$	Реализации сигнала $S(t)$ на выходе ЛДО после $M ( t > t_{ПМ} )$ скачков $x_B(t)$
Многократное включение и отключение ССВ, (МВО)	$\begin{cases} 0, & t < t_{П1} \\ x(t), & t_{П1} < t < t_{П2} \\ x(t) - x(t - t_{П2}), & t_{П2} < t < t_{П3} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} x(t - t_{Пk}), & t > t_{ПМ} \end{cases}$	$S(t) = \sum_{k=1}^M (-1)^k S_{k+1}(t - t_{Пk})$
Многократное отключение и включение ССВ, (МОВ)	$\begin{cases} x(t), & t < t_{П1} \\ x(t) - x(t - t_{П1}), & t_{П1} < t < t_{П2} \\ x(t) - x(t - t_{П1}) + x(t - t_{П2}), & t_{П2} < t < t_{П3} \\ \dots \\ x(t) + \sum_{k=1}^M (-1)^k 2x(t - t_{Пk}), & t > t_{ПМ} \end{cases}$	$S(t) = S_1(t) + \sum_{k=1}^M (-1)^k S_{k+1}(t - t_{Пk})$
Многократная инверсия знака реализации ССВ, (МИ)	$\begin{cases} x(t), & t < t_{П1} \\ x(t) - 2x(t - t_{П1}), & t_{П1} < t < t_{П2} \\ x(t) - 2x(t - t_{П1}) + 2x(t - t_{П2}), & t_{П2} < t < t_{П3} \\ \dots \\ x(t) + \sum_{k=1}^M (-1)^k 2x(t - t_{Пk}), & t > t_{ПМ} \end{cases}$	$S(t) = S_1(t) + \sum_{k=1}^M (-1)^k 2S_{k+1}(t - t_{Пk})$

где  $S_k(t) = \int_{t_{Пk-1}}^t h_o(t-u)x(u)du = \int_0^t h_o(u)x(t-u)du$  – реализация выходного сигнала

ЛДО от включения ССВ в момент времени  $t_{Пk-1}$ ;

$S_1(t) = \int_{-\infty}^t h_o(t-u)x(u)du = \int_0^{\infty} h_o(u)x(t-u)du$  – реализация стационарного установившегося сигнала в режимах МОВ и МИ до скачков ССВ.

Формулы, описывающие реализацию сигнала  $S(t)$  (см. 3-й столбец таблицы 1), представляют собой математические модели реакции ЛДО для многократных переходных режимов. Видно, что во всех режимах результирующие реализации  $S(t)$  исследуемых нестационарных сигналов представляют собой сумму реакций от включений реализаций ССВ как с положительными, так и отрицательными знаками и различными постоянными коэффициентами. Отрицательные знаки соответствуют отключению

ям реализаций ССВ в режимах МВО и МОВ или нечетным порядковым номерам смен (инверсий) знака реализации ССВ в режиме МИ. В последнем режиме постоянные коэффициенты  $\pm 2$  отражают то, что смена знака равносильна удвоенному скачку с противоположным знаком.

## 2. Статистические характеристики нестационарных случайных сигналов типа переходный режим

Для окончательного определения математических моделей нестационарных случайных сигналов, вызванных различными видами многократных скачкообразных изменений ССВ необходимо описание корреляционных функций и результирующих дисперсий исследуемых сигналов, что делается ниже.

Поскольку сигнал есть сумма однотипных реакций ЛДО с чередующимися противоположными знаками, результирующие корреляционные функции таких сигналов представляют собой сумму автокорреляционных функций реакций  $S_k(t - t_{lk-1})$  [4] и взаимных корреляционных функций (ВКФ) между всеми возможными парами реакций  $S_k(t - t_{lk-1})$  и  $S_m(t - t_{lm-1})$  с соответствующими знаками. ВКФ между реакциями с одинаковыми знаками будут иметь положительный знак, ВКФ между реакциями с противоположными знаками будут иметь отрицательный знак. Составляющие результирующих корреляционных функций удобно записать в виде матриц.

### Корреляционная функция и дисперсия сигнала при МВО

Составляющие корреляционной функции сигнала образуют квадратную матрицу  $(M + 1) \times (M + 1)$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{S_2 S_2} & \dots & (-1)^{2+j} R_{S_2 S_j} & \dots & (-1)^{2+M+1} R_{S_2 S_{M+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^{i+2} R_{S_i S_2} & \dots & (-1)^{i+j} R_{S_i S_j} & \dots & (-1)^{i+M+1} R_{S_i S_{M+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^{M+1} R_{S_{M+1} S_2} & \dots & (-1)^{M+1} R_{S_{M+1} S_j} & \dots & R_{S_{M+1} S_{M+1}} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\text{где } R_{S_i S_j} = \int_{t_{m-1}}^{t_1} \int_{t_{m-1}}^{t_2} h_o(t_1 - x) h_o(t_2 - y) R_B(y - x) dx dy,$$

$$R_{S_i S_i} = \int_{t_{m-1}}^{t_1} \int_{t_{m-1}}^{t_2} h_o(t_1 - x) h_o(t_2 - y) R_B(y - x) dx dy,$$

$$i, j = \overline{1, (M + 1)}.$$

Наличие нулевых элементов обусловлено  $S_1(t) = 0$ .

Матрица составляющих дисперсии:



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{S_2 S_2}^2 & \dots & (-1)^{2+j} 2\sigma_{S_2 S_j}^2 & \dots & (-1)^{2+M+1} 2\sigma_{S_2 S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{i+j} 2\sigma_{S_i S_j}^2 & \dots & (-1)^{i+M+1} 2\sigma_{S_i S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\sigma_{S_i S_j}^2(t) = R_{S_i S_j}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=t}$ .

Поскольку дисперсия имеет свойство:  $\sigma_{S_i S_j}^2(t) = \sigma_{S_j S_i}^2(t)$ , поэтому все элементы выше диагонали удваиваются, а симметричные им элементы ниже диагонали – обращаются в 0.

Результирующая дисперсия содержит 2 группы составляющих:

$$\sigma_S^2(t) = \sum_{i=2}^{M+1} \sigma_{S_i S_i}^2 + 2 \sum_{i=2}^{M+1} \sum_{j=i+1}^{M+1} (-1)^{i+j} \sigma_{S_i S_j}^2. \quad (5)$$

Первая сумма образована диагональными элементами (4), которые представляют собой дисперсии от скачков ССВ в соответствующие моменты времени (функции  $t - t_{\Pi k-1}$ ); вторая сумма образована взаимными дисперсиями между всеми парами реакций (функции  $t - t_{\Pi k-1}$  и  $t - t_{\Pi j-1}$ ).

#### Корреляционная функция и дисперсия сигнала при МОВ

Составляющие корреляционной функции сигнала образуют квадратную матрицу  $(M+1) \times (M+1)$ :

$$\begin{pmatrix} R_{S_1 S_1} & -R_{S_1 S_2} & \dots & (-1)^{1+j} R_{S_1 S_j} & \dots & (-1)^{1+M+1} R_{S_1 S_{M+1}} \\ -R_{S_2 S_1} & R_{S_2 S_2} & \dots & (-1)^{2+j} R_{S_2 S_j} & \dots & (-1)^{2+M+1} R_{S_2 S_{M+1}} \\ \dots & & & & & \\ (-1)^{i+1} R_{S_i S_1} & (-1)^{i+2} R_{S_i S_2} & \dots & (-1)^{i+j} R_{S_i S_j} & \dots & (-1)^{i+M+1} R_{S_i S_{M+1}} \\ \dots & & & & & \\ (-1)^{M+1} R_{S_{M+1} S_1} & (-1)^{M+1} R_{S_{M+1} S_2} & \dots & (-1)^{M+1} R_{S_{M+1} S_j} & \dots & R_{S_{M+1} S_{M+1}} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $R_{S_i S_1} = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_o(t_1 - x) h_o(t_2 - y) R_B(y - x) dx dy$ ,

$$R_{S_i S_j} = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_o(t_1 - x) h_o(t_2 - y) R_B(y - x) dx dy.$$

Остальные составляющие аналогичны (3).

Матрица составляющих дисперсии:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{S_1 S_1}^2 - 2\sigma_{S_1 S_2}^2 \dots & (-1)^{1+j} 2\sigma_{S_1 S_j}^2 \dots & (-1)^{1+M+1} 2\sigma_{S_1 S_{M+1}}^2 \\ 0 & \sigma_{S_2 S_2}^2 \dots & (-1)^{2+j} 2\sigma_{S_2 S_j}^2 \dots & (-1)^{2+M+1} 2\sigma_{S_2 S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 \dots & (-1)^{i+j} 2\sigma_{S_i S_j}^2 \dots & (-1)^{i+M+1} 2\sigma_{S_i S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 \dots & 0 \dots & \sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Результирующая дисперсия содержит 4 группы составляющих:

$$\sigma_S^2(t) = \sigma_{S_1 S_1}^2 + \sum_{i=2}^{M+1} \sigma_{S_i S_i}^2 + 2 \sum_{j=2}^{M+1} (-1)^{j+1} \sigma_{S_i S_j}^2 + 2 \sum_{i=2}^{M+1} \sum_{j=i+1}^{M+1} (-1)^{i+j} \sigma_{S_i S_j}^2. \quad (8)$$

В формуле (8): первая составляющая – дисперсия сигнала в установившемся режиме (постоянное значение); вторая – составляющая образована суммой диагональных элементов (7), которые представляют собой дисперсии от скачков ССВ в соответствующие моменты времени; третья составляющая образована взаимными дисперсиями между установившейся реакцией и остальными реакциями (элементы первой строки (5), кроме  $\sigma_{S_1 S_1}^2$ ); последняя составляющая образована взаимными дисперсиями между всеми остальными парами реакций.

Корреляционная функция и дисперсия сигнала при МИ

Составляющие корреляционной функции сигнала образуют квадратную матрицу  $(M + 1) \times (M + 1)$  :

$$\begin{pmatrix} R_{S_1 S_1} & -2R_{S_1 S_2} \dots & (-1)^{1+j} 2 R_{S_1 S_j} \dots & (-1)^{1+M+1} 2 R_{S_1 S_{M+1}} \\ -2R_{S_2 S_1} & 4R_{S_2 S_2} \dots & (-1)^{2+j} 4R_{S_2 S_j} \dots & (-1)^{2+M+1} 4R_{S_2 S_{M+1}} \\ \dots & & & \\ (-1)^{i+1} 2R_{S_i S_1} & (-1)^{i+2} 4R_{S_i S_2} \dots & (-1)^{i+j} 4R_{S_i S_j} \dots & (-1)^{i+M+1} 4R_{S_i S_{M+1}} \\ \dots & & & \\ (-1)^{M+1} 2R_{S_{M+1} S_1} & (-1)^{M+1} 4R_{S_{M+1} S_2} \dots & (-1)^{M+1} 4R_{S_{M+1} S_j} \dots & 4R_{S_{M+1} S_{M+1}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Матрица составляющих дисперсии:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{S_1 S_1}^2 - 4\sigma_{S_1 S_2}^2 \dots & (-1)^{1+j} 4\sigma_{S_1 S_j}^2 \dots & (-1)^{1+M+1} 4\sigma_{S_1 S_{M+1}}^2 \\ 0 & 4\sigma_{S_2 S_2}^2 \dots & (-1)^{2+j} 8\sigma_{S_2 S_j}^2 \dots & (-1)^{2+M+1} 8\sigma_{S_2 S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 \dots & (-1)^{i+j} 8\sigma_{S_i S_j}^2 \dots & (-1)^{i+M+1} 8\sigma_{S_i S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 \dots & 0 \dots & 4\sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Результирующая дисперсия содержит 4 составляющие:

$$\sigma_S^2(t) = \sigma_{S_1 S_1}^2 + 4 \sum_{i=2}^{M+1} \sigma_{S_i S_i}^2 + 4 \sum_{j=2}^{M+1} (-1)^{j+1} \sigma_{S_i S_j}^2 + 8 \sum_{i=2}^{M+1} \sum_{j=i+1}^{M+1} (-1)^{i+j} \sigma_{S_i S_j}^2. \quad (11)$$

Свойства (11) аналогичны свойствам (8).

Итак, дисперсии (5), (8) и (11), исследуемых нестационарных сигналов содержит большое число слагаемых  $N = \sum_{i=1}^{M+1} i$  (где  $M$  – число включений, выключений или инверсий ССВ), зависящих от числа скачков ССВ, что приводит к значительным вычислительным затратам.

### **Заключение**

Построены математические модели нестационарных случайных процессов, вызванные многократными скачкообразными изменениями стационарных случайных воздействий на линейный динамический объект для трех наиболее часто встречающихся переходных режимов, описываемые формулами из 3-го столбца таблицы 1 и корреляционными функциями (3), (6), (9), а также дисперсиями (5), (8), (11).

Отметим, что корреляционные функции (3), (6), (9) и дисперсии (5), (8), (11) получены на основе принципа суперпозиции нестационарного сигнала. Результирующие формулы дисперсий составляют частные суммы дисперсий от каждого скачка ССВ, выраженные через включения ССВ, и частные суммы большего числа взаимных дисперсий между всеми парами реакций ЛДО на скачки ССВ.

### **Литература**

1. Теория систем автоматического управления / В.А.Бесекерский, Е.П.Попов. – Изд. 4-е. перераб. и доп. – СПб, Изд-во «Профессия», 2003. – 752 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2005. –462 с.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

### **References**

1. Theory of automatic control systems / Besekersky V.A., Popov E.P. – 4-th edition, revised and enlarged. SPb.: Professia, 2003. – 752 p.
2. Baskakov S.I. Radio circuits and signals. M.: Vysshaya Shkola 2005. – 462 p.
3. Bendat J., Piersol A. Random data. Analysis and measurement procedure – Translation from English. M.: Mir, 1989. – 540 p.
4. Levin B.R. Theoretical foundations of statistical radio engineering – 3 edition, revised and enlarged. M.: Radio and communications, 1989. – 656 p.

---

*Мадыев Алексей Петрович*, старший преподаватель кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: mapost3@gmail.com

*Ширапов Дашадондок Шагдарович*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: shir48@mail.ru

*Madyev Aleksey Petrovich*, Senior Lecturer, Department "Electronic computing systems", East Siberian State University of Technology and Management, e-mail: mapost3@gmail.com

*Shirapov Dashadondok Shagdarovich*, Doctor of physics and mathematics, professor, head of Department "Electronic computing systems", East Siberian State University of Technology and Management, e-mail: shir48@mail.ru

УДК 51.77:311.21

© А. С. Цыбиков, Нямхуу Батжаргал, Э. Д. Дагбаев, Т. Г. Дармаев

## **АНАЛИЗ ОБЪЕМА И СТРУКТУРЫ ВЫБОРКИ СОЦИОЛОГИЧЕСКОГО ОПРОСА МОЛОДЕЖИ МОНГОЛИИ<sup>1</sup>**

В работе представлены результаты расчёта минимального объема выборки необходимого для описания содержания общественного сознания молодежи Монголии (480 респондентов), а также отдельно для аймаков и г. Улан-Батор. Рассчитан объем выборки равный не менее 670 респондентов из молодежи Монголии в случае необходимости исследовать влияние социальных факторов (возраст, пол, образование, род деятельности). Оценка производится с помощью статистической процедуры «анализ мощности» с применением пакета Statistica.

**Ключевые слова:** общественное сознание молодежи Монголии, статистическая оценка объема выборки, анализ мощности.

© A. S. Tsybikov, Nyamhu Batjargal, E. D. Dagbayev, T. G. Darmayev

## **VOLUME AND STRUCTURE ANALYSIS OF THE SAMPLE FOR SOCIAL INTERVIEW OF YOUTH IN MONGOLIA**

The article presents the results of calculation of the minimum sample size required to describe the content of the social consciousness of young people of Mongolia (480 respondents), as well as separately for the aimags and Ulaanbaatar. The sample size is at least 670 respondents from the youth of Mongolia to investigate the influence of social factors (age, sex, education, occupation) if it is necessary. Evaluation is carried out using a statistical procedure "power analysis" and the package Statistica.

**Keywords:** social consciousness of young people of Mongolia, statistical evaluation of sample size, power analysis.

### **Введение**

Исследование, направленное на изучение содержания и факторов, влияющие на характер и тенденции в развитии общественного сознания современной молодежи Монголии, является принципиальным в плане коррекции и планирования международного политического курса России. Оно предполагает проведение масштабного социологического опроса молодежи Монголии с целью выявления существующих в ней тенденций и особенностей. Так, по данным переписи за 2014 год население Монголии составляет около 2 881 000 человек, из них молодежи в возрасте от 16 до

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ. «Общественное сознание современной молодежи Монголии», проект № 15-23-03001

39 лет 1 247 387 человек (43,3%; источник: <http://knoema.ru/atlas/Монголия>). И здесь на этапе планирования соцопроса, естественно, возникают вопросы о структуре и оптимальном объеме выборки, которая будет отражающей основные свойства (общественное сознание) генеральной совокупности (молодежь Монголии) и при этом позволит изучить влияние на них социальных факторов (пол, возраст, образование, род деятельности, место жительства). Основным объективным методом решения данных вопросов является применение вероятностного математического аппарата для анализа объема выборки, основанной на теории распределения случайных величин.

### 1. Цель исследования

Определить требуемый минимальный объем и структуру выборки для исследования общественного сознания современной молодежи Монголии с учетом возможности анализа влияния на него социальных факторов.

### 2. Объем выборки для описания общих свойств молодежи Монголии

Считается, что выборка будет репрезентативной, если она будет отражать (описывать) характеристики генеральной совокупности с минимальной ошибкой. Для вычисления допустимой ошибки расхождения между характеристиками выборочной и генеральной совокупности  $\Delta$  используют выборочную дисперсию  $\sigma_x^2$ , число выборочных наблюдений  $n$  и  $t$ -статистику Стьюдента [1]:

$$\Delta = t \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)},$$

где  $N$  – размер генеральной совокупности. В начале нашего социологического опроса мы не можем определить или оценить дисперсию какого-либо признака, так как мы ни каких предварительных опросов не проводили. И любые экспертные оценки здесь оказываются неуместными. Поэтому в данном случае оправдано переход к исследованию понятия доли признака в общей совокупности наблюдений, которую уже можем оценить экспертным путем. Дисперсия доли будет равна:  $\sigma_x^2 = p(1-p)$ . И после некоторых преобразований получим формулу для расчета объема выборки:

$$n = \frac{1}{\frac{\Delta^2}{p(1-p)t^2} + \frac{1}{N}}$$

Используя данную формулу, рассчитаем требуемый объем выборки по каждому аймаку. Для этого примем следующие допущения относительно параметров выражения.

1. Доля респондентов (молодежи) в выбранном сегменте (аймаки), у которых имеется интересующий признак, равна 0,5, т.к. она считается максимально неопределённой. В качестве интересующего нас признака может быть, например, «считает, что у России (или США, Китай или другие страны) большой социально-экономический потенциал».

2. Уровень значимости принимается равной 0,05 и статистика  $t = 2$ , данные значения считаются общепринятыми и характеризуют требуемую достоверность результатов социологического исследования.

3. Допустимая предельная ошибка оцениваемой доли принята равной 5%.

Результаты расчетов требуемых объемов выборки с принятыми допущениями для исследования каждого района представлено в таблице 1.

Таблица 1

Расчет объема выборки для аймаков и г.Улан-Батора

№	Аймаки	Численность по возрастной категории						Объем выборки	Объем выборки с поправкой на выбросы (+20%)
		16-19	20-24	25-29	30-34	35-39	Общая		
1	Улаанбаатар	74184	116952	150537	124864	108447	574984	384	461
2	Дорнод	4966	7467	7591	6273	5647	31944	380	456
3	Сүхбаатар	4089	5554	5367	4899	4591	24500	378	454
4	Хэнтий	4987	6497	6068	5691	5460	28703	379	455
5	Тув	6146	8421	8161	7039	6551	36318	380	456
6	Говьсүмбэр	1121	1445	1620	1314	1154	6654	363	436
7	Сэлэнгэ	7131	10239	9897	8478	7856	43601	381	457
8	Дорногоби	4072	5826	6512	5617	5065	27092	379	455
9	Дархан -Уул	6573	9626	9616	7886	7565	41266	381	457
10	Умнугоби	4119	5656	6730	5291	4278	26074	379	454
11	Дундгоби	3396	4041	3773	3491	3302	18003	376	451
12	Орхон	6072	9063	9662	7598	6786	39181	380	457
13	Увурхангай	8903	10852	10116	8733	8347	46951	381	457
14	Булган	4407	5587	4977	4499	4592	24062	378	454
15	Баянхонгор	6638	8379	7747	6564	6071	35399	380	456
16	Архангай	7500	9469	8207	6856	6824	38856	380	456

17	Хөвсгөл	9150	12472	11528	9493	9433	52076	381	458
18	Завхан	5410	6418	5301	5380	5447	27956	379	455
19	Гоби-Алтай	4640	5631	4837	4401	4345	23854	378	454
20	Баян-Улгий	6906	8872	8531	7207	6199	37715	380	456
21	Ховд	7156	8167	6875	5772	5679	33649	380	456
22	Увс	5400	6193	6203	5519	5234	28549	379	455
Всего		192966	272827	299856	252865	228873	1247387	384	461

Также можно заметить в формуле, а также в таблице, что при размере генеральной совокупности более 5 000 ее величина не так существенно влияет на размер выборки, поэтому формула в итоге может принять следующий вид:

$$n = \frac{p(1-p)t^2}{\Delta^2}$$

Таким образом, при размере генеральной совокупности более 5000 достаточно включить в выборку 400 ее представителей. Если учесть вероятность браковки некоторых результатов (как правило поправка составляет 20%), то достаточно сформировать объем выборки равный 480.

### 3. Объем выборки для изучения влияния социальных факторов

При полученном выше объеме выборки провести анализ влияния социальных факторов с необходимой объективностью может оказаться невозможным, в силу многозначности некоторых факторов. Дело в том, что каждый уровень (значение) фактора требует определенное количество наблюдений (группа респондентов) для того чтобы адекватно его представить и иметь возможность сравнить с другими. Решается задача определения искомого минимального объема выборки, позволяющей исследовать влияния факторов, с помощью теории анализа мощности статистических критериев [1, 2].

Итак, в исследовании рассматривается влияние следующих 4 социальных факторов.

1. *Возраст (лет):* 16-19; 20-24; 25-29; 30-34; 35-39.

2. *Образование:* неполное среднее; среднее; средне-специальное, незаконченное высшее (студент вуза); высшее.

3. *Род занятий респондентов:* работник сельского хозяйства (скотовод, земледелец и т.п.); наемный рабочий (рабочий на производстве, строитель, инженер и т.п.); служащий (служащий в государственно-управленческом аппарате, образовании, здравоохранении, военный и т.п.); обучающийся (школьник, студент); творческая и интеллектуальная



деятельность (культура, искусство, наука и т.п.); предприниматель (торговля, сфера услуг и т.п.); безработный.

*4. Пол респондентов: мужской; женский.*

Среди данных категориальных факторов наибольшее количество значений (7 вариантов) имеет фактор отражающий род занятий респондентов. И именно этот фактор будет предъявлять наибольшие требования к объему выборки для определенного аймака (группы аймаков или город). Данные получаемые по всем уровням факторов будут иметь частотный вид. И для сравнения определенной пары групп (совокупностей), например, рабочих с предпринимателями, по интересующим признакам будет применяться z-критерий на основе пропорций. Объем выборки в таком случае будет вычисляться по следующей формуле:

$$n = (A + B)^2 \frac{p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2)}{(p_1 - p_2)^2},$$

где n – объем выборки для каждой группы;  $p_1$  – первая частота (доля);  $p_2$  – вторая частота;  $(p_1 - p_2)$  – оцениваемое различие; A – параметр, зависящий от уровня значимости (статистика Стьюдента, обычно равно 1,96 при 5% уровне значимости); B – параметр, зависящий от мощности критерия (обычно равно 0,84 при мощности 80%).

В результате проведенных расчетов с помощью программы Statistica (модуль «Анализ мощности») получены следующие данные (табл.2). Зависимость объема выборок от мощности двустороннего z-критерия для двух пропорций отражает график на рисунке 1.

Таблица 2

Результаты расчета объема выборки для двух пропорций

№	Параметры анализа	Значение
1	Пропорция первой совокупности P1	0,7
2	Пропорция второй совокупности P2	0,5
3	Ошибка 1 рода (Alpha)	0,05
4	Требуемая мощность (P)	0,80
5	Объем выборки N1	93
6	Объем выборки N2	93

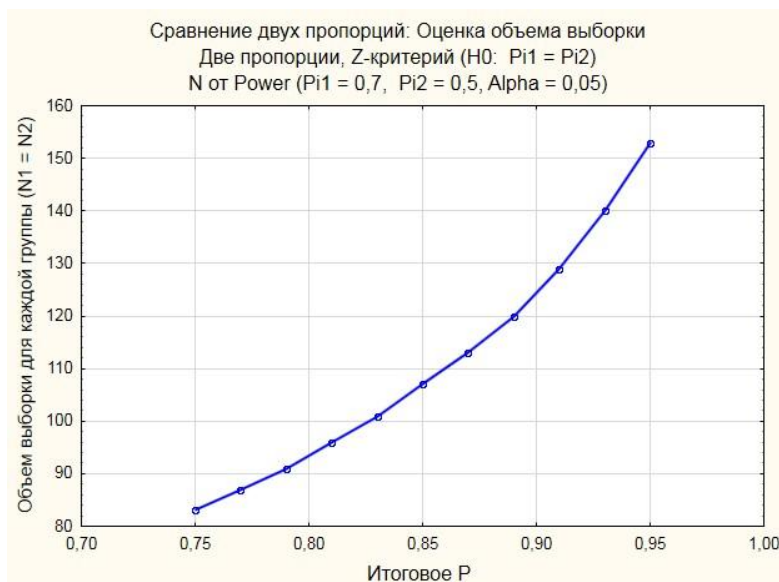


Рис.1. Зависимость объем выборки (N) от мощности критерия (P)

Таким образом, для анализа влияния данного фактора потребуется 93 наблюдений по каждому уровню фактора (для их сравнения), т.е. требуется  $n = 93 * 7 = 651$  испытуемых для того чтобы выявить разность пропорции между совокупностями 20% ( $0,7-0,5=0,2$ ) при мощности критерия равным 80% и уровне достоверности 5%. Принятые значения мощности критерия и уровня достоверности считаем достаточным для данного социологического исследования. Если учесть поправку на выбросы 20%, то в итоге мы получим *минимальный требуемый объем выборки равный 782*. Аналогичные вычисления можно провести и для остальных факторов. При вводе тех же значений параметров для остальных социальных факторов мы получим то же самое значение – 93 респондента для каждого уровня ( $93*120\%=112$  с учетом поправки на выбросы).

Структуру выборки при выше описанных условиях можно наглядно представить в виде дерева (рис.2). Набор респондентов в соцопросе должно быть таким, что все условия каждой вершины дерева выполнялись.

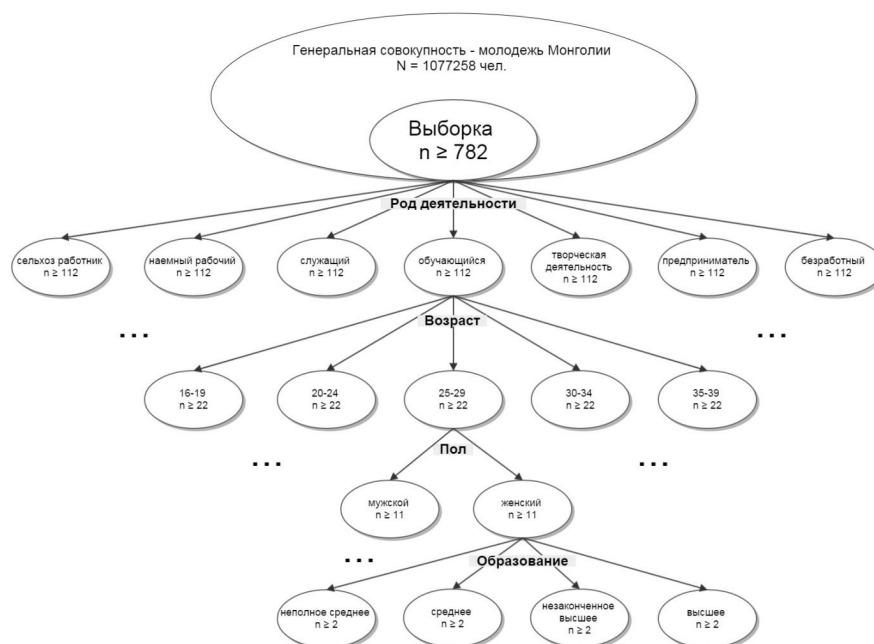


Рис.2. Структура выборки для социологического опроса молодежи Монголии

### Заключение

Из проведенного анализа можно сделать следующий вывод. Для адекватной оценки общественного сознания молодежи Монголии (одного из аймаков, г.Улан-Батора) потребуется объем выборки равный 480 респондентов. Если, кроме этого, предполагается изучение влияния социальных факторов, то объем необходимо увеличить до 782 респондентов. И при этом по каждой категории всех четырех социальных факторов должно быть не менее 112 человек с учетом поправок на выбросы.

### Литература

1. John M. Castelloe. Sample Size Computations and Power Analysis with the SAS System / SUGI Proceedings, 2000 – SAS Institute Inc. – Режим доступа : <http://pubhealth.spb.ru/SASDIST/SScomp.htm>
2. Lemeshko B.Yu., Gorbunova A.A., “Application and Power of the Non-parametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit”, *Meas. Tech.*, 56:5 (2013), 465–475.

---

*Цыбиков Анатолий Сергеевич*, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник Научно-образовательного и инновационного центра системных исследований и автоматизации Бурятского государственного университета, e-mail: cas313@rambler.ru

*Нямхуу Батжаргал*, профессор Института иностранного языка Монгольского университета науки и технологий, e-mail: intel\_bat@yahoo.com

*Дагбаев Эрдэм Данзанович*, доктор социологических наук, профессор Кафедры политологии и социологии Бурятского государственного университета, e-mail: edagbaev@mail.ru

*Дармаев Тумэн Гомбоцыренович*, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией вычислительных и геоинформационных систем Бурятского государственного университета, e-mail: dtumen@mail.ru

*Tsybikov Anatoly Sergeevich*, senior researcher, scientific and educational innovation center of system research and automation, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, e-mail: cas313@rambler.ru

*Nyamhu Batjargal*, Professor of Mongolian University of Science and Technology, e-mail: intel\_bat@yahoo.com

*Dagbaev Erdem Danzanovich*, Doctor of social sciences, professor of Political Science and Sociology of the Buryat State University, e-mail: edagbaev@mail.ru

*Darmaev Tumen Gombotsyrenovich*, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, head of laboratory of calculation and geoinformational technologies, scientific and educational innovation center of system research and automation, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, e-mail: dtumen@mail.ru

### **3. Информационные системы и технологии**

УДК 004.424

© *А. Ю. Ткаченко*

#### **ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ГРАФА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАДИГМЫ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

В данной статье приведена методика построения компонента для проектирования графов и конечных автоматов с использованием разделения функционала на отдельные классы и объекты. В статье представлены возможности применения свойств абстракции, полиморфизма и наследования для обеспечения компонента дополнительным функционалом при помощи реализации собственных классов, а также свойство инкапсуляции, позволяющее скрыть критические данные и функционал компонента от программиста. Представлены основные сущности, необходимые для визуализации графа и способы отображения вершин и ребер на конечной координатной оси вывода рисунка. Приведен способ организации взаимодействия реализованных классов между собой для выполнения построения, визуализации и обеспечения человеко-машинного взаимодействия пользователя с проектируемым графом. Представлены методы по оптимизации нагрузки на графическую подсистему при помощи использования буферизации и вывода только видимой части графа.

**Ключевые слова:** граф, объектно-ориентированное программирование, проектирование, технологическая карта, сетевой график.

© *А. Ю. Tkachenko*

#### **VISUALIZATION OF GRAPH BY USING PARADIGM OF OBJECT-ORIENTED PROGRAMMING**

This article describes a method of constructing a component for the design of graphs and finite state machines using separation of functionality into separate classes and objects. The article presents possibilities of application properties, abstraction, polymorphism and inheritance component to provide additional functionality through the implementation of your own classes, as well as the encapsulation that hides critical data and the functionality of the component from the programmer. The basic entity needed to render the graph and how to display vertices and edges on a target coordinate axis of the picture. Shows the way of interaction between implemented classes used to build, visualize, and provide human-machine user interaction with the projected graph. Presents methods for optimizing the workload on the graphics subsystem by using buffering and outputting only the visible part of the graph.

**Keywords:** graph, object-oriented programming, design, process map, roadmap.

### Введение

Программное обеспечение, использующее в своей работе графы и конечные автоматы, изо дня в день набирают популярность. Системы проектирования технологических процессов, процессных диаграмм и схем взаимодействия немислимы без визуализации и проектирования графов в графическом виде на экране монитора.

В отличие от представления графа в виде списков, матриц смежности, матриц инцидентности – графический вид обеспечивает удобное для конечного пользователя, как манипулирование, так и восприятие информации, заложенной в логику системы проектирования.

### 1. Постановка задачи

Для построения сложных систем и комплексов в последнее время применяется объектно-ориентированный подход при написании компонентов и программного обеспечения. Чем больше и сложнее программа, тем важнее становится разбить ее на небольшие, четко очерченные части. Чтобы побороть сложность, необходимо абстрагирования от мелких деталей.

В основе объектно-ориентированной парадигмы лежат свойства абстракции, наследования, инкапсуляции и полиморфизма, правильное применение которых позволит обеспечить согласованность и качественно внутренней архитектуры сложных программных продуктов, а также придать данной системе возможность расширяться за счет написания компонентов, унаследованных от уже существующих компонентов.

Целью данной работы является составление методики разработки компонента визуализации графа с использованием парадигмы объектно-ориентированного программирования, а также составление способа реализации расширения функционала реализованного компонента.

### 2. Применение объектно-ориентированного подхода

Для применения объектно-ориентированного подхода при проектировании компонента, первоначально необходимо разделить весь компонент на отдельные сущности – классы. В качестве основных классов, при подходе к разработке компонента для визуализации и проектирования графа будут выступать:

**Классы объектов графа** – являющиеся сущностью, отвечающей за поведение и отображение ребер и вершин графа.

**Классы модификаторы** – набор классов, предназначенных для выполнения преобразования координатной сетки, с целью изменения масштаба и положения графа на экране монитора.

**Классы способа визуализации** – сущности, реализующие различные способы визуального построения ребер графа на двумерной плоскости.

Сюда относятся ортогональный и сеточный такие способы визуализации.

**Классы алгоритмов** – сущности, выполняющие обработку графов, в соответствии с заложенным алгоритмом. К таким алгоритмам можно отнести: нахождение кратчайшего и критического путей между двумя вершинами при помощи алгоритма Дейкстры, построение остовного дерева, нахождение эйлера цикла.

Далее, для каждого класса необходимо определить методы и события, реализующие его основное поведение, инкапсулировать наиболее критичные данные и методы от несанкционированного доступа, а также определить методы и события, которые будут использоваться для расширения функционала компонента при помощи свойства полиморфизма. Для этого отдельно рассмотрим реализацию каждого класса.

**Классы объектов графа** реализуют хранения и манипулирование данными о ребрах и вершинах графа, а также выполняют функции визуализации и человеко-машинного взаимодействия с объектами графа.

На рис. 1. представлена диаграмма наследования классов объектов графа. Во главе классов лежит абстрактный класс TDKGraphObject, реализующий общий для всех объектов графа функционал, такой как размеры, занимаемые объектом при его отображении на мониторе, хранение адреса памяти привязанной к объекту дополнительной информации, а также основные события, такие как изменение размеров и положения объектов, изменение состояния объектов.

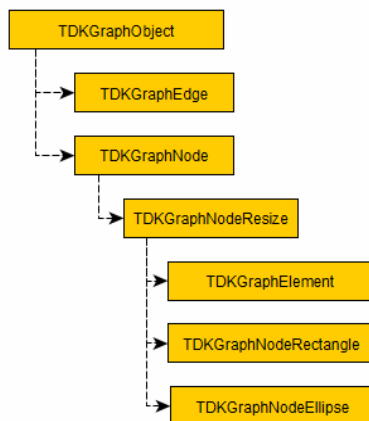


Рис. 1. Диаграмма наследования классов объектов графа

От абстрактного класса TDKGraphObject унаследованы отдельные классы реализующие поведение свойственное ребрам TDKGraphEdge и вершинам TDKGraphNode.

Для ребер, дополнительно хранятся ссылки на начальную и конечную вершину графа TDKGraphNode, а также информацию об ортогональном расположении ребер графа. Для вершин дополнительно хранится информация об их координатах.

От класса вершин унаследованы классы, реализующие отображение

вершин графа в разных видах – прямоугольник или эллипс.

Для осуществления человеко-машинного взаимодействия в классе реализован метод `PointIn`, позволяющий определять попадание курсора мыши на объект графа, основываясь на классе объекта графа и информации содержащейся о данном объекте. Работа данного функционала основывается на использовании свойства полиморфизма, при котором для всех классов объектов графа имеется метод с одним интерфейсом, но каждый последующий унаследованный класс переопределяет поведение данного метода в соответствии со своим предназначением.

Таким образом, при движении курсора по координатной сетке графа производится вызов метода `PointIn` для каждого объекта графа, а объект, в свою очередь выполняет функционал в соответствии со своим классом. Так, для ребра выполняется поиск принадлежности точки всем сегментам ломаной линии ребра, а для вершины типа эллипс выполняется поиск принадлежности точки к заданному эллипсу.

При построении графа, размер которого не помещается на экран монитора, возникает необходимость уменьшения масштаба отображения, либо прокрутка графа по оси абсцисс и ординат. Выполнение данных действий достигается путем применения цепочки **классов модификаторов**, которые отвечают за преобразования над расположением и масштабом вершин и ребер при выводе их на конечную координатную сетку и отображение на экране монитора. На рис. 2 изображена диаграмма наследования классов модификаторов.

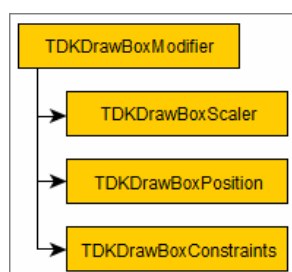


Рис. 2. Диаграмма наследования классов модификаторов

Каждый из приведенных на диаграмме классов выполняет задачу преобразования входных координат в соответствии со своим предназначением. Рассмотрим работу каждого из модификатора.

`TDKDrawBoxScaler` отвечает за масштабирование конечного отображения координат на координатной сетке, которое задается в виде коэффициента  $S$ . При  $S = 1$  – масштаб равен 1:1, при  $S < 0$  – масштаб уменьшится на заданный коэффициент, а при  $S > 0$  – масштаб увеличится на заданный коэффициент.

`TDKDrawBoxPosition` предназначен для смещения отображения рисунка относительно видимой части окна вывода. Смещение задается в пикселях отдельно для оси абсцисс  $Dx$  и ординат  $Dy$ .



TDKDrawBoxConstraints позволяет задавать границы выводимого рисунка при выполнении смещений по оси абсцисс Dx и ординат Dy.

Для каждой точки A, проходящей через данную цепочку модификаторов применяется преобразование (1), в результате которого получается точка A', выводимая на экране монитора.

$$A' = ((Ax + Dx) * S, (Ay + Dy) * S) \quad (1)$$

На рис. 3 изображен вывод одного графа с разными значениями коэффициента масштабирования и смещения.

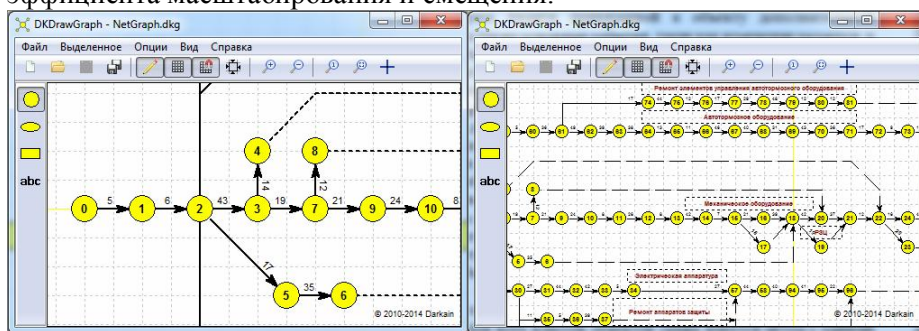


Рис. 3. Масштабирование и смещение при визуализации графа

**Классы способа визуализации** предназначены для задания поведения при построении ребер графа. Для визуализации графа в текущей работе используется ортогональный и сеточный способ визуализации. При ортогональной визуализации построение сегментов ребер происходит параллельно осям координат, а при сеточном способе сегменты ребер не могут отображаться под произвольным углом относительно осей координат. На рис. 4 изображена диаграмма классов способов визуализации.

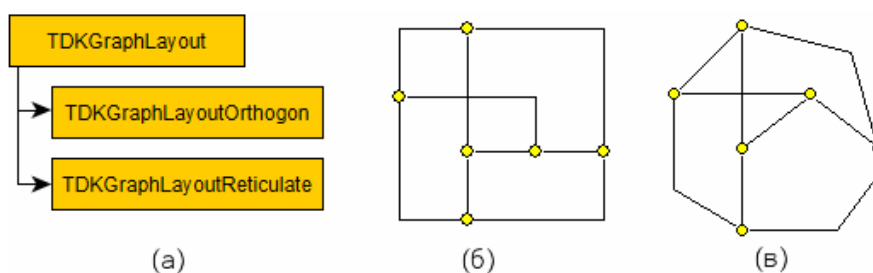


Рис. 4. Диаграмма наследования классов визуализации графа (а), ортогональная визуализация графа (б), сеточная визуализация графа (в)

**Классы алгоритмов** предназначены для наделяния компонента возможностью выполнения различных алгоритмов над графом. Для реализации необходимого алгоритма необходимо унаследовать свой класс от абстрактного TDKGraphAlgorithm и запрограммировать необходимые действия над данными, хранящимися в графе и способом его визуализации на

экране монитора.

Каждый класс алгоритмов получает на вход граф в виде списка вершин и ребер, выполняет свои внутренние расчеты. Отображение результатов производится при помощи перехвата метода рисования вершин и ребер OnDrawObject, а также метода рисования холста графа OnDrawGraph.

На рис. 5 приведен пример выполнения алгоритма поиска кратчайшего пути между 14 и 22 вершиной графа. При этом найденный путь выделен другим цветом и утолщенными стрелками.

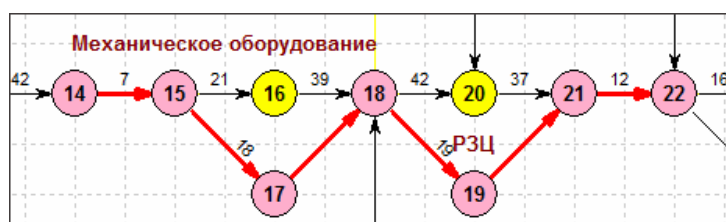


Рис. 5. Применение алгоритма поиска кратчайшего пути к графу

После того, как все сущности определены и имеют свое поведение, необходимо объединить их работу в единую, взаимосвязанную систему. Для взаимодействия классов между собой используется класс TDKCustomGraph, изображенный на рис. 6, который является связующим звеном между классами объектов, модификации, отображения и алгоритмов графа. Данный класс отвечает за процесс выполнения отдельных этапов построения и управления графом, производит необходимые промежуточные вычисления перед передачей информации в TDKCustomDrawGraph, а также координирует работу классов алгоритмов и передает подготовленные для вывода данные в TDKCustomDrawBox.

В свою очередь класс TDKCustomDrawBox выполняет визуализацию графа на экране монитора, а также осуществляет человеко-машинное взаимодействие с пользователем при помощи класса TDKDrawBoxController, который выполняет обнаружение объекта в координате, над которым находится курсор мыши и предлагает пользователю выполнить соответствующие действия над графом, такие, как добавление и удаление вершин и ребер.

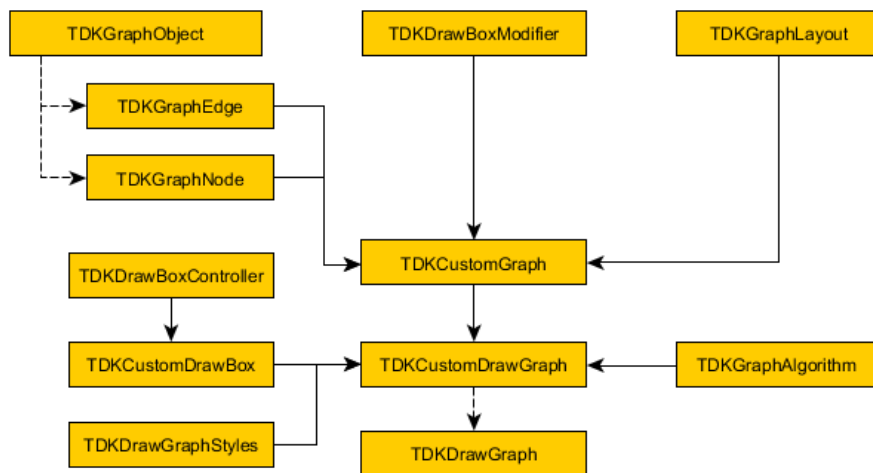


Рис. 6. Диаграмма взаимодействия классов

Стоит отметить, что в результате использования в работе свойств объектно-ориентированной парадигмы программирования, такие как наследование и полиморфизм, любой программист может реализовать необходимый ему дополнительный функционал. Для расширения функционала программисту необходимо только унаследовать свой класс от уже существующего абстрактного или реализованных другими программистами классов, а затем переопределить методы заложенные, необходимые для работы класса в соответствии со своими предпочтениями.

При этом свойство инкапсуляции не позволит нарушить основную логику при построении графа, заложенную в абстрактные классы и методы, поскольку реализация внутренней работы классов скрыта от программиста и ему предоставляется только возможность использования только разрешенных методов, которые контролируют внутреннее состояние классов и основанных на их основе объектов.

### 3. Визуализация графа

Визуальное отображение графа на экране монитора требует выполнение операций графического вывода. При увеличении количества объектов, выводимых на экран, возрастает нагрузка на графическую подсистему. С целью уменьшения данной нагрузки в представленной работе разработан класс `TDKCustomDrawBox`, который является холстом для визуализации графа, и в котором применяется несколько методов по оптимизации отображения объектов графа:

**Метод 1.** Вывод только видимой части. Для каждого объекта, при изменении размеров или положения, вычисляется прямоугольная область, описывающая данный объект. В дальнейшем, в процессе визуализации, проверяется условие попадания вычисленной области в окно вывода. Если область попадает, то производится рисование объекта, если область не

попадает в окно вывода, то рисование данного объекта не производится.

**Метод 2.** Вывод построенного изображения через буфер. При этом каждый новый цикл вывода графа на экран сопровождается предварительной отрисовкой графа в буфере, размер которого соответствует размеру экрана вывода. После полного построения кадра в буфере производится его вывод на экран при помощи WinAPI функции BitBlt.

**Метод 3.** Применение допуска. Каждое перемещение объекта или смещение холста вывода сопровождается полной перерисовкой всего холста. Для уменьшения количества перерисовок в работе используется допуск R, задаваемый в пикселях, при достижении которого выполняется полная перерисовка холста.

Применение на практике всех трех методов позволило снизить нагрузку на графическую подсистему, тем самым повысить производительность вывода графа. Для вычисления эффективности методов были проведены замеры производительности вывода изображения на экран монитора, в рамках которых производилась визуализация графа с различным количеством объектов и различным соотношением попадания объектов на экран. Результаты замеров представлены в таблице 1 и показывают, что применение данных методов позволяет уменьшить нагрузку при визуализации графа в 24 раза, а также увеличить количество объектов в отображаемом графе в 100 раз, при условии, что в видимую часть будет попадать до 500 объектов, что вполне достаточно для отображения графа.

Таблица 1

*Серия проведенных замеров производительности вывода графа на экран монитора*

Общее количество объектов, шт	Количество объектов, попадающих в область видимости, шт	Производительность вывода на экран без применения методов оптимизации. FPS	Производительность вывода на экран с применением методов оптимизации. FPS
500	500	12	277
500	50	16	395
5000	5000	1	26
5000	50	-	37
50000	50	-	8
50000	500	-	8
500000	50	-	1

### Заключение

В работе представлена методика построения компонента с использованием объектно-ориентированного подхода к проектированию классов программного обеспечения. При этом удалось разделить весь процесс создания компонента визуализации графа на отдельные этапы, что позво-

лило, во-первых – упростить весь процесс построения сложной системы организации построения и управления графом, а во-вторых – предоставило программистам возможность расширять функционал компонента, абстрагируясь от деталей реализации компонента.

Приведенные методы оптимизации визуализации графа позволили снизить нагрузку на графическую систему ЭВМ, тем самым увеличить количество отображаемых объектов графа, а применение допуска позволило уменьшить отклик при изменении масштаба и позиции отображаемого графа.

### **Литература**

1. Касьянов В. В. Графы в программировании. Обработка, визуализация и применение. – СПб: BHV-СПб, 2003. – 1104 с.
2. Takao Nishizeki, Md Saidur Rahman. Planar Graph Drawing: World Scientific, 2004. – 312 с.
3. Трахтенброт Б.А., Барздин Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970. 400 с.
4. Константайн Л., Локвуд Л. Разработка программного обеспечения. СПб., Питер, 2004. 592 с.
5. Ткаченко А. Ю. Методика контроля полноты информации по технологическим процессам в реляционных базах данных // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2015. – № 2. – С. 75–79.

### **References**

1. Kasyanov V. V. Graphs in programming. Processing, visualization and application. – St. Petersburg: BHV-SPb, 2003. – 1104 p.
2. Takao Nishizeki, Md Saidur Rahman. Planar Graph Drawing: World Scientific, 2004. – 312 с.
3. Trakhtenbrot B. A., Barzdin J. M. Finite automata (behavior and synthesis). M.: Nauka, 1970. 400 p.
4. Constantine L., Lockwood L. Software Development. St. Petersburg, Peter, 2004. 592 p.
5. Tkachenko A. Yu., Method of monitoring completeness of the information on technological processes in relational database systems // Modern technologies. System analysis. Modeling. – 2015. – No. 2. – Pp. 75-79.

*Ткаченко Антон Юрьевич*, аспирант Иркутского государственного университета путей сообщения, e-mail: tkachenkoayu@mail.ru

*Tkachenko Anton Yurievich*, Postgraduate student of Irkutsk State Transport University, e-mail: tkachenkoayu@mail.ru

#### 4. Управляемые системы и методы оптимизации

УДК 517.977

© *И. Д. Бурлаков*

##### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В статье рассматривается проекционный метод нелокального улучшения и приводится результат численного эксперимента по анализу эффективности этого метода в нелинейной задаче оптимального управления.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, нелокальное улучшение, вычислительный эксперимент, сравнительный анализ, проекционный метод, функция Понтрягина, численный метод.

© *I. D. Burlakov*

##### COMPARATIVE ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF THE PROJECTION METHOD OF NONLOCAL IMPROVEMENTS OF CONTROL

A projection method for nonlocal improvement and results of numerical experiment in effectiveness analysis of this method in the nonlinear optimal control problem is considered.

**Keywords:** optimal control problem, nonlocal improvement, numerical experiment, comparative analysis, projection method, the Pontryagin function, numerical method.

##### Введение

Приближенные методы решения задач оптимального управления продолжают развиваться по разным направлениям в работах многих исследователей (А.В. Аргучинцев, А.С. Булдаев, В.И. Гурман, В.А. Дыхта, В.И. Зубов, В.Б. Колмановский, В.Ф. Кротов, В.А. Срочко, А.И. Тятюшкин, Р.П. Федоренко, Ф.Л. Черноусько и другие). В частности, В. Ф. Кротов в работе [9] описал общий метод глобального улучшения управлений, близкий к так называемым нелокальным методам улучшения

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03680-а)

в дифференциальных системах, разрабатываемых в работах В. А. Срочко и А. С. Булдаева [2, 3, 4, 7].

Методы нелокального улучшения в отличие от локальных методов (например, метода условного градиента) не рассматривают операции слабого или игольчатого варьирования управления на каждой итерации с параметрическим поиском (который является довольно трудоемким) в достаточно малой окрестности улучшения. Основой методов нелокального улучшения в различных классах задач оптимального управления являются формулы приращения целевых функционалов без остаточных членов разложения. В результате последовательного решения задач улучшения управления генерируется релаксационная последовательность управлений, обладающая возможным свойством улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума, включая особые управления.

В статье проводится сравнительный анализ эффективности проекционного метода нелокального улучшения на тестовых задачах.

### **1. Постановка задачи**

Рассматривается следующий класс задач оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf, \quad (3)$$

где  $x(t) \in R^n$  - вектор состояния,  $u(t) \in R^r$  - вектор управления. В качестве допустимых управлений рассматривается множество  $V$  кусочно-непрерывных на  $[t_0, t_1]$  функций со значениями в выпуклом компактном множестве  $U \subset R^r$ . Промежуток управления -  $[t_0, t_1]$  и начальное состояние  $x_0$  заданы. Задача (1) – (3) является задачей оптимального управления со свободным правым концом.

Предполагаются выполненными следующие условия:

1) функция  $\varphi(x)$  непрерывно-дифференцируема на  $R^n$ , вектор-функция  $F(x, u, t)$ ,  $f(x, u, t)$  и их производные  $F_x(x, u, t)$ ,  $F_u(x, u, t)$ ,  $f_x(x, u, t)$ ,  $f_u(x, u, t)$  непрерывны по совокупности аргументов  $(x, u, t)$  на множестве  $R^n \times U \times T$ ;

2) функция  $f(x, u, t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$  в  $R^n \times U \times T$  с константой  $L > 0$

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|.$$

Эти условия гарантируют существование и единственность решения  $x(t, v)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  системы (1) – (2) для любого допустимого управления  $v(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

Решать поставленную задачу (1) – (3) будем при помощи модифицированного проекционного метода нелокального улучшения управлений с дифференциально-алгебраической сопряженной системой [2, 3, 4].

Сначала рассмотрим саму дифференциально-алгебраическую сопряженную систему [3, 4]:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x^0(t), u^0(t), t) - r(t), \quad (4)$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x^0(t_1)) - q, \quad (5)$$

$$H(p(t), x(t), u^0(t), t) - H(p(t), x^0(t), u^0(t), t) = \langle H_x(p(t), x^0(t), u^0(t), t) + r(t), \Delta x(t) \rangle, \quad (6)$$

$$\varphi(x(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \langle \varphi_x(x^0(t_1)) + q, \Delta x(t_1) \rangle, \quad (7)$$

где  $H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t)$  - хорошо известная функция Понтрягина,  $H_x(p, x, u, t)$ ,  $\varphi_x(x(t_1))$  - производные соответствующих функций по  $x$ .  $u^0(t) \in V$  - допустимое начальное значение управление,  $x^0(t)$  - решение уравнения (1) для этого начального управления,  $\Delta x(t) = x(t_1) - x^0(t_1)$ .

Величины  $r(t)$  и  $q$  всегда можно выразить из соответствующих алгебраических уравнений (6) и (7) (возможно и не единственным образом) [3, 4] и, таким образом, система (4) – (5) всегда может быть сведена к вспомогательной дифференциальной сопряженной системе.

Следует заметить, что если в задаче (1) – (3)  $f, F$  линейны по  $x$ , то из [3, 4] следует, что  $r(t) \equiv 0$ , а если  $\varphi$  линейна, то  $q = 0$ . В нелинейном случае, если в некоторый момент времени  $t \in T$   $x^0(t) = x(t)$ , то полагаем  $r(t) \equiv 0$ . Если при этом  $t = t_1$ , то  $q = 0$ .



Далее для допустимого управления  $u \in V$  и фиксированного параметра  $\alpha > 0$  рассмотрим проекционное отображение:

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U(u(t) + \alpha H_u(p, x, u, t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где  $P_U$  - оператор проектирования на множество  $U$  в евклидовой норме,  $H_u(p, x, u, t)$  - производная функции Понтрягина по управлению.

Дифференциальный принцип максимума (ДПМ) в задаче (1) – (3) для управления  $u \in V$  с помощью отображения  $u^\alpha$  представляется в виде:

$$u(t) = u^\alpha(p(t, u, v), x(t, u), t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (8)$$

где  $p(t, u, v)$  - сопряженная переменная. Для выполнения ДПМ достаточно проверить условие (8) хотя бы для одного  $\alpha > 0$ .

Для заданных  $\alpha > 0$  и  $u^0 \in V$  определим отображение  $w^\alpha$  с помощью соотношения

$$w^\alpha(p, x, t, s) = P_U(u^0(t) + \alpha(H_u(p, x, u^0(t), t) + s(t))), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Параметр проектирования  $\alpha > 0$  рассматривается в качестве параметра возмущения. Уравнение (1) в данном случае примет вид:

$$\dot{x}(t) = f(x)(x(t), w^\alpha(p(t), x(t), t, s(t)), t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (9)$$

Итерационный процесс при фиксированном  $\alpha > 0$  и заданном  $u^0 \in V$  имеет вид

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^0(t) + \alpha H_u(p^k(t), x^k(t), u^k, t) + s(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где на начальной итерации (нулевой итерации) задается начальное приближение  $u^0 \in V$ .  $s(t)$  определяется из уравнения

$$\begin{aligned} & H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^k(t), t) - \\ & - H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t) = \\ & \left\langle H_u(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t) + s(t), u^k(t) - u^0(t) \right\rangle, \quad (10) \end{aligned}$$

$x^k(t)$ ,  $p^k(t)$  являются решениями системы (9) и дифференциально-алгебраической сопряженной системы (4) – (7) на  $k$  итерации, соответственно. В случае линейной по управлению задаче (1) – (3)  $s(t) = 0$ ,  $t \in T$ . [3, 4].

Вычисляя  $s(t)$ ,  $r(t)$  и  $q$  мы можем применить некоторые условия [5, 6]. Сначала опишем условия для нахождения  $s(t)$ :

1. Если все компоненты  $u^k(t) = u^0(t)$ , то алгебраическое уравнение (10) выполняется тождественно. В этом случае компоненты  $s(t)$  могут принимать произвольное значение, тогда, выбираем значения всех компонент  $s(t)$ , исходя из непрерывности, т.е. полагая равным значению  $s(t)$  в соседнем левом узле. При этом, если  $t = t_0$  (начальный момент), то слева нет узла, а значит, выбираем любое значение, например  $s(t_0) = 0$ , для всех компонентов;

2. Если, хотя бы одна компонента вектора  $u^k(t) \neq u^0(t)$ , то именно для этой компоненты однозначно определяется соответствующая компонента  $s(t)$  из формулы (10), один из вариантов такого определения:

$$s_k(t) = \frac{\Delta_{u(t)} H(p, x, u, t)}{\Delta u_k(t)} - H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t),$$

где  $\Delta_{u(t)} H(p, x, u, t) = H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^k(t), t) - H(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t)$  и  $\Delta u_k(t) = u^k(t) - u^0(t)$ . Причем все остальные компоненты нужно положить равными по непрерывности значениям в левом соседнем узле. Но если при этом  $t = t_0$ , то полагаем, что эти остальные элементы равны нулю.

Теперь покажем условия для определения  $r(t)$  и  $q$ . Но для начала перепишем дифференциально-алгебраическую сопряженную систему (4) – (7) в итерационном виде:

$$\dot{p}^{k+1}(t) = -H_x(p^{k+1}(t), x^0(t), u^0(t), t) - r(t), \quad (11)$$

$$p^{k+1}(t_1) = -\varphi_x(x^0(t_1)) - q, \quad (12)$$

$$H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t) = \langle H_x(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t) + r(t), x^k(t) - x^0(t) \rangle, \quad (13)$$

$$\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \langle \varphi_x(x^0(t_1)) + q, x^k(t_1) - x^0(t_1) \rangle. \quad (14)$$

где  $p^k(t) = p(t, u^0, u^k)$ ,  $x^k(t) = x(t, u^k)$ . Таким образом, вычисляя  $r(t)$  и  $q$  из уравнений (11) – (14) необходимо учитывать следующие условия:

1. Если все компоненты  $x^k(t) = x^0(t)$ , то алгебраическое уравнение (13) выполняется тождественно. В этом случае компоненты  $r(t)$  могут принимать произвольное значение, тогда, выбираем значения всех компонент  $r(t)$ , исходя из непрерывности, т.е. полагая равным значению в соседнем правом узле. При этом, если  $t = t_1$  (конечный момент), то справа нет узла, следовательно, выбираем любое значение, например  $r(t_1) = 0$  для всех компонент. Также если в этот конечный момент выполняется  $x^k(t_1) = x^0(t_1)$  уравнение (14) обращается в тождество, поэтому задаем, например,  $q = 0$  для всех компонент;

2. Если, хотя бы одна компонента вектора  $x^k(t) \neq x^0(t)$ , соответствующая компонента  $r(t)$  однозначно определяется именно для этой компоненты из формулы (13), один из вариантов определения:

$$r_k(t) = \frac{\Delta_{x(t)} H(p, x, u, t)}{\Delta x_k(t)} - H_x(p(t, u^0, u^k), x(t, u^k), u^0(t), t),$$

где  $\Delta_{x(t)} H(p, x, u, t) = H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t)$  и  $\Delta x_k(t) = x^k(t) - x^0(t)$ . Причем все остальные компоненты нужно положить равными по непрерывности значениям в правом соседнем узле. Но если при этом  $t = t_1$ , то полагаем, что эти остальные компоненты равны нулю. Аналогичное, соответствует для  $q$  из уравнения (14).

## 2. Вычислительный эксперимент

Для сравнительного анализа рассматриваемого метода проведем вычислительный эксперимент. Вначале опишем общие параметры.

Вычисленные значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных будем запоминать в узлах равномерной сетки с шагом дискретизации  $\Delta t = 10^{-3}$  на отрезке  $[t_0, t_1]$ . В промежутках между соседними узлами сетки значение управления принимаем постоянным и равным значению управления в левом узле. Численный расчет задачи проводим до первого улучшения. Далее строим новую задачу, и повторяем итерационный алгоритм. В качестве критерия остановки выбираем условие  $|\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k)| \leq |\Phi(u^k)| \cdot \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  - заданная

точность (в примере  $\varepsilon = 10^{-4}$ ). Эффективность методов также зависит и от алгоритмов, используемых для решения вспомогательных задач, например, интегрирование дифференциальных систем. По этой причине, численное решение фазовых и сопряженных задач Коши будем осуществлять методом Рунге-Кутты-Вернера пятого или шестого порядка точности с помощью библиотеки IMSL языка Fortran PowerStation 4.0 [1].

При вычислении  $s(t)$ ,  $r(t)$  и  $q$  принимаем условия, описанные выше, только внеся некоторое изменение: мы фиксируем один из  $r_i(t)$  равным нулю и проводим дальнейшее вычисление по обычным правилам. В качестве результата выбираем наилучшее решение

**Пример 1. Оптимальная ориентация летательного аппарата в пространстве [8].**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3, \\ \dot{x}_2(t) = x_4, \\ \dot{x}_3(t) = -x_4 + u_1 \sin u_2 \\ \dot{x}_4(t) = x_3 + u_1 \cos u_2 \end{cases}$$

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 10, \quad x_4(0) = 0,$$

$$t \in [0, t_1].$$

$$\Phi(u) = t_1 + 1000 \sum_{i=1}^4 x_i^2(t_1) \rightarrow \min.$$

Проведем расчет с помощью проекционного метода нелокального улучшения и сравним с результатами, полученными в [8]. Для решения задачи введем необходимые конструкции.

Функция Понтрягина для заданной задачи записывается следующим образом:

$$H(p, x, u, t) = p_1 x_3 + p_2 x_4 + p_3 (u_1 \sin u_2 - x_4) + p_4 (x_3 + u_1 \cos u_2).$$

Градиенты:

$$H_{x_1} = 0, \quad H_{x_2} = 0, \quad H_{x_3} = p_1 + p_4, \quad H_{x_4} = p_2 - p_3,$$

$$H_{u_1} = p_3 \sin u_2 + p_4 \cos u_2, \quad H_{u_2} = p_3 u_1 \cos u_2 - p_4 u_1 \sin u_2.$$

Дифференциально-алгебраическая сопряженная система запишется в следующем виде:

$$\dot{p}_1(t) = 0, \quad p_1(t_1) = -2000x_1(t_1) - q_1,$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_2(t) &= 0, \quad p_2(t_1) = -2000x_2(t_1) - q_2, \\ \dot{p}_3(t) &= -p_1 - p_4, \quad p_3(t_1) = -2000x_3(t_1) - q_3, \\ \dot{p}_3(t) &= -p_2 + p_3, \quad p_3(t_1) = -2000x_3(t_1) - q_4.\end{aligned}$$

В исходной задаче  $f, F$  линейны по  $x$ , значит  $r_i(t) \equiv 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Для нахождения  $q$  используем формулу:

$$q_k(t) = \frac{\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1))}{x^k(t_1) - x^0(t_1)} - \varphi_x(x^0(t_1)),$$

полученную из (14), вместе с правилами описанными выше. Итерационный процесс при фиксированном  $\alpha > 0$  и заданном  $u^0 \in V$  имеет вид

$$\begin{aligned}u^{k+1}(t) &= P_u(u^0(t) + \alpha H_u(p^k(t), x^k(t), u^k, t) + s(t)), \\ t &\in [t_0, t_1],\end{aligned}$$

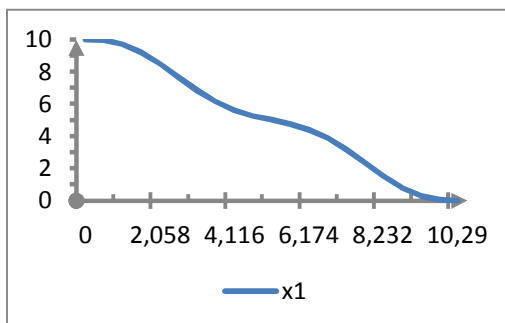
где  $s(t)$  находится по правилу выше. В качестве начального приближения выбиралось управление  $u^0(t) \equiv 0$ .

В таблице 1 приводятся результаты, полученные рассматриваемым методом (ПМНУ) и методами из работы [8] ( $\Phi^*$  обозначает наилучшее значение функционала).

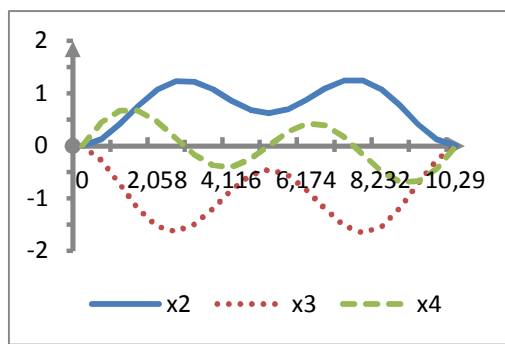
**Таблица 1.** Сравнительный анализ эффективности

Метод	$\Phi^*$	Кол-во задач Коши
1	10.285456	47422
2	10.288656	100048
ПМНУ	10.290443	33907

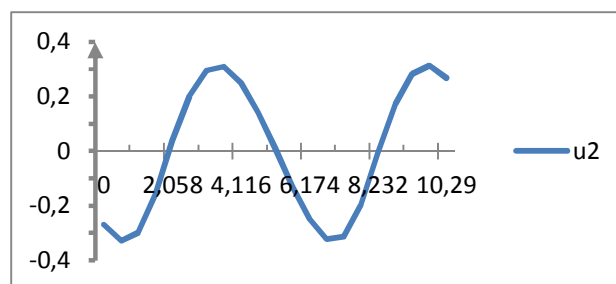
Проекционный метод для данной задачи показал меньшую трудоемкость по количеству решенных задач Коши, хотя и уступил по точности решения. На следующих рисунках представлен рассчитанный оптимальный процесс (итоговые управление и фазовые траектории):



**Рисунок 1.** Фазовая траектория  $x_1(t)$



**Рисунок 2.** Фазовая траектория  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$



**Рисунок 3.** Управление  $u_2(t)$

Итоговое управление  $u_1(t) \equiv 1, t \in [0, t_1]$  не представлено.

**Пример 2. Оптимальное управление потоком хладагента в химическом реакторе [10, с. 405 - 407]**

Рассматривается задача стабилизации химического реактора, представляющая собой аппарат с мешалкой и подведенным каналом поступления хладагента:

$$\Phi(u) = \int_0^{0.78} (x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}_1(t) = -2(x_1 + 0.25) + (x_2 + 0.5)e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} - (x_1 + 0.25)u, \quad x_1(0) = 0.05,$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.5 - x_2 - (x_2 + 0.5)e^{\frac{25x_1}{x_1+2}}, \quad x_2(0) = 0,$$

$$x_1(0.78) = 0, \quad x_2(0.78) = 0,$$

$$u(t) \in [-1, 1], \quad t \in [0, 0.78].$$

Функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  описывают соответственно отклонения температуры и концентрации. Управление  $u(t)$  характеризует поток хладагента, регулирующего необратимую экзотермическую реакцию.

В [10] Kirk D. E производит редукцию к задаче конечномерной оптимизации за счет дискретизации по функциям состояния и управления, замены производных конечными разностями по схеме Эйлера. Число моментов дискретизации не указано. В результате в [10] им были получены следующие результаты:  $x_1(0.78) = -6.167 \times 10^{-6}$ ,  $x_2(0.78) = -0.631 \times 10^{-6}$ ,  $\Phi^* \approx 0.00220$ .

Приведем решаемую задачу к виду (1) - (3), т.е. со свободным правым концом, следуя методу штрафов, при достаточно большом фиксированном штрафном коэффициенте  $M > 0$ :

$$\Phi^M = M(x_1^2(0.78) + x_2^2(0.78)) + x_3(0.78) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}_1(t) = -2(x_1 + 0.25) + (x_2 + 0.5)e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} - (x_1 + 0.25)u, \quad x_1(0) = 0.05,$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.5 - x_2 - (x_2 + 0.5)e^{\frac{25x_1}{x_1+2}}, \quad x_2(0) = 0,$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1^2 + x_2^2, \quad x_3(0) = 0$$

$$x_1(0.78) = 0, \quad x_2(0.78) = 0,$$

$$u(t) \in [-1, 1], \quad t \in [0, 0.78].$$

Функция Понтрягина для данной задачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H(p, x, u, t) = & \\
 = p_1 & \left[ -2(x_1 + 0.25) + (x_2 + 0.5)e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} - (x_1 + 0.25)u \right] + \\
 & + p_2 \left[ 0.5 - x_2 - (x_2 + 0.5)e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} \right] + p_3 [x_1^2 + x_2^2].
 \end{aligned}$$

Градиенты:

$$\begin{aligned}
 H_{x_1} &= (p_1 - p_2) \frac{50(x_2 + 0.5)}{(x_1 + 2)^2} e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} - (2 + u)p_1 + 2p_3x_1, \\
 (H_{x_1})_{x_1} &= (p_1 - p_2) \frac{100(x_2 + 0.5)(23 - x_1)}{(x_1 + 2)^4} e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} + 2p_3, \\
 H_{x_2} &= (p_1 - p_2) e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} - p_2 + 2p_3x_2, \quad (H_{x_2})_{x_2} = 2p_3, \quad H_{x_3} = 0, \\
 (H_{x_3})_{x_3} &= 0, \quad H_u = -p_1(x_1 + 0.25).
 \end{aligned}$$

Запишем получившуюся модифицированную сопряженную систему, вычислив  $r(t)$  и  $q$  по методу с условиями описанными выше:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_1 &= (p_2 - p_1) \frac{50(x_2 + 0.5)}{(x_1 + 2)^2} e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} + (2 + u)p_1 - \\
 & - 2p_3x_1 - \left( (p_1 - p_2) \frac{50(x_2 + 0.5)(23 - x_1)}{(x_1 + 2)^4} e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} + p_3 \right) y(t), \\
 p_1(0.78) &= -2Mx_1(0.78) - My(0.78), \\
 \dot{p}_2 &= (p_2 - p_1) e^{\frac{25x_1}{x_1+2}} + p_2 - 2p_3x_2 - p_3y(t), \\
 p_2(0.78) &= -2Mx_2(0.78) - My(0.78), \\
 \dot{p}_3 &= 0, \quad p_3(0.78) = -1.
 \end{aligned}$$

где

$$y(t) = x(t, v) - x(t, u)$$



Будем решать с помощью проекционного метода нелокального улучшения (ПМНУ)

$$u^{k+1}(t) = P_U \left( u^k(t) + \alpha H_u(p^k(t), x^k(t), u^k(t), t) \right),$$

$$t \in T,$$

где функции  $x^k(t)$ ,  $p^k(t)$  находятся в результате интегрирования фазовой и модифицированной сопряженной системы на текущем приближении.  $s(t) = 0$  так как задача линейна по управлению. В качестве начального приближения выбиралось управление  $u^0(t) \equiv 1$ .

Проведем расчет ПМНУ для разных значений параметра  $\alpha > 0$  и штрафного коэффициента  $M > 0$ . Наилучшее расчетное значение функционала  $\Phi^*$ , вычисленное по методу ПМНУ, наблюдалось для параметров  $\alpha = 0.13$ ,  $M = 2$ .

Значения $\alpha > 0$ и $M > 0$	Значение $\Phi^*$	$x_1(0.78)$	$x_2(0.78)$
$\alpha = 0.13, M = 2$	0.00200330	$-9.62 \times 10^{-4}$	$1.24 \times 10^{-3}$

Для сравнения проведем расчет также стандартным методом проекции градиента (МПГ) при  $M = 2$ ,  $u^0(t) \equiv 1$ , где в схеме параметрической оптимизации применим метод золотого сечения с погрешностью  $10^{-3}$ . Получаем следующий результат  $x_1(0.78) = 8.79 \times 10^{-4}$ ,  $x_2(0.78) = 7.17 \times 10^{-4}$ ,  $\Phi^* \approx 0.00200$ .

Рассчитывая же методом условного градиента (МУГ), с аналогичной погрешностью параметрической оптимизации, приходим к следующим результатам  $x_1(0.78) = -5.77 \times 10^{-4}$ ,  $x_2(0.78) = 2.07 \times 10^{-3}$ ,  $\Phi^* \approx 0.00200$ .

Метод	Значение $\Phi^*$	$x_1(0.78)$	$x_2(0.78)$
МПГ	0.00200084	$8.79 \times 10^{-4}$	$7.17 \times 10^{-4}$
МУГ	0.00199673	$-5.77 \times 10^{-4}$	$2.07 \times 10^{-3}$

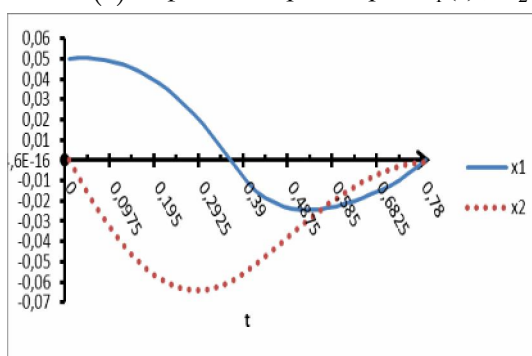
Для более удобного анализа приведем все решения в одной таблице:

**Таблица 2.** Сравнительный анализ эффективности

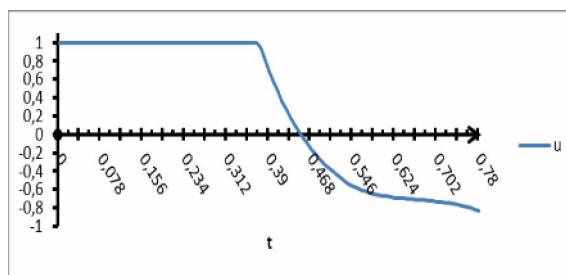
Метод	Значение $\Phi^*$	$x_1(0.78)$	$x_2(0.78)$	Число задач Коши
МПГ	0.002000	$8.79 \times 10^{-4}$	$7.17 \times 10^{-4}$	101
МУГ	0.001997	$-5.77 \times 10^{-4}$	$2.07 \times 10^{-3}$	96
ПМНУ	0.002003	$-9.62 \times 10^{-4}$	$1.24 \times 10^{-3}$	90
Методом Kirk D. E	0.00220	$-6.16 \times 10^{-6}$	$-0.63 \times 10^{-6}$	-----

Скорость сходимости ПМНУ для различных значений  $M > 0$  зависела от выбора значений параметра  $\alpha > 0$ . Например, для  $M = 2$  сходимость наблюдалась при  $\alpha \in (0; 0.4)$ , где при очень маленьких шагах скорость сходимости была медленной. Лучшая скорость по количеству решенных задач Коши наблюдалась для  $\alpha \in (0.10; 0.14)$ . При увеличении штрафного параметра, приходилось уменьшать  $\alpha$ . При этом скорость сходимости также падала.

На следующих рисунках представлен расчетный оптимальный процесс (итоговое управление  $u(t)$  и фазовые траектории  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ):



**Рисунок 4.** Фазовые траектории



**Рисунок 5.** Управление

### **Заключение**

В рамках рассматриваемых расчетных задач рассматриваемый проекционный метод нелокального улучшения управления в целом показал лучшую эффективность по количеству расчетных задач Коши по сравнению с градиентными процедурами и другими методами, при приемлемой точности решения. При этом, в отличие от градиентных методов, требующих трудоемкую настройку процедур локального варьирования управления, настройка сходимости нелокального проекционного метода осуществляется только выбором одного настроечного параметра  $\alpha > 0$ .

### **Литература**

1. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Часть 3 // О. В. Бартенев. – Москва: Диалог-МИФИ, 2001. – 368 с.
2. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем / А. С. Булдаев. – Улан-Удэ : Издательство Бурятского госуниверситета, 2008. – 260 с.
3. Булдаев А. С. Модификация метода проекций для улучшения нелинейных управлений / А. С. Булдаев, О. В. Моржин // Вестник Бурятского госуниверситета. – 2010. – Вып. 9: Математика, информатика. – С. 10–17.
4. Булдаев А. С. Улучшения управлений в нелинейных системах на основе краевых задач / А. С. Булдаев, О. В. Моржин // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика». – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 94–106.
5. Булдаев А. С. Условия улучшения и оптимальности в задачах оптимизации нелинейных управляемых систем / А. С. Булдаев, Г. Анхбаяр // Вестник Бурятского госуниверситета. – 2014. – Вып. 9(2): Математика, информатика. – С. 3–9.
6. Бурлаков И. Д. Анализ эффективности метода нелокального улучшения в задачах оптимального управления / И. Д. Бурлаков // Вестник Бурятского госуниверситета. – 2014. – Вып. 9(2): Математика, информатика. – С. 10–19.
7. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. – Москва: Наука, 2000. – 160 с.
8. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления / А. Ю. Горнов – Новосибирск: Наука, 2005. – 279 с.
9. Krotov V. F. Global methods in optimal control theory / V. F. Krotov. – New York : Marcel Dekker, 1996. – 408 p.

10. Kirk D. E. Optimal control theory. An introduction / D. E. Kirk. – New York: Dover Publ., 2004. – 472 p.

#### References

1. Barten'ev O. V. Fortran dlya professionalov. Matematicheskaya biblioteka IMSL. CHast' 3 // O. V. Barten'ev. – Moskva: Dialog-MIFI, 2001. – 368 p.
2. Buldaev A. S. Metody vozmushchenij v zadachah uluchsheniya i optimizacii upravlyaemyh sistem / A. S. Buldaev. – Ulan-Ude: Izdatel'stvo Buryatskogo gosuniversiteta, 2008. – 260 p.
3. Buldaev A. S. Modifikaciya metoda proekcij dlya uluchsheniya nelinejnyh upravlenij / A. S. Buldaev, O. V. Morzhin // Vestnik Buryatskogo gosuniversiteta. – 2010. – Vyp. 9: Matematika, informatika. – P. 10 – 17.
4. Buldaev A. S. Uluchsheniya upravlenij v nelinejnyh sistemah na osnove kraevykh zadach / A. S. Buldaev, O. V. Morzhin // Izvestiya Irkutskogo gosuniversiteta. Seriya «Matematika». – 2009. – T. 2, № 1. – P. 94 – 106.
5. Buldaev A. S. Usloviya uluchsheniya i optimal'nosti v zadachah optimizacii nelinejnyh upravlyaemyh sistem / A. S. Buldaev, G. Anhbayar // Vestnik Buryatskogo gosuniversiteta. – 2014. – Vyp. 9(2): Matematika, informatika. – P. 3 – 9.
6. Burlakov I. D. Analiz ehffektivnosti metoda nelokal'nogo uluchsheniya v zadachah optimal'nogo upravleniya / I. D. Burlakov // Vestnik Buryatskogo gosuniversiteta. – 2014. – Vyp. 9(2): Matematika, informatika. – P. 10 – 19.
7. Srochko V. A. Iteracionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya / V. A. Srochko. – Moskva: Nauka, 2000. – 160 p.
8. Gornov A. Yu. Vichislitel'nyy tekhnologii resheniya zadach optimal'nogo upravleniya / A. Yu. Gornov. – Novosibirsk: Nauka, 2009. – 279 p.
9. Krotov V. F. Global methods in optimal control theory / V. F. Krotov. – New York : Marcel Dekker, 1996. – 408 p.
10. Kirk D. E. Optimal control theory. An introduction / D. E. Kirk. – New York: Dover Publ., 2004. – 472 p.

*Бурлаков Иван Дмитриевич*, аспирант кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: [ivan.bulakov.91@mail.ru](mailto:ivan.bulakov.91@mail.ru)

*Burlakov Ivan Dmitrievich*, Research Assistant, Department of Applied mathematics, Buryat State University, e-mail: [ivan.bulakov.91@mail.ru](mailto:ivan.bulakov.91@mail.ru)

УДК 517.977

© *Е. В. Дрыганова*

## ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДИСКРЕТНО УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Рассматривается метод нелокального улучшения в задачах оптимального управления дискретными системами на основе операции проектирования на множество допустимых значений управления. Эффективность метода иллюстрируется на дискретных аналогах непрерывных тестовых задач.

**Ключевые слова:** проекционный метод, нелокальное улучшение, дискретная система.

© *E. V. Dryganova*

## PROJECTION METHOD FOR NONLOCAL IMPROVEMENT OF DISCRETE CONTROL SYSTEMS

The article deals with a method for the nonlocal improvement in the optimal control problem of the discrete systems, based on the operation of projection onto the set of admissible control values. The effectiveness of the method is illustrated in discrete analogues of continuous test problems.

**Keywords:** discrete system, nonlocal improvement, projective methods.

### Введение

В работах [1,2] для общих нелинейных непрерывных задач оптимального управления построены методы нелокального улучшения управляющих функций, основанные на точных формулах приращения целевых функционалов. При этом в качестве объекта для разработки методов нелокального улучшения рассматривается непрерывная задача оптимального управления, которая имеет следующий общий вид:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in U \subset R^m, t \in T = [t_0, t_1],$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  - вектор состояния,  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  - вектор управления. Начальное состояние  $x_0$  и отрезок  $T$  заданы. В качестве допустимых управлений рассматривается класс  $V$  кусочно-непрерывных на  $T$  функций со значениями в выпуклом множестве  $U$ .

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03680-а)

В задаче:

- 1) функция  $\varphi(x)$  непрерывно-дифференцируема в  $R^n$ , функции  $F(x, u, t)$ ,  $f(x, u, t)$  и их производные по  $x, u$  непрерывны по совокупности аргументов  $(x, u, t)$  на множестве  $R^n \times R^m \times T$ .
- 2) функция  $f(x, u, t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$  на  $R^n \times R^m \times T$  с константой  $L > 0$ :  

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n.$$

В данной работе рассматривается проекционный метод нелокального улучшения для дискретного аналога линейно управляемой задачи.

### 1. Метод улучшения управления

Рассматривается дискретная задача оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_N)) + \sum_{i=0}^{N-1} F(t_i, x(t_i), u(t_i)) \rightarrow \min_{u \in V}, \quad (1)$$

$$x(t_{i+1}) = f(t_i, x(t_i), u(t_i)), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t_i) \in U \subset R^m, \quad t_i \in T, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

где  $x(t_i) = (x_1(t_i), \dots, x_n(t_i))$  – вектор состояния системы,  $u(t_i) = (u_1(t_i), \dots, u_m(t_i))$  – вектор управления,  $t_i \in T = \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N\}$ ; моменты  $t_0, t_N$  и состояние  $x_0$  заданы; интегрант  $F(t, x, u)$  и вектор-функция  $f(t, x, u)$  линейны по  $u$  на множестве  $T \times R^n \times R^m$ .

Поставим задачу улучшения заданного допустимого управления  $u^l$ : найти допустимое управление  $v$  с условием  $\Phi(v) \leq \Phi(u^l)$ .

Определим необходимые конструкции для задачи (1), (2). Введем сопряженную переменную  $\psi \in R^n$  и рассмотрим функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle - F(t, x, u) = \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle + H_0(\psi, x, t).$$

В соответствии с [3] рассмотрим дискретно-алгебраическую сопряженную систему:

$$\psi(t_i) = H_x(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) + r(t_i), \quad \psi(t_N) = -\varphi_x(x^l(t_N)) - q, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H(t_i, \psi(t_{i+1}), x(t_i), u^l(t_i)) - H(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) = \\ = \langle H_x(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)), \Delta x(t_i) \rangle + \langle r(t_i), \Delta x(t_i) \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varphi(x(t_N)) - \varphi(x^l(t_N)) = \langle \varphi_x(x^l(t_N)), \Delta x(t_N) \rangle + \langle q, \Delta x(t_N) \rangle. \quad (5)$$

где  $\Delta x(t_i) = x(t_i) - x^l(t_i)$ , величины  $r(t_i), q$  определяются из условий (4), (5).

Такая модификация сопряженной системы позволяет получить формулу приращения функционала в задаче (1),(2), которая не содержит остаточных членов разложения и имеет вид:

$$\Phi(u) - \Phi(u^l) = - \sum_{i=0}^{N-1} \langle H_1(t_i, \psi(t_{i+1}), x(t_i)), \Delta u(t_i) \rangle,$$

где  $\Delta u(t_i) = u(t_i) - u^l(t_i)$ .

Правило определения  $r(t_i)$ ,  $q$  является неединственным. В [3] предлагается следующее правило:

- 1) если все компоненты  $x(t_i) = x^l(t_i)$ , то алгебраические уравнения (4) выполняется тождественно. В этом случае значения всех компонент  $r(t_i) = 0$ . Аналогично, если в конечный момент  $x(t_N) = x^l(t_N)$ , то задаем  $q = 0$ ;
- 2) если хотя бы одна компонента вектора  $x(t_i) \neq x^l(t_i)$ , то соответствующая компонента  $r(t_i)$  однозначно определяется для этой компоненты из (4) при условии равенства нулю остальных компонент. Аналогично определяются компоненты для  $q$  при  $t_i = t_N$  из уравнения (5).

*Проекционный метод нелокального улучшения*, основанный на формуле приращения, описывается следующим образом:

- 1) определим вспомогательное отображение с параметром  $\alpha > 0$

$$\bar{u}(t, \psi, x) = P_U(u^l(t) + \alpha H_1(t, \psi, x)), \quad t \in T,$$

где  $P_U$  - оператор проектирования на множество  $U$  в евклидовой норме.

- 2) найдем решение  $x(t_i)$ ,  $\psi(t_i)$ ,  $t_i \in T$  краевой задачи:

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= f(x(t_i), \bar{u}(t_i, \psi(t_i), x(t_i)), t_i), \quad x(t_0) = x_0, \\ \psi(t_i) &= H_x(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) + r(t_i), \quad \psi(t_N) = -\varphi_x(x^l(t_N)) - q, \\ H(t_i, \psi(t_{i+1}), x(t_i), u^l(t_i)) - H(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) &= \\ &= \langle H_x(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)), \Delta x(t_i) \rangle + \langle r(t_i), \Delta x(t_i) \rangle, \\ \varphi(x(t_N)) - \varphi(x^l(t_N)) &= \langle \varphi_x(x^l(t_N)), \Delta x(t_N) \rangle + \langle q, \Delta x(t_N) \rangle. \end{aligned}$$

- 3) построим выходное управление

$$v(t_i) = \bar{u}(t_i, \psi(t_i), x(t_i)), \quad t_i \in T. \quad (6)$$

В соответствии с [3] рассматриваемый проекционный метод нелокального улучшения для заданного  $u^l \in U$  обеспечивает улучшение с оценкой

$$\Phi(v) - \Phi(u^l) \leq -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{N-1} \|(v(t_i)) - u^l(t_i)\|^2.$$

В соответствии с [1,2] условие (6) может рассматриваться как уравнение относительно управления, эквивалентное краевой задаче. Для реализации этого уравнения используется метод простых итераций при  $k \geq 0$  с начальным приближением  $u^0$ :

$$\begin{aligned} u^{k+1}(t_i) &= P_U(u^l(t) + \alpha H_1(t_i, \psi^k(t_i), x^k(t_i))), \quad t_i \in T, \\ x^k(t_{i+1}) &= f(t_i, x^k(t_i), u^k(t_i)), \quad x^k(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^k(t_i) &= H_x(t_i, \psi^k(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) + r^k(t_i), \quad \psi^k(t_N) = -\varphi_x(x^l(t_N)) - q^k, \\ H(t_i, \psi^k(t_{i+1}), x^k(t_i), u^l(t_i)) - H(t_i, \psi^k(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) &= \\ &= \langle H_x(t_i, \psi^k(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)), \Delta x^k(t_i) \rangle + \langle r^k(t_i), \Delta x^k(t_i) \rangle, \\ \varphi(x^k(t_N)) - \varphi(x^l(t_N)) &= \langle \varphi_x(x^l(t_N)), \Delta x^k(t_N) \rangle + \langle q^k, \Delta x^k(t_N) \rangle. \end{aligned}$$

Метод оптимизации заключается в решении последовательности задач улучшения. Расчет задач улучшения проводится до выполнения условия  $|\Phi(u^{l+1}) - \Phi(u^l)| \leq \varepsilon |\Phi(u^l)|$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность расчета,  $u^l, l \geq 0$  – последовательность улучшающихся управлений с заданным начальным управлением  $u^1 = u^l$ .

## 2. Вычислительный эксперимент

**Пример 1.** Рассматривается линейная по управлению задача об оптимальной стратегии оптимизации маятника [5]:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= x_1^2(5) + x_2^2(5) \rightarrow \inf, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u - \sin x_1, \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0, \\ u(t) &\in [-1, 1], \quad t \in [0, 5], \end{aligned}$$

где  $x_1$  - угол отклонения маятника от положения равновесия,  $u_1$  - внешнее воздействие (вынужденные колебания).

Дискретный вариант задачи:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= x_1^2(5) + x_2^2(5) \rightarrow \inf, \\ x_1(t_{i+1}) &= x_1(t_i) + x_2(t_i), \quad x_2(t_{i+1}) = x_2(t_i) + u - \sin(x_1(t_i)), \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0, \\ u(t) &\in [-1, 1], \quad t \in [0, 5], \end{aligned}$$

В данной задаче функция Понтрягина

$$H(t, \psi, x, u) = \psi_1(x_1 + x_2) + \psi_2(x_2 + u - \sin x_1).$$

Образует разностные уравнения (3):

$$\begin{aligned} H_{x_1} &= \psi_1 - \psi_2 \cos x_1, \quad H_{x_2} = \psi_1 + \psi_2, \\ \psi_1(t_i) &= \psi_1(t_{i+1}) - \psi_2(t_{i+1}) \cos(x_1(t_i)) + r_1(t_i), \quad \psi_1(5) = -2x_1(5) - q_1, \\ \psi_2(t_i) &= \psi_1(t_{i+1}) + \psi_2(t_{i+1}) + r_2(t_i), \quad \psi_2(5) = -2x_2(5) - q_2. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &H(t_i, \psi(t_{i+1}), x(t_i), u^l(t_i)) = \\ &= \psi_1(t_{i+1})(x_1(t_i) + x_2(t_i)) + \psi_2(t_{i+1})(x_2(t_i) + u^l(t_i) - \sin(x_1(t_i))), \\ &H(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) = \\ &= \psi_1(t_{i+1})(x_1^l(t_i) + x_2^l(t_i)) + \psi_2(t_{i+1})(x_2^l(t_i) + u^l(t_i) - \sin(x_1^l(t_i))), \\ &H(t_i, \psi(t_{i+1}), x(t_i), u^l(t_i)) - H(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) = \end{aligned}$$



$$= \psi_1(t_{i+1})(\Delta x_1(t_i) + \Delta x_2(t_i)) + \psi_2(t_{i+1})\Delta x_2(t_i) - \psi_2(t_{i+1})\sin(x_1(t_i)) + \psi_2(t_{i+1})\sin(x_1^l(t_i)),$$

$$H_x(t_i, \psi(t_{i+1}), x^l(t_i), u^l(t_i)) = (\psi_1(t_{i+1}) - \psi_2(t_{i+1})\cos(x_1^l(t_i)), \psi_1(t_{i+1}) + \psi_2(t_{i+1}))^T$$

Отсюда получаем уравнение на  $r(t_i)$ :

$$\begin{aligned} & \psi_1(t_{i+1})(\Delta x_1(t_i) + \Delta x_2(t_i)) + \psi_2(t_{i+1})\Delta x_2(t_i) - \psi_2(t_{i+1})\sin(x_1(t_i)) + \\ & + \psi_2(t_{i+1})\sin(x_1^l(t_i)) = (\psi_1(t_{i+1}) - \psi_2(t_{i+1})\cos(x_1^l(t_i)))\Delta x_1(t_i) + \\ & (\psi_1(t_{i+1}) + \psi_2(t_{i+1}))\Delta x_2(t_i) + r_1(t_i)\Delta x_1(t_i) + r_2(t_i)\Delta x_2(t_i). \end{aligned}$$

После упрощения окончательно получаем:

$$\begin{aligned} & \psi_2(t_{i+1})(\sin(x_1^l(t_i)) - \sin(x_1(t_i)) + \Delta x_1(t_i)\cos(x_1^l(t_i))) = \\ & = r_1(t_i)\Delta x_1(t_i) + r_2(t_i)\Delta x_2(t_i), \end{aligned}$$

Составляем уравнение на  $q$  типа (5):

$$(\Delta x_1(5))^2 + (\Delta x_2(5))^2 = q_1\Delta x_1(5) + q_2\Delta x_2(5).$$

Положим, что  $\Delta x_i(5) - q_i = 0$ . Отсюда находим  $\bar{q}_i = \Delta x_i$ . Тогда  $\psi_i(5) = -(x_i(5) + x_i^l(5))$ ,

Вспомогательная дифференциальная система принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_1(t_i) &= \psi_1(t_{i+1}) - \psi_2(t_{i+1})\cos(x_1(t_i)) + \bar{r}_1(t_i), \psi_1(5) = -(x_1(5) + x_1^l(5)), \\ \psi_2(t_i) &= \psi_1(t_{i+1}) + \psi_2(t_{i+1}) + \bar{r}_2(t_i), \psi_2(5) = -(x_2(5) + x_2^l(5)). \end{aligned}$$

Для заданного управления  $u^l$  отображение  $\bar{u}$  с параметром  $\alpha > 0$  имеет вид

$$\bar{u}(t_i) = P_U(u^l(t_i) + \alpha\psi_2(t_{i+1})).$$

Расчетное значение  $\bar{u}$  с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$  было получено для различных входных управлений  $u^l$  при различных шагах дискретизации  $\Delta t$  и параметре  $\alpha$ . Результаты расчетов отражены в таблицах 1-3 ( $u^l$  - начальное значение управления,  $\Phi(\bar{u})$  - расчетное значение функционала).

Таблица 1.  $u^l = 1.0, \alpha = 0.1$

$\Delta t$	$\Phi(\bar{u})$
$10^{-1}$	11.4845
$10^{-2}$	11.8699
$10^{-3}$	11.9668
$10^{-4}$	11.909321

При уменьшении шага дискретизации результирующие значения целевого функционала приближаются к оптимальному расчетному значению непрерывной задачи  $\Phi(u^*) = 11.909409$  и при  $\Delta t < 10^{-4}$  функционал перестает существенно меняться.

Таблица 2.  $\Delta t = 10^{-4}, \alpha = 0.1$

$u^l$	$\Phi(\bar{u})$
1.0	11.909321
0.0	11.90978
0.5	11.9097645

Из таблицы 2 видно, что проекционный метод нелокального улучшения обладает достаточно широкой областью сходимости. При различных значениях начального управления получено приближенно одно и то же значение функционала.

Таблица 3.  $\Delta t = 10^{-4}, u^l = 1.0$

	$\Phi(\bar{u})$
$\alpha = 1$	11.909717
$\alpha = 10^{-1}$	11.909321
$\alpha = 10^{-2}$	11.909321

В таблице 3 приводятся результаты, полученные рассматриваемым методом при различных значениях параметра  $\alpha$  с шагом дискретизации  $\Delta t = 10^{-4}$  и начальным значением управления  $u^l = 1.0$ . При дальнейшем уменьшении параметра  $\alpha < 10^{-2}$  падает точность расчета значения функционала. При  $\alpha > 1$  метод не сходится.

На рисунке 1 показаны оптимальный процесс, рассчитанный проекционным методом нелокального улучшения при  $\Delta t = 10^{-4}, u^0 = 1.0, \alpha = 0.1$ .

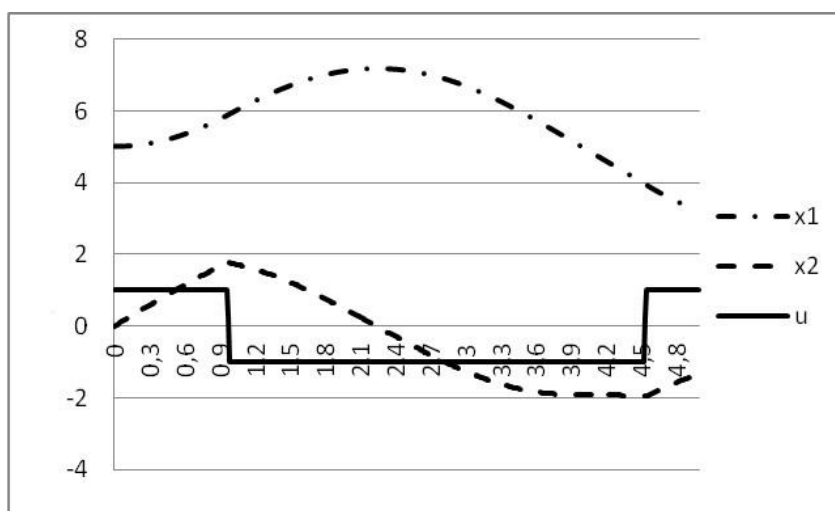


Рис. 1.

### **Заключение**

Рассмотренный нелокальный алгоритм для дискретных управляемых задач не использует операцию выпуклого варьирования, характерную для градиентных методов. Количество вычислительных операций при решении дискретных задач проекционным методом существенно меньше, чем при расчете соответствующих непрерывных задач при допустимой точности расчета, т.к. число вычислений правой части совпадает с количеством интервалов дискретизации. Проведенные расчеты в рамках примера показывают эффективность применяемого проекционного метода для приближенного решения оптимизационных задач рассматриваемого класса.

### **Литература**

1. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2008. – 260 с.
2. Булдаев А.С., Моржин О.В. Модификация метода проекций для улучшения нелинейных управлений // Вестник Бурятского государственного университета. – 2010. – Вып. 9: Математика и информатика. – С. 10–17.
3. Моржин О.В. Методы нелокального улучшения в задачах оптимального управления на основе точных формул приращения функционала // Программные системы: теория и приложения: электронный научный журнал. – 2010. – №4(4). – С. 67–83.
4. Моржин О.В. Вычислительные аспекты нелокального улучшения управления в дифференциальных системах // Программные системы: теория и приложения: электронный научный журнал. – 2011. – №2(6). – С. 37–51.
5. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 2009. – 279 с.

### **References**

1. Buldaev A.S. Perturbation methods of the improvement and optimization of the controlled systems. – Ulan-Ude: Buryat State University Publishing Department, 2008. – 260 p.
2. Buldaev A.S., Morzhin O.V. Modification of the method of projections for improving the nonlinear controls // Vest. Buryat. Gos. Univ., Vypusk 9 “Mat. Informat.,” 2010, pp. 10–17.
3. Morzhin O.V. Nonlocal improvement methods in optimal control problems on based on exact formulas for the cost functional increment // The program system: theory and applications. 2010, no. 4(4), pp. 67-83. Available at [http://psta.psiras.ru/read/psta2010\\_4\\_67-83.pdf](http://psta.psiras.ru/read/psta2010_4_67-83.pdf)
4. Morzhin O.V. Computational aspects of nonlocal improvement for control in differential systems // The program system: theory and applications.

---

2011, no. 2(6), pp. 37-51. Available at [http://psta.psiras.ru/read/psta2011\\_2\\_37-51.pdf](http://psta.psiras.ru/read/psta2011_2_37-51.pdf)

5. Gornov A.Y. Computational technology for the solving of optimal control problem. – Novosibirsk: Nauka, 2009. 279 p.

*Дрыганова Екатерина Вячеславовна*, ассистент кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: [dev8@mail.ru](mailto:dev8@mail.ru)

*Dryganova Ekaterina Vyacheslavovna*, assistant, applied mathematics department, Buryat State University, e-mail: [dev8@mail.ru](mailto:dev8@mail.ru)

УДК 517.977

© Д. О. Трунин

**АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ НЕЛОКАЛЬНОГО  
УЛУЧШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ ЗАДАЧАХ  
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ  
ОГРАНИЧЕНИЯМИ<sup>1</sup>**

В данной статье предлагаются процедуры нелокального улучшения допустимых управлений для нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

**Ключевые слова:** нелинейная задача оптимального управления, нелокальное улучшение, терминальные ограничения.

© Д. О. Трунин

**ALTERNATIVE PROCEDURES OF NONLOCAL IMPROVEMENT IN  
NONLINEAR ON A STATE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH  
TERMINAL CONSTRAINTS**

In the article a nonlocal improvement procedures of admissible control for nonlinear optimal control problems with terminal constraints is proposed.

**Keywords:** nonlinear optimal control problem, nonlocal improving, terminal constraints.

**Введение**

При разработке численных методов решения задач оптимального управления наиболее трудоемкой представляется реализация процедуры варьирования управлений. В ряде задач от процедуры варьирования можно освободиться, если для данного класса задач возможно построение точных (без остаточных членов) формул приращения функционала.

Такие формулы были получены в [1] для линейных по состоянию задач оптимального управления, в работе [2] проведено обобщение на класс квадратичных и полиномиальных по состоянию задач оптимального управления, в работе [3] процедуры нелокального улучшения обобщаются на класс нелинейных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом. В работе [4] предложен подход к построению процедур нелокального улучшения в класс нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

Точные формулы приращения получаются на основе специального представления сопряженных переменных с помощью соответствующей модификации сопряженной системы. Данный подход позволяет свести задачу улучшения допустимых управлений к решению специальных

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03680-а)

краевых задач, которые существенно проще, чем краевая задача принципа максимума. Возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума, обуславливает повышенную эффективность построенных методов. В данной статье предлагаются две процедуры нелокального улучшения допустимых управлений для нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления с частично закрепленным правым концом

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad (2)$$

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n, \quad (4)$$

в которой  $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния,  $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$  – вектор управления, интервал  $T$  фиксирован,  $x^0 \in R^n$  – заданный вектор,  $x_i^1, i = \overline{1, m}$  – заданные числа, функция  $\varphi(x)$  не зависит от первых  $m$  компонент вектора  $x$ . Функции  $f(x, u, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $F(x, u, t)$  непрерывно дифференцируемы по своим аргументам в областях определения.

В качестве доступных управлений рассматривается множество кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном множестве  $U \subset R^r$

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Для каждого доступного управления  $u \in V$  обозначим  $x(t, u)$ ,  $t \in T$  – решение задачи Коши (1), (2) при  $u = u(t)$ .

Определим множество допустимых управлений

$$W = \{u \in V : x_i(t_1, u) = x_i^1, i = \overline{1, m}\}.$$

В задаче (1)-(4) составим нормальный функционал Лагранжа

$$L(u, \lambda) = \Phi(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i(t_1) - x_i^1).$$

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $p \in R^n$  имеет вид

$$H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t).$$

Приращение функционала Лагранжа на паре доступных управлений  $(u^0, v)$  в соответствии с [3] имеет вид

$$\begin{aligned} L(v, \lambda) - L(u^0, \lambda) &= \\ &= -\int_T (H(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), v(t), t) - H(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), u^0(t), t)) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $p(t, u^0, v, \lambda)$  – решение модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \quad (6)$$

$$\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t, v) - x(t, u^0) \rangle + \langle r(t), x(t, v) - x(t, u^0) \rangle = \quad (7)$$

$$= H(p, x(t, v), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t),$$

$$p_i(t_1) = -\lambda_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$p_j(t_1) = -\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=m+1}^n [\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0))(x_j(t_1, v) - x_j(t_1, u^0))] + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n [q_j(x_j(t_1, v) - x_j(t_1, u^0))] = \varphi(x(t_1, v)) - \varphi(x(t_1, u^0)). \end{aligned} \quad (10)$$

Альтернативная формула приращения получается из формулы (5) путем симметричной замены  $u^0 \leftrightarrow v$  и имеет вид

$$\begin{aligned} L(v, \lambda) - L(u^0, \lambda) &= \\ &= -\int_T (H(p(t, v, u^0, \lambda), x(t, u^0), v(t), t) - H(p(t, v, u^0, \lambda), x(t, u^0), u^0(t), t)) dt, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $p(t, u^0, v, \lambda)$  – решение следующей модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, v), u^0(t), t) - r(t),$$

$$\langle H_x(p, x(t, v), v(t), t), x(t, u^0) - x(t, v) \rangle + \langle r(t), x(t, u^0) - x(t, v) \rangle =$$

$$= H(p, x(t, u^0), v(t), t) - H(p, x(t, v), v(t), t),$$

$$p_i(t_1) = -\lambda_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$p_j(t_1) = -\varphi_{x_j}(x(t_1, v)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n},$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=m+1}^n [\varphi_{x_j}(x(t_1, v))(x_j(t_1, u^0) - x_j(t_1, v))] + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n [q_j(x_j(t_1, u^0) - x_j(t_1, v))] = \varphi(x(t_1, u^0)) - \varphi(x(t_1, v)). \end{aligned}$$

Введем отображение

$$u^*(p, x, t) = \arg \max_{v \in U} H(p, x, v, t), \quad p \in R^n, x \in R^n, t \in T.$$

## 2. Процедуры нелокального улучшения

Поставим задачу улучшения управления  $u^0 \in W$ : найти управление  $v \in W$  со свойством  $\Phi(v) \leq \Phi(u^0)$ .

На основе формулы приращения (5) построим первую процедуру нелокального улучшения.

1. Найдем решение  $(x(t), p(t)), t \in T$  дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(p, x, t), t), & t \in T, \\ \dot{p} &= -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x - x(t, u^0) \rangle + \langle r(t), x - x(t, u^0) \rangle &= \\ &= H(p, x, u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, m}, \\ p_j(t_1) &= -\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n}, \\ \sum_{j=m+1}^n [\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0))(x_j(t_1) - x_j(t_1, u^0))] + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n [q_j(x_j(t_1) - x_j(t_1, u^0))] = \varphi(x(t_1)) - \varphi(x(t_1, u^0)). \end{aligned} \quad (12)$$

2. Сформируем управление  $v(t) = u^*(p(t), x(t), t), t \in T$ .

Предположим, что решение  $(x(t), p(t)), t \in T$  краевой задачи (12) (возможно, не единственное) существует на  $T$ . Тогда  $x(t) = x(t, v)$  и  $v \in W$ .

Покажем свойство улучшения для выходных управлений.

Действительно, решение  $p(t), t \in T$  является решением системы (6), (7) и удовлетворяет условиям (9), (10).

Обозначим

$$\bar{\lambda}_i = -p_i(t_1), \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда условия (8) выполняются и  $p(t) = p(t, u^0, v, \bar{\lambda}), t \in T$ .

Следовательно, в соответствии с формулой приращения (5) выходное управление  $v$  обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа

$$L(v, \bar{\lambda}) \leq L(u^0, \bar{\lambda}).$$

Отсюда, в силу допустимости управлений  $u^0, v$  получаем

$$\Phi(v) \leq \Phi(u^0).$$

На основе формулы приращения (11) построим вторую процедуру нелокального улучшения.

1. Сформируем отображение

$$v^*(p, t) = u^*(p, x(t, u^0), t).$$



2. Найдем решение  $(x(t), p(t))$ ,  $t \in T$  дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, v^*(p, t), t), & t \in T, \\ \dot{p} &= -H_x(p, x, u^0(t), t) - r(t), \\ \langle H_x(p, x, v^*(p, t), t), x(t, u^0) - x \rangle + \langle r(t), x(t, u^0) - x \rangle &= \\ &= H(p, x(t, u^0), v^*(p, t), t) - H(p, x, v^*(p, t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, m}, \\ p_j(t_1) &= -\varphi_{x_j}(x(t_1)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n}, \\ &\sum_{j=m+1}^n [\varphi_{x_j}(x(t_1))(x_j(t_1, u^0) - x_j(t_1))] + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n [q_j(x_j(t_1, u^0) - x_j(t_1))] = \varphi(x(t_1, u^0)) - \varphi(x(t_1)). \end{aligned} \quad (13)$$

3. Сформируем управление  $v(t) = v^*(p(t), t)$ ,  $t \in T$ .

Свойство улучшения для выходных управлений обосновывается в полной аналогии с первой процедурой.

Алгебраические соотношения краевых задач (12), (13) можно разрешить в аналогии с [3] относительно величин  $r(t)$ ,  $q_j$  и свести дифференциально-алгебраическую краевую задачу к обычной дифференциальной задаче. Определяя различные однозначные способы разрешения алгебраических уравнений, можно получать модификации метода улучшения с различными дифференциальными краевыми задачами.

### Заключение

Предложенные процедуры обеспечивают нелокальное улучшение допустимых управлений без процедуры варьирования с выполнением всех терминальных ограничений на каждой итерации. Данное свойство является существенным фактором повышения эффективности методов численного решения нелинейных по состоянию задач оптимального управления с дополнительными ограничениями на фазовую траекторию.

### Литература

1. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
2. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.
3. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского государственного университета. – Сер. Математика. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 94-106.

---

4. Трунин Д.О., Булдаев А.С. Об одном подходе к оптимизации нелинейных управляемых систем с терминальными ограничениями // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2013. – № 1. – С. 15-20.

#### References

1. Srochko V.A. Iteracionnye metody reshenija zadach optimal'nogo upravlenija. – M.: Fizmatlit, 2000. – 160 p.

2. Buldaev A.S. Metody vozmushhenij v zadachah uluchshenija i optimizacii upravljaemyh sistem. – Ulan-Ude: Izd-vo Burjat. gos. un-ta, 2008. – 260 p.

3. Buldaev A.S., Morzhin O.V. Uluchshenie upravlenij v nelinejnyh sistemah na osnove kraevyh zadach // Izvestija Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. – Ser. Matematika. – 2009. – Т. 2, № 1. – P. 94-106.

4. Trunin D.O., Buldaev A.S. Ob odnom podhode k optimizacii nelinejnyh upravljaemyh sistem s terminal'nymi ogranichenijami // Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika. – 2013. – № 1. – P. 15-20.

*Трунин Дмитрий Олегович*, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: [tdobsu@yandex.ru](mailto:tdobsu@yandex.ru)

*Trunin Dmitry Olegovich*, candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, applied mathematics department, Buryat State University, e-mail: [tdobsu@yandex.ru](mailto:tdobsu@yandex.ru)

## Содержание

<b>1. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения</b>	
Николаева Д. Д. О свойствах показателя Ляпунова на проекторе класса Бэра.....	3
Шишкин Г. А. Решение краевых задач дифференциальных уравнений запаздывающего типа.....	11
<b>2. Математическое моделирование и обработка данных</b>	
Мадыев А. П., Ширапов Д. Ш. Математические модели нестационарных случайных сигналов многократных переходных режимов стационарных воздействий.....	16
Цыбиков А. С., Нямхуугийн Батжаргал, Дагбаев Э. Д., Дармаев Т. Г. Анализ объема и структуры выборки социологического опроса молодежи Монголии.....	25
<b>3. Информационные системы и технологии</b>	
Ткаченко А. Ю. Визуализация графа с использованием парадигмы объектно-ориентированного программирования.....	33
<b>4. Управляемые системы и методы оптимизации</b>	
Бурлаков И. Д. Сравнительный анализ эффективности проекционного метода нелокального улучшения управления.....	42
Дрыганова Е. В. Проекционный метод нелокального улучшения в дискретно управляемых системах.....	57
Трунин Д. О. Альтернативные процедуры нелокального улучшения в нелинейных по состоянию задачах оптимального управления с терминальными ограничениями.....	65

## Contents

### 1. Functional analysis and differential equations

Nikolaeva D. D. About properties Lyapunov exponent on the projector of Baire class.....	3
Shishkin G. A. The decision of boundary value problems differential equations of late type.....	11

### 2. Mathematical modeling and data processing

Madyev A. P., Shirapov D. Sh. Mathematical models of nonstationary random signals of multiple transients of fixed effects.....	16
Tsybikov A. S., Nyamhu Batjargal, Dagbayev E. D., Darmayev T. G. Volume and structure analysis of the sample for social interview of youth in Mongolia.....	25

### 3. Information Systems and Technology

Tkachenko A. Yu. Visualization of graph by using paradigm of object-oriented programming.....	33
---	----

### 4. Controlled systems and methods of optimization

Burlakov I. D. Comparative analysis of the effectiveness of the projection method of nonlocal improvements of control.....	42
Dryganova E. V. Projection method for nonlocal improvement of discrete control systems.....	57
Trunin D. O. Alternative procedures of nonlocal improvement in nonlinear on a state optimal control problems with terminal constraints	65

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ,  
ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ  
«ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА»

Отбор и редактирование публикуемых статей производятся редакционной коллегией из ведущих ученых и приглашенных специалистов.

В журнал следует направлять статьи, отличающиеся высокой степенью научной новизны и значимостью. Каждая статья имеет УДК, а также письменный развернутый отзыв (рецензию) научного руководителя или научного консультанта, заверенный печатью. Рецензенты должны являться признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и иметь в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи.

Автор статьи обязан заключить лицензионный договор о предоставлении неисключительных прав на использование созданного им произведения (статьи) ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет». Образец лицензионного договора представлен на сайте БГУ.

Общие требования	Тексты представляются в электронном и печатном виде. Файл со статьей может быть на дискете или отправлен электронным письмом. На последней странице – подпись автора(ов) статьи. Название статьи и аннотация даются на русском и английском языках. Аннотация (авторское резюме) должна заключать от 100 до 250 слов. После аннотации дать ключевые слова (не менее семи слов) на русском и английском языках. Несоответствие между русскоязычным и англоязычными текстами не допускается. Выполнить транслитерацию русского текста литературы латиницей.
Электронная копия	Статья представляется на русском языке в doc-файле, набранная в текстовом редакторе Microsoft Word. Текстовый редактор Microsoft Word (версии XP, 2003). В имени файла указывается фамилия первого автора.
Параметры страницы	Формат А5. Поля: левое – 1,5 см, верхнее, нижнее, правое – 1 см.
Форматирование основного текста	С нумерацией страниц внизу по центру. Абзацный отступ – 0,5 см. Интервал – одинарный.
Гарнитура шрифта	Times New Roman. Размер кегля – 11 пт.
Объем статьи (ориентировочно)	Кратких сообщений – 4-8 с., статей на соискание ученой степени кандидата наук – 8-15 с., на соискание ученой степени доктора наук – 15-30 с. Название статьи должно содержать не более 10 слов.
Сведения об авторах	Указываются фамилия, имя, отчество (полностью), ученая степень, звание, должность и место работы, страна, адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail (на русском и английском языках)

В начале статьи ставится подробный индекс УДК согласно действующим в настоящее время классификаторам. Далее следуют инициалы и фамилии авторов (полуужирный курсив, выравнивание по правому краю), название статьи (полуужирным шрифтом, по центру), аннотация, ключевые слова и перевод перечис-

ленных частей текста на английский язык. В конце документа после списка литературы приводятся сведения об авторах и их перевод на английский язык (фамилия, имя, отчество полностью, ученая степень, ученое звание, должность, место работы (указываются официальные названия организаций), контактный адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail). Ссылки на гранты приводятся в сноске на первой странице.

Статья должна быть структурирована и содержать введение, ряд разделов с возможными подразделами, заключение, список литературы.

Набор формул осуществляется в редакторе формул Microsoft Equation 3/4 или MathType 5/6. Не допускается: набор формул как текста (включая таблицу символов, надстрочные и подстрочные индексы), а также с применением автофигур; вставка формул как рисунков; сжатие формулы как рисунка. Не допускается набор формул с применением появившегося в Word 2007 нестандартного редактора формул, функционирующего только с форматом docx. Все формулы, на которые в тексте даются ссылки, выносятся в отдельную строку с нумерацией в круглых скобках в тексте по правому краю страницы (строка выравнивается по правому краю). Основной размер шрифта в формулах 11 пт.

- Список литературы – все работы необходимо пронумеровать, в тексте ссылки на литературу оформлять в квадратных скобках.

- Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются. Все статьи проходят проверку в системе «Антиплагиат. ВУЗ».

- Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ». Корректурa авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются. Гонорар авторам не выплачивается.

- Допустима публикация статей на английском языке, сведения об авторах, название, аннотацию и ключевые слова которых необходимо перевести на русский язык.

- Формат журнала 70 x 100 1/16.

- Желательно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Все объекты должны быть черно-белыми без оттенков. Рисунки и графики должны иметь четкое изображение и быть выдержаны в черно-белой гамме, лучше применять штриховку. Фотографии и рисунки в формате \*.tif или \*.jpg должны иметь разрешение не менее 300 dpi. Диаграммы, рисунки, графики должны прилагаться отдельными файлами, чтобы издательство имело возможность ввести в них правки. Математические формулы в текстах должны быть выполнены в MathType. Если работа содержит примеры на старославянском языке или языках народов, то отправить соответствующие символы.

Стоимость опубликования одной статьи составляет за одну страницу формата А5 для сотрудников БГУ – 150 р., для остальных – 300 р.

Оплата за публикацию статьи, авторами которой являются только аспиранты, не взимается. Должна прилагаться справка учреждения, подтверждающая, что авторы являются аспирантами этого учреждения.

Адрес: 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, Издательство БГУ.

Факс (301-2)-21-05-88

Научное издание

В Е С Т Н И К  
БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1/2015

**Математика, информатика**

В авторской редакции  
Компьютерная верстка Д. О. Трунина

Свидетельство о государственной аккредитации  
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 23.03.15. Формат 70 x 100 1/16.  
Усл. печ. л. 6,18. Уч.-изд. л. 2,53. Тираж 1000. Заказ 46.  
Цена свободная.

Издательство Бурятского госуниверситета  
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
E-mail: [riobsu@gmail.com](mailto:riobsu@gmail.com)

Отпечатано в типографии Бурятского госуниверситета  
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а