

Учредитель
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

ВЕСТНИК

БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2/2015



Математика, информатика

Журнал издается
с 2012 года

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-48732 от 28 февраля
2012 г. Федеральная служба по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
(Роскомнадзор)

Ответственные за выпуск
Д. О. Трунин, И.-Х. Д. Хишектуева

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. С. Булдаев, д-р физ.-мат. наук, проф.
(гл. редактор, Улан-Удэ)
С. Н. Васильев, акад. РАН, проф. (Москва)
В. И. Гурман, д-р техн. наук, проф. (Москва)
Ж. Г. Дамбаев, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)
А. В. Данеев, д-р техн. наук, проф. (Иркутск)
А. И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф.
(Новосибирск)
А. В. Лакеев, д-р физ.-мат. наук (Иркутск)

А. Д. Мижидон, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)
Ни Минь Кань, д-р наук, проф. (КНР, Шанхай)
Б. Очирбат, д-р наук, проф. (Монголия,
Улан-Батор)
В. А. Срочко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Иркутск)
Д. Ш. Ширапов, д-р физ.-мат. наук, проф.
(Улан-Удэ)
Р. Энхбат, д-р наук, проф. (Монголия,
Улан-Батор)

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ,
ул. Смолина, 24а
☎ 21-77-33, vbsumi@yandex.ru

✉ АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ,
ул. Смолина, 24а
☎ 21-95-57, riobsu@gmail.com

GH

1. Алгебра и геометрия

УДК 512.554.5

© А. В. Бадеев

ПРИМЕР КОММУТАТИВНОЙ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 3

В этой работе построен пример коммутативной альтернативной супералгебры S над полем характеристики 3, грассманова оболочка $A = G(S)$ которой является разрешимой ниль-алгеброй индекса 3 с соотношением $(A^2)^3 \cdot A = 0$.

Ключевые слова: альтернативная алгебра, супералгебра, грассманова оболочка.

© А. В. Бадеев

AN EXAMPLE OF ALTERNATIVE COMMUTATIVE SUPER-ALGEBRA OVER A FIELD OF CHARACTERISTIC 3

In this paper we construct an example of commutative alternative superalgebra S over a field of characteristic 3, which Grassmann envelope $A = G(S)$ is soluble nil-algebra of index 3 with ratio $(A^2)^3 \cdot A = 0$.

Keywords: alternative algebra, super-algebra, Grassmann envelope.

Введение

Пусть M – некоторое однородное многообразие алгебр, $G = G_0 + G_1$ – алгебра Грассмана. Супералгебра $A = A_0 + A_1$ называется M – супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(A) = A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1$ принадлежит многообразию M . Можно строить примеры различных конечномерных супералгебр, грассманова оболочка которых будет бесконечномерной алгеброй с подходящими свойствами. Разнообразные возможности применения супералгебр для построения контрпримеров были продемонстрированы И.П. Шестаковым [2].

В настоящей работе будет построен пример конечномерной альтернативной супералгебры, грассманова оболочка которой является разрешимой коммутативной альтернативной ниль-алгеброй индекса 3.

1. Построение супералгебры

Пусть M – многообразии коммутативных альтернативных алгебр над полем Φ характеристики 3 с тождествами

$$x^3 = 0, [(x_1x_2 \cdot x_3x_4)(x_5x_6)]x_7 = 0.$$

Построим M -супералгебру $A = A_0 + A_1$. Супералгебра A имеет следующую систему базисных элементов:

$$E = \{h, a_0, a_1, b_0, b_1, w\}.$$

В этой системе элементы с четными индексами и элемент w назовем *четными*, а элементы с нечетными индексами и элемент h - *нечетными*. Положим, $|x|$ - индекс четности элемента x алгебры A .

Умножение в супералгебре A определяется правилами умножения базисных элементов в системе E следующим образом.

1) Умножение суперкоммутативно, т.е. для любых базисных элементов $x, y \in E$

$$x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x.$$

Отсюда следует

$$2) h \cdot h = 0.$$

Положим далее,

$$3) a_0 \cdot h = a_1, a_1 \cdot h = a_0.$$

$$4) b_0 \cdot h = b_1, b_1 \cdot h = -b_0.$$

$$5) a_0 \cdot a_0 = b_0, a_1 \cdot a_0 = b_1, a_1 \cdot a_1 = 0.$$

$$5) b_0 \cdot a_0 = b_1 \cdot a_1 = w, b_1 \cdot a_0 = b_0 \cdot a_1 = 0.$$

Остальные произведения базисных элементов, не определенные в 1)-6) полагаются нулевыми. Таким образом,

$$7) b_i \cdot b_j = 0,$$

$$8) w \in \text{Ann } A.$$

Из правил умножения следует, что

$$A \setminus A^2 = \Phi\{h\}, A^2 \setminus A^{(2)} = \Phi\{a_0, a_1\},$$

$$A^{(2)} \setminus (A^2)^3 = \Phi\{b_0, b_1\}, (A^2)^3 = \Phi\{w\},$$

$$A^{(2)} \cdot A^{(2)} = 0, (A^2)^3 \cdot A = 0.$$

2. Доказательство основной теоремы

Лемма. Супералгебра A альтернативна.

Доказательство.

Покажем, что в супералгебре A на однородных элементах выполнено соотношение

$$J_s(x, y, z) := (x \cdot y) \cdot z + (-1)^{|y||z|} (x \cdot z) \cdot y + x \cdot (y \cdot z) = 0.$$

В силу суперкоммутативности имеем

$$J_s(x, y, z) = (-1)^{|x||y|} J_s(y, x, z), J_s(x, y, z) = (-1)^{|y||z|} J_s(x, z, y). \quad (1)$$

Отсюда следует

$$J_s(x, y, z) = \pm J_s(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)),$$

где σ - перестановка элементов $\{x, y, z\}$. Таким образом, достаточно проверить утверждение леммы на упорядоченных тройках базисных элементов.

Рассмотрим последовательно все возможные случаи

а) $J_s(x, y, y) = -J_s(x, y, y) = 0$, если $|y| = 1$ в силу первого из соотношений (1).

Тогда $J_s(x, h, h) = 0$ для произвольного базисного элемента x .

б) $J_s(b_i, a_j, a_k), J_s(b_i, b_j, x) \in (A^2)^4 + A^{(2)} \cdot A^{(2)} = 0$ для произвольного базисного элемента x .

Остается рассмотреть следующие тройки базисных элементов:

$$\{a_i, a_j, h\}, \{b_i, a_j, h\}, \{a_i, a_j, a_k\}.$$

в) Покажем, что $J_s(a_i, a_j, h) = 0$, где $i \geq j$.

$$\begin{aligned} J_s(a_0, a_0, h) &= (a_0 \cdot a_0) \cdot h + (a_0 \cdot h) \cdot a_0 + a_0 \cdot (a_0 \cdot h) = \\ &= b_0 \cdot h + a_1 \cdot a_0 + a_0 \cdot a_1 = 3b_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_s(a_1, a_0, h) &= (a_1 \cdot a_0) \cdot h + (a_1 \cdot h) \cdot a_0 + a_1 \cdot (a_0 \cdot h) = \\ &= b_1 \cdot h + a_0 \cdot a_0 + a_1 \cdot a_1 = -b_0 + b_0 = 0, \end{aligned}$$

$$J_s(a_1, a_1, h) = 0, \text{ ввиду (а).}$$

г) Если $J_s(x, y, z) \in \Phi\{w\}$, $|x| + |y| + |z| \equiv 1 \pmod{2}$, то $J_s(x, y, z) = 0$ (так как $|w| = 0$).

д) $J_s(b_i, a_j, h) = 0$, $i + j + 1 \equiv 0 \pmod{2}$.

$$J_s(b_0, a_1, h) = -(b_0 \cdot h) \cdot a_1 + b_0 \cdot (a_1 \cdot h) = -b_1 \cdot a_1 + b_0 \cdot a_0 = -w + w = 0,$$

$$J_s(b_1, a_0, h) = (b_1 \cdot h) \cdot a_0 + b_1 \cdot (a_0 \cdot h) = -b_0 \cdot a_0 + b_1 \cdot a_1 = -w + w = 0,$$

е) $J_s(a_i, a_j, a_k) = 0$, где $i \geq j \geq k$, $i + j + k \equiv 0 \pmod{2}$.

$$J_s(a_0, a_0, a_0) = 3(a_0 \cdot a_0) \cdot a_0 = 0,$$

$$J_s(a_1, a_1, a_0) = (a_1 \cdot a_1) \cdot a_0 + (a_1 \cdot a_0) \cdot a_1 + a_1 \cdot (a_1 \cdot a_0) = b_1 \cdot a_1 + a_1 \cdot b_1 = 0.$$

Все возможные случаи рассмотрены. Соотношение доказано.

Отсюда следует, что в алгебре $G(A)$ выполнено соотношение

$$J(x, y, z) = 0.$$

Кроме того, $G(A)$ коммутативна ввиду суперкоммутативности A .

Как было показано ранее, в этом случае $G(A)$ альтернативна.

Лемма доказана.

Пусть $G(A) = A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1$ - грассманова оболочка супералгебры A , где $G = G_0 + G_1$ - алгебра Грассмана с единицей; $\langle w \otimes 1 \rangle$ - главный идеал алгебры $G(A)$, порожденный элементом $\langle w \otimes 1 \rangle \in G(A)$.

Теорема. Фактор-алгебра $G(A)/\langle w \otimes 1 \rangle \in M$.

Доказательство.

Из леммы, суперкоммутативности алгебры A и соотношения $(A^2)^3 \cdot A = 0$ следует, что грасманова оболочка $G(A) = A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1$ - коммутативная альтернативная алгебра с тождеством

$$[(x_1x_2 \cdot x_3x_4)(x_5x_6)]x_7 = 0.$$

Остается показать, что в $G(A)/\langle w \otimes 1 \rangle$ выполнено соотношение

$$x^3 = 0.$$

Заметим, что множество элементов вида $x \otimes \lambda$, где $x \in E$, λ - порождающий элемент алгебры Грассмана G , порождает $G(A)$. Для таких элементов имеем

$$(x \otimes \lambda)^3 = x^3 \otimes \lambda^3 = w \otimes 1, \text{ если } x = a_0, \lambda = 1, \\ = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Тогда, ввиду соотношения $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ справедливого в M выполняется $g^3 \in \Phi\{w \otimes 1\}$ для произвольных $g \in G(A)$. Тем самым лемма доказана.

Кроме того, заметим, что $w \otimes 1 \in \text{Ann}G(A)$. Следовательно,
 $\langle w \otimes 1 \rangle = \Phi\{w \otimes 1\}$.

Теорема доказана.

Литература

1. К.А. Жевлаков, А.М. Слинко, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов. Кольца, близкие к ассоциативным, М., Наука, 1978.
2. И.П. Шестаков, "Супералгебры и контрпримеры", Сиб. мат. ж., 32, №6, (1991).

References

1. K.A.Zhevlakov, A.M.Slin'ko, I.P. Shestakov, and A.I.Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Nauka, Moscow, 1978.
2. I.P. Shestakov, "Superalgebras and counterexamples", *Sibirsk. Mat. Zh.*, 32, №6, (1991).

Бадеев Александр Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и математического анализа Бурятского государственного университета, e-mail: badeev@mail.ru

Badeyev Aleksander Valeryevich, PhD, A/Professor, Department of Algebra and Mathematical analysis, Buryat State University, e-mail: badeev@mail.ru

УДК 512.54

© *А. И. Ковыршина*

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ СТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СВОБОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ $F_{2,12}$

Настоящая работа посвящена поиску стабильных элементов с неоднородным вхождением образующих в свободной нильпотентной группе ранга 2 степени 12. Изучены автоморфные образы коммутаторов с неоднородным вхождением образующих. Доказана теорема о том, что среди нетривиальных линейных комбинаций таких элементов нет стабильных. Рассмотрен случай построения стабильного элемента, состоящего одновременно из базисных коммутаторов, как с однородным, так и с неоднородным вхождением образующих.

Ключевые слова: нильпотентные группы, автоморфизмы групп, неподвижные точки.

© *А. И. Ковыршина*

FULL DESCRIPTION OF STABLE ELEMENTS OF FREE NILPOTENT GROUP $F_{2,12}$

This paper deals with the search for stable elements with inhomogeneous appearance of generators in free nilpotent groups of rank two and stage 12. The automorphic images of commutators with inhomogeneous appearance of generators are studied. We proved the theorem about non exist stable elements among nontrivial linear combinations of such elements. We considered the case of construction of stable element, consisting of the basic commutators with homogeneous and inhomogeneous appearance of generators.

Keywords: nilpotent groups, automorphisms of groups, fixed points.

Введение

Элемент g группы G называется стабильным, если для любого автоморфизма $\phi \in \text{Aut}(G)$ выполняется условие $\phi(g) = g$.

Вопросами о существовании нетривиальных стабильных элементов в свободных нильпотентных группах занимались В.В. Блудов, А. Папистас, Е. Форманек.

Так, в 1998 году В.В. Блудов [1] доказал, что в свободных нильпотентных группах ранга 2, степени $4k$, $k \geq 2$, такие элементы существуют и тем самым ответил на вопрос, поставленный А. Мясниковым в электронном проекте MAGNUS

(<http://www.sci.cuny.cuny.edu/~shpil/gworld/problems/probnil.html>):

Пусть G - свободная нильпотентная группа конечного ранга r . Пусть

элемент $g \in G$ неподвижен относительно всех автоморфизмов группы G . Верно ли, что $g = 1$?

В 2001 году А. Папистас [9] и Е. Форманек [7], на основании работ Ф. Вефера [10] и М. Барроу [5,6], указали необходимые и достаточные условия существования нетривиальных стабильных элементов в свободных нильпотентных группах. Однако, такие элементы достаточно сложно найти. Примеры нетривиальных стабильных элементов свободных нильпотентных групп впервые привел В.В. Блудов [1]. В 2010 году автором [2] был разработан метод нахождения нетривиальных стабильных элементов группы $F_{r,c}$ – свободной нильпотентной группы ранга r и степени c . Данный метод был использован при доказательстве единственности нетривиального стабильного элемента группы $F_{2,8}$ (с точностью до его степеней) [4], а для группы $F_{2,12}$ позволил найти подгруппу ранга 9, любой элемент которой является стабильным элементом этой группы [3]. Отметим, что при построении этой подгруппы рассматривались только базисные коммутаторы с однородным вхождением образующих. С целью получить полное описание стабильных элементов в группе $F_{2,12}$ в данной работе будут рассмотрены базисные коммутаторы с неоднородным вхождением образующих.

1. Вспомогательные сведения

В работе мы будем использовать базисные коммутаторы, определение которых можно найти в [8]. Для более наглядного восприятия формул для умножения элементов используем знак $+$ и квадратные скобки заменяем на круглые.

Введем обозначения для следующих автоморфизмов группы $F_{2,12}$ со свободными образующими a, b :

$$\varphi_{12} : a \rightarrow a + b, b \rightarrow b;$$

$$\varphi_{21} : a \rightarrow a, b \rightarrow a + b;$$

$$\alpha_1 : a \leftrightarrow -a, b \rightarrow b;$$

$$\alpha_2 : b \leftrightarrow -b, a \rightarrow a.$$

Известно, что стабильные элементы лежат в центре группы. Далее, пусть элемент g – центральный элемент группы $F_{2,12}$, равный линейной комбинации базисных коммутаторов u_s с целыми коэффициентами m_s . Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Для того чтобы элемент $g = \sum m_s u_s$ был стабильным относительно автоморфизмов α_i , $i = 1, 2$, необходимо и достаточно, чтобы число вхождений каждого из образующих в коммутаторы u_s было четным.

Утверждение 2. Для того чтобы элемент g был стабильным, необходимо и достаточно, чтобы g был неподвижен относительно автоморфизмов φ_{12} и φ_{21} .

Обозначим через V_{α_1, α_2} – множество всех базисных коммутаторов веса 12, в которые образующий a входит α_1 раз, а образующий b входит α_2 раза. Очевидно, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 12$.

Утверждение 3. Пусть $g = \sum m_s u_s$ – линейная комбинация базисных коммутаторов u_s из V_{α_1, α_2} , $m_s \in \mathbb{Z}$. Тогда автоморфные образы элемента g определяются следующим образом:

$g^{\varphi_{12}} = g + \sum_{k=1}^{\alpha_1} w_k$, где w_k – линейная комбинация коммутаторов, полученных из u_s заменой k вхождений образующего a на b ;

$g^{\varphi_{21}} = g + \sum_{k=1}^{\alpha_2} v_k$, где v_k – линейная комбинация коммутаторов, полученных из u_s заменой k вхождений образующего b на a .

При этом, если w_1 или v_1 отличны от нуля, то элемент g является нестабильным.

Множество всех базисных коммутаторов веса 12 мы разобьем на подмножества Δ_i коммутаторов одного вида в зависимости от расположения коммутаторных скобок. Для этого введем обозначения для расположения скобок в базисных коммутаторах. Считаем по определению, что все левонормированные базисные коммутаторы $[x_1, \dots, x_m]$ веса m , где $x_1, \dots, x_m \in \{a, b\}$, имеют вид (m) . Пусть u_i – коммутатор вида (k_i) , $i = 1, \dots, s$. Тогда считаем, что коммутатор $[u_1, \dots, u_m]$ имеет вид (k_1, \dots, k_s) . Через M_1 обозначим множество базисных коммутаторов вида (12), M_2 – множество базисных коммутаторов видов $(k_1 k_2)$, где $k_1 + k_2 = 12$ и $k_1 > k_2 > 1$.

Справедливо утверждение:

Утверждение 4. Если в представлении элемента $g \in F_{2,12}$ входит линейная комбинация элементов из M_1 или M_2 , то существует автоморфизм φ , под действием которого $g^\varphi \neq g$.

Рассмотрим следующие виды коммутаторов:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (8,2,2); \delta_2 = (5,2,5); \delta_3 = (7,2,3); \delta_4 = (6,2,4); \\ \delta_5 &= (6,3,3); \delta_6 = (3,3,6); \delta_7 = (4,2,6); \delta_8 = (4,4,4); \\ \delta_9 &= (6,2,2,2); \delta_{10} = (4,2,2,2,2); \delta_{11} = (4,3,5); \delta_{12} = (3,2,2,5); \\ \delta_{13} &= (5,2,2,3); \delta_{14} = (3,2,2,2,3); \delta_{15} = (5,3,4); \delta_{16} = (3,2,3,4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{17} &= (4,2,3,3); \delta_{18} = (3,3,3,3); \delta_{19} = (4,2,2,4); \delta_{20} = ((4,2), (4,2)); \\ \delta_{21} &= ((6,1), (3,2)); \delta_{22} = ((4,3), (3,2)); \delta_{23} = ((5,2), (3,2)); \\ \delta_{24} &= ((3,3), (4,2)); \delta_{25} = ((3,3), (3,3)); \delta_{26} = ((3,2,2), (3,2)). \end{aligned}$$

Множество базисных коммутаторов вида δ_j , $j=1, \dots, 26$, обозначим через Δ_j . Количество элементов множества Δ_j обозначим через r_j . Нетривиальную линейную комбинацию элементов $u_i^{(j)}$ из Δ_j обозначим через $U_j(\tilde{m}^{(j)})$, то есть $U_j(\tilde{m}^{(j)}) = \sum_{i=1}^{r_j} m_i^{(j)} u_i^{(j)}$, где $m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \dots, m_{r_j}^{(j)}$ – целые числа, одновременно не равные нулю, $u_i^{(j)} \in \Delta_j$.

Рассмотрев все возможные варианты базисных коммутаторов из Δ_j , $j=1, \dots, 26$, получаем, что элементы из Δ_j в результате одной замены какого-либо образующего на другой переходят в сумму коммутаторов из Δ_i , где i зависит от j . Так, например, элементы из Δ_1 переходят в сумму коммутаторов из Δ_i , $i=1, 9, 12, 13, 19, 20, 23$, что записываем в виде $\Delta_1 \rightarrow \Delta_1 + \Delta_9 + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{19} + \Delta_{20} + \Delta_{23}$. Далее устанавливаем такие же связи для остальных Δ_j , $j=1, \dots, 26$:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\rightarrow \Delta_2 + \Delta_{12} + \Delta_{23}; \Delta_3 \rightarrow \Delta_3 + \Delta_{13} + \Delta_{16} + \Delta_{17} + \Delta_{22} + \Delta_{24}; \\ \Delta_4 &\rightarrow \Delta_4 + \Delta_{16} + \Delta_{19}; \Delta_5 \rightarrow \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_{17} + \Delta_{18} + \Delta_{25}; \Delta_6 \rightarrow \Delta_6 + \Delta_{24} + \Delta_{25}; \\ \Delta_7 &\rightarrow \Delta_7 + \Delta_{20} + \Delta_{24}; \Delta_8 \rightarrow \Delta_8; \Delta_9 \rightarrow \Delta_9 + \Delta_{10} + \Delta_{14} + \Delta_{26}; \Delta_{10} \rightarrow \Delta_{10}; \\ \Delta_{11} &\rightarrow \Delta_{11} + \Delta_{22}; \\ \Delta_{12} &\rightarrow \Delta_{12} + \Delta_{26}; \Delta_{13} \rightarrow \Delta_{13} + \Delta_{14}; \Delta_{14} \rightarrow \Delta_{14}; \Delta_{15} \rightarrow \Delta_{15} + \Delta_{16}; \Delta_{16} \rightarrow \Delta_{16}; \\ \Delta_{17} &\rightarrow \Delta_{17} + \Delta_{24}; \Delta_{18} \rightarrow \Delta_{18} + \Delta_{25}; \Delta_{19} \rightarrow \Delta_{19}; \\ \Delta_{20} &\rightarrow \Delta_{20}; \Delta_{21} \rightarrow \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23}; \Delta_{22} \rightarrow \Delta_{22}; \Delta_{23} \rightarrow \Delta_{23} + \Delta_{26}; \\ \Delta_{24} &\rightarrow \Delta_{24}; \Delta_{25} \rightarrow \Delta_{25}; \Delta_{26} \rightarrow \Delta_{26}. \end{aligned}$$

Чтобы установить, входят ли, например, базисные коммутаторы из Δ_{12} в стабильный элемент, надо сначала выполнить все необходимые вычисления для коммутаторов из Δ_1 и Δ_2 , так как под действием автоморфизмов α_1 или α_2 автоморфные образы элементов из Δ_1 и Δ_2 содержат коммутаторы из Δ_{12} .

2. Основной результат

Нами были установлены связи между подмножествами базисных коммутаторов одного и того же вида в зависимости от автоморфных образов элементов этих подмножеств. Множества V_{α_1, α_2} , $\alpha_1 + \alpha_2 = 12$, также связаны посредством коммутаторов, получающихся в их образах

относительно автоморфизмов φ_{12} или φ_{21} . Согласно утверждению 1, мы рассматриваем коммутаторы из V_{α_1, α_2} для четных целых чисел α_1 и α_2 . Из видов коммутаторов, являющихся элементами множеств Δ_j , $j = 1, \dots, 26$, следует, что число вхождений каждого образующего в эти коммутаторы не меньше 3. Следовательно, коммутаторы из $V_{2,10}$ и $V_{10,2}$ входят только в M_1 или M_2 , а значит, согласно утверждению 4, всякая их нетривиальная линейная комбинация не является стабильной. Поэтому, нас интересуют следующие распределения числа вхождений образующих a и b в базисные коммутаторы: один из образующих входит 4 раза, а другой – 8 раз и каждый из образующих входит одинаковое число раз. Таким образом, в разложении элемента g могут входить базисные коммутаторы множеств $V_{4,8}$, $V_{8,4}$, $V_{6,6}$.

Пусть $g = \sum m_s u_s$. Если коммутаторы u_s принадлежат $V_{4,8}$, то в образе элемента g под действием автоморфизма φ_{12} , элемент w_1 является линейной комбинацией коммутаторов из $V_{3,9}$. Если коммутаторы u_s принадлежат $V_{8,4}$, то в автоморфном образе $g^{\varphi_{12}}$ элемент w_5 является линейной комбинацией коммутаторов из $V_{3,9}$. Наконец, если коммутаторы u_s принадлежат $V_{6,6}$, то в автоморфном образе $g^{\varphi_{12}}$ линейная комбинация коммутаторов из $V_{3,9}$ задается элементом w_3 . Таким образом, если в представление элемента g входят базисные коммутаторы из множеств $V_{4,8}$, $V_{8,4}$ и $V_{6,6}$, то надо рассмотреть в $g^{\varphi_{12}}$ линейные комбинации w_1 , w_3 и w_5 , соответственно для коммутаторов из множеств $V_{4,8}$, $V_{6,6}$ и $V_{8,4}$, при условии равенства нулю линейной комбинации, полученной в результате замены одного вхождения образующего a на b в коммутаторах из $V_{8,4}$. Подобным образом проводим рассуждения и для автоморфизма φ_{21} . Так, если в представление элемента g входят базисные коммутаторы из множеств $V_{4,8}$, $V_{8,4}$ и $V_{6,6}$, то надо рассмотреть в $g^{\varphi_{21}}$ линейные комбинации v_1 , v_3 и v_5 , соответственно для коммутаторов из множеств $V_{8,4}$, $V_{6,6}$ и $V_{4,8}$, при условии равенства нулю линейной комбинации, полученной в результате замены одного вхождения образующего b на a в коммутаторах из $V_{4,8}$. Поэтому, чтобы найти стабильный элемент с неоднородным вхождением образующих, надо сначала установить линейные комбинации, полученные в результате замены одного вхождения образующего a на b в коммутаторах из $V_{8,4}$ и в результате замены одного вхождения

образующего b на a в коммутаторах из $V_{4,8}$. Проверить полученные линейные комбинации на их равенство нулю.

Теорема: Среди линейных комбинаций базисных коммутаторов с неоднородным вхождением образующих в свободной нильпотентной группе $F_{2,12}$ нет нетривиальных стабильных элементов.

Доказательство: Пусть $m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \dots, m_{r_j}^{(j)}$ – целые числа, одновременно не равные нулю. Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $U_j(\tilde{m}^{(j)}) = \sum_{i=1}^{r_j} m_i^{(j)} u_i^{(j)}$ базисных коммутаторов $u_i^{(j)} \in \Delta_j$ с неоднородным числом вхождений образующих. Выделим два случая:

Случай 1. Коммутаторы $u_i^{(j)}$ принадлежат множеству $V_{8,4}$.

Рассмотрим множество Δ_1 , оно содержит единственный базисный коммутатор $u_1^{(1)} = ((abbaaaaa)(ab)(ab))$, входящий в $V_{8,4}$. Указанный элемент $u_1^{(1)}$ не является стабильным, так как применив к нему автоморфизм φ_{12} получим, что в разложение $(u_1^{(1)})^{\varphi_{12}}$ входит элемент $((abbbaaaa)(ab)(ab))$ с коэффициентом $5m_1^{(1)} \neq 0$.

Рассмотрим множество Δ_2 . Его элементами, входящими в $V_{8,4}$ являются $u_1^{(2)} = ((abaaa)(ab)(abbaa))$ и $u_2^{(2)} = ((abbaa)(ab)(abaaa))$. Применим к элементу $U_2(\tilde{m}^{(2)}) = \sum_{i=1}^2 m_i^{(2)} u_i^{(2)}$ автоморфизм φ_{12} . Запишем линейную

комбинацию базисных коммутаторов, полученных из $u_i^{(2)}$, $i = 1, 2$ заменой одного вхождения образующего a на b и принадлежащих Δ_2 :

$$(3m_1^{(2)} + 3m_2^{(2)})((abbaa)(ab)(abbaa)) + 2m_1^{(2)}((abaaa)(ab)(abbba)) + 2m_2^{(2)}((abbba)(ab)(abaaa))$$

Так как $m_2^{(2)} \neq 0$ или $m_1^{(2)} \neq 0$, то все коэффициенты полученной линейной комбинации одновременно не равны нулю.

Рассмотрим множество Δ_3 . Базисные коммутаторы $u_i^{(3)}$, входящие в $V_{8,4}$ есть $u_1^{(3)} = ((abbaaaa)(ab)(aba))$ и $u_2^{(3)} = ((abaaaaa)(ab)(abb))$. Линейная комбинация базисных коммутаторов, полученных из $u_i^{(3)}$, $i = 1, 2$ заменой одного вхождения образующего a на b и принадлежащих Δ_3 равна

$$(m_1^{(3)} + 5m_2^{(3)})((abbaaaa)(ab)(abb)) + 4m_1^{(3)}((abbbaaa)(ab)(aba)) + 5m_2^{(3)}((abaaaaa)(ab)(abb)).$$

Полученная линейная комбинация входит в автоморфный образ элемента $U_3(\tilde{m}^{(3)})$, а так как хотя бы одно из чисел $m_1^{(3)}$ или $m_2^{(3)}$ отлично от нуля, то элемент $U_3(\tilde{m}^{(3)})$ – нестабильный.

Рассмотрим множество Δ_4 . Определим базисные коммутаторы $u_i^{(4)}$, входящие в $V_{8,4}$: $u_1^{(4)}=((abaaaa)(ab)(abba))$ и $u_2^{(4)}=((abbaaa)(ab)(abaa))$. Тогда $(4m_1^{(4)} + 2m_2^{(4)})(abbaaa)(ab)(abba) + 3m_2^{(4)}(abbbaa)(ab)(abaa) + m_1^{(4)}(abaaaa)(ab)(abbb)$ – линейная комбинация базисных коммутаторов, полученных из $u_i^{(4)}$ ($i=1,2$) заменой одного вхождения образующего a на b и принадлежащих Δ_4 . В этой комбинации не все коэффициенты одновременно равны нулю, следовательно, $U_4(\tilde{m}^{(4)})$ – нестабильный элемент.

Аналогичным образом определяются линейные комбинации $U_j(\tilde{m}^{(j)})$, $5 \leq j \leq 26$ и для каждой из них доказывалось существование нетривиальной линейной комбинации базисных коммутаторов в автоморфном образе $(U_j(\tilde{m}^{(j)}))^{\varphi_{21}}$, что в свою очередь влечет нестабильность $U_j(\tilde{m}^{(j)})$ относительно автоморфизма φ_{12} .

Случай 2. Коммутаторы $u_i^{(j)}$ принадлежат множеству $V_{4,8}$.

Для всех $j=1, \dots, 26$ определяем элементы, одновременно принадлежащие Δ_j и $V_{4,8}$. Затем составляем линейные комбинации $U_j(\tilde{m}^{(j)})$ и действуем на них автоморфизмом φ_{21} . Заменяя одно вхождение образующего b на a и разложив полученные коммутаторы по базисным, вычисляем коэффициенты линейной комбинации базисных коммутаторов, входящей в образ $(U_j(\tilde{m}^{(j)}))^{\varphi_{21}}$. Далее проверяем равенство нулю всех найденных коэффициентов, зависящих от чисел $m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \dots, m_r^{(j)}$, одновременно не равных нулю. Приведем вычисления, например, для $j=15$. Определим элементы множества Δ_{15} , входящие в $V_{4,8}$: $u_1^{(15)}=((abbbb)(abb)(abba))$, $u_2^{(15)}=((abbbb)(aba)(abbb))$, $u_3^{(15)}=((abbbba)(abb)(abbb))$. Применим к элементу $U_{15}(\tilde{m}^{(15)}) = \sum_{i=1}^3 m_i^{(15)} u_i^{(15)}$ автоморфизм φ_{21} . Запишем линейную комбинацию базисных коммутаторов, полученных из $u_i^{(15)}$ ($i=1,2,3$) заменой одного вхождения образующего b на a и принадлежащих Δ_{15} :

$$(3m_1^{(15)} + 2m_3^{(15)})((abbba)(abb)(abba)) + (m_1^{(15)} + 2m_2^{(15)})((abbbb)(aba)(abba)) + \\ + m_1^{(15)}((abbbb)(abb)(abaa)) + (3m_2^{(15)} + m_3^{(15)})((abbba)(aba)(abbb)) + \\ + 2m_3^{(15)}((abbaa)(abb)(abbb)).$$

Так как $m_1^{(15)}$, $m_2^{(15)}$, $m_3^{(15)}$ одновременно не равны нулю, то хотя бы один из коэффициентов полученной линейной комбинации отличен от нуля. Действительно, предположив противное

$$3m_1^{(15)} + 2m_3^{(15)} = 0, \quad m_1^{(15)} + 2m_2^{(15)} = 0, \quad 3m_2^{(15)} + m_3^{(15)} = 0,$$

$$m_1^{(15)} = 0, \quad 2m_3^{(15)} = 0,$$

мы получим $m_1^{(15)} = m_2^{(15)} = m_3^{(15)} = 0$, что противоречит выбору последовательности чисел $m_i^{(15)}$, $i = 1, 2, 3$.

Для остальных Δ_j доказательство проводится подобным образом. При этом, для каждого из множеств Δ_j проверено, что среди линейных комбинаций элементов этих множеств нет нетривиальных стабильных элементов.

С учетом результатов [3] получено полное описание стабильных элементов группы $F_{2,12}$, а именно, справедлива теорема:

Теорема: В свободной нильпотентной группе $F_{2,12}$ существует всего 9 линейно независимых стабильных элементов.

Заключение

Показано применение метода нахождения стабильных элементов для поиска стабильных элементов с неоднородным вхождением образующих в свободных нильпотентных группах ранга 2 степени 12.

Автор благодарен профессору Блудову В.В. за постановку вопросов и внимание к работе.

Литература

1. Блудов В.В. Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах. //Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике. Тез. докл. часть 5. Новосибирск, 1998.
2. Ковыршина А.И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга три // Вестник Омского университета. – 2010. – №4 (58). – С. 20–23.
3. Ковыршина А.И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга два // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т.3, № 4. – С. 48–57.
4. Ковыршина А.И. О стабильных элементах в свободных нильпотентных группах ранга два // Вестник Бурятского государственного уни-

верситета. Серия: Математика и информатика. – 2015. – № 9. – С. 3–6.

5. Burrow M.D. Invariants of free Lie rings // Communications on pure and applied mathematics. 1958. No. 11. Pp. 419-431.

6. Burrow M.D. The enumeration of Lie invariants // Communications on pure and applied mathematics. 1967. No. 20. Pp. 401-411.

7. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups // Communications in algebra. 2002. No. 30. Pp. 1033-1038.

8. Магнус В. Комбинаторная теория групп [Текст]/ В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

9. Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups // Communications in algebra. 2001. No. 29, Pp. 4693-4699.

10. Wever, F. Ueber Invarianten in Lieschen Ringen // Mathematische Annalen. 1949. No. 120. Pp. 563-580.

References

1. Bludov V.V. Fixed points with respect to all automorphisms in free nilpotent groups // Third Siberian Congress on Industrial and Applied Mathematics. Proc. rep. Part 5. Novosibirsk. 1998.

2. Kovyrshina A.I. Fixed points with respect to all automorphisms of the free nilpotent groups for three generators // Herald of Omsk University. 2010. No. 4 (58). Pp. 20-23.

3. Kovyrshina A.I. Stable elements of free nilpotent class 12 groups with 2 generators // The Bulletin of Irkutsk State University. 2010. No. 4. Pp. 48-57.

4. Kovyrshina A.I. Stable elements in free nilpotent groups of rank two // Bulletin of Buryat State University. – 2015. – No.9. – Pp. 3–6.

5. Burrow M.D. Invariants of free Lie rings // Communications on pure and applied mathematics. 1958. No. 11. Pp. 419-431.

6. Burrow M.D. The enumeration of Lie invariants // Communications on pure and applied mathematics. 1967. No. 20. Pp. 401-411.

7. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups // Communications in algebra. 2002. No. 30. Pp. 1033-1038.

8. Magnus W., Karrass A., Solitar D. Combinatorial Group Theory. – Moscow: Nauka, 1974. – 455 p.

9. Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups // Communications in algebra. 2001. No. 29, Pp. 4693-4699.

10. Wever, F. Ueber Invarianten in Lieschen Ringen // Mathematische Annalen. 1949. No. 120. Pp. 563-580.

Ковыршина Анна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент Педагогического института Иркутского государственного университета, e-mail: annkow@mail.ru

Kovyrshina Anna Ivanovna, PhD, A/Professor of department of Pedagogical Institute of Irkutsk State University, e-mail: annkow@mail.ru

2. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.958

© В. В. Денисенко, В. П. Ильин

ОБ ОШИБОЧНОСТИ ТЕОРЕМЫ В. В. АКСЕНОВА¹

Доказана ошибочность сформулированной В.В. Аксеновым теоремы о возможности представления произвольной соленоидальной векторной функции внутри шара с помощью одной скалярной функции специального вида.

Ключевые слова: соленоидальное поле, потенциалы.

© V. V. Denisenko, V. P. Iliin

INCORRECTNESS OF THE THEOREM BY V. V. AKSENOV

The theorem by V.V. Aksenov on the possibility of representing an arbitrary solenoidal vector function in a ball with a single scalar function of a special kind is disproved.

Keywords: solenoidal field, potentials.

Введение

Для удобства работы с векторными функциями принято использовать различные потенциалы: скалярные, векторные или их комбинации [1]. Особое внимание уделяется соленоидальным векторным функциям, то есть имеющим нулевую дивергенцию

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (1)$$

Например, в работе [2] доказано, что всякая непрерывно дифференцируемая соленоидальная векторная функция представима в виде

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

где \vec{A} имеет нулевую нормальную компоненту на границе области и удовлетворяет равенству

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Это условие бездивергентности называется кулоновской калибровкой для векторного потенциала \vec{A} , который принято вводить для магнитной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-05-00152), работа поддержана грантом РФФИ № 14-11-00485.

индукции \vec{B} , являющейся соленоидальной векторной функцией в силу уравнений Максвелла в стационарном случае.

Теорема В.В. Аксенова

В работе [3] сформулирована следующая теорема:

Соленоидальное векторное поле \vec{H} в сферической области (в шаре с поверхностью S и радиусом R), однозначно восстанавливается выражением

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \text{rot}(Q\vec{r}) + \text{rot rot}(Q\vec{r}), \quad (2)$$

если известна нормальная составляющая H_N на S , а функция $Q \in C^\infty$, среднее значение которой на S равно нулю, и $\vec{H}, \vec{H}_1, \vec{H}_2 \neq 0$ всюду.

Через \vec{r} обозначен радиус-вектор точки. Утверждения, аналогичные данной теореме, приведены также в книгах В.В. Аксенова [4], [5] и в его некоторых других изданиях.

Справедливость представления (2) с помощью одной скалярной функции существенно упростила бы работу с соленоидальными векторными функциями, и, в частности, кардинально облегчило бы решение многих задач математической физики. Но, к сожалению, оно не верно. Чтобы это доказать, приведем в качестве контрпримеров два вида соленоидальных векторных полей, удовлетворяющих условию теоремы, но не удовлетворяющих равенству (2).

Контрпримеры к теореме В.В. Аксенова

Запишем формулу (2) покомпонентно в сферических координатах r, θ, ϕ

$$H_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} \right), \quad (3)$$

$$H_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

$$H_\phi = -\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Q}{\partial \phi} \right). \quad (5)$$

Вычислив радиальную компоненту ротора этой векторной функции по формуле

$$\text{rot}_r \vec{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\phi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right)$$

с использованием выражений (4), (5) для H_θ, H_ϕ , получаем ее равенство выражению (3) для H_r . Следовательно, всякая векторная функция вида (2) удовлетворяет условию

$$\operatorname{rot}_r \vec{H} = H_r. \quad (6)$$

Разумеется, не всякая функция, удовлетворяющая условиям теоремы, удовлетворяет условию (6). Простейшим примером является следующая векторная функция, не зависящая от координат. Пусть вектор \vec{H} параллелен оси $\theta = 0$, и его модуль равен H_0 . Эта векторная функция имеет нулевую дивергенцию, и значит, является соленоидальной. Она имеет нулевой ротор и отличную от нуля радиальную компоненту $H_r = H_0 \cos \theta$, и значит, не удовлетворяет (6).

Чтобы не создалось впечатление, что достаточно исключить константы из множества рассматриваемых функций, приведем и пример противоречия условию (6) при $H_r = 0$ и отличной от нуля компоненте ротора $\operatorname{rot}_r \vec{H}$. Это поле вида $H_r = H_\theta = 0$, $H_\phi = f(r, \theta)$ с отличной от тождественного нуля функцией $f(r, \theta)$, произвол которой ограничен только условиями гладкости. Дивергенция такого поля равна нулю, и значит, оно удовлетворяет условию теоремы. Компонента ротора $\operatorname{rot}_r \vec{H}$ этого поля не может тождественно равняться нулю, поскольку ее интеграл по части сферы $\theta < \theta_0$ равен интегралу касательной компоненты самого поля \vec{H} по ограничивающей ее линии $\theta = \theta_0$, то есть $2\pi r \sin \theta_0 f(r, \theta_0)$. Поскольку $H_r = 0$ тождественно, получаем противоречие (6). В этом примере можно положить $f(r, \theta) = r \sin(\pi\theta / \theta_0)$ при $\theta < \theta_0$, и $f(r, \theta) = 0$ при $\theta \geq \theta_0$, чтобы получить противоречие и последнему утверждению теоремы.

Сопоставление с известными способами введения потенциалов

Рассматриваемую ситуацию можно интерпретировать следующим образом. Трехмерное векторное поле в общем случае определяется тремя скалярными функциями, в качестве которых можно взять три проекции поля на оси координат. Если же векторное поле \vec{H} удовлетворяет условию соленоидальности (1), то данное дополнительное ограничение приводит к тому, что соответствующее поле может быть выражено с помощью не трех, а двух скалярных функций. Данный факт является известным и, например, в книге [6] показано, что произвольное соленоидальное поле \vec{H} может быть представлено в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_T + \vec{H}_P = \operatorname{rot}(T\vec{r}) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(P\vec{r}), \quad (7)$$

где \vec{H}_T и \vec{H}_P называются тороидальным и полоидальным полем соответственно, а скалярные функции выражаются формулами

$$P = -L^{-2}(\vec{r}, \vec{H}), \quad T = -L^{-2}(\vec{r}, \operatorname{rot} \vec{H}).$$

Здесь в круглых скобках – скалярные произведения, и L есть дифференциальный оператор 2-го порядка

$$L\psi = \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \psi.$$

Доказательство представления (2) в статье [3] основано на представлении (7), но использовано дополнительное не обоснованное равенство

$$\vec{H}_p = \text{rot}(\vec{H}_T),$$

которое и позволило получить равенство скалярных функций $P = T$. Заметим, что в статье [3] для слагаемых \vec{H}_T, \vec{H}_p в представлении (7) использованы те же обозначения \vec{H}_1, \vec{H}_2 , что и для слагаемых в (2).

Если в представлении (7) взять не произвольные функции P, T , а связать их некоторыми условиями, то можно получить представления полей \vec{H} в различных частных случаях. Например, в монографии [7] используется пара функций P и $T = hP$, где h - некоторая константа. В качестве функции P берутся решения уравнения Гельмгольца. Тогда формула (7) дает представления некоторых бессиловых магнитных полей. Магнитные поля называются бессиловыми, если равна нулю объемная плотность силы Ампера, действующей на находящийся в этом поле проводник. Поскольку сила Ампера, действующая на единицу объема, равна векторному произведению плотности тока $\vec{j} = \text{rot}\vec{H}$ и \vec{H} , это условие эквивалентно требованию параллельности векторов \vec{H} и $\text{rot}\vec{H}$

$$\vec{H} = \alpha \text{rot}(\vec{H}), \quad (8)$$

где α может быть константой или некоторой заранее неизвестной функцией.

Заметим, что если бы аналогичные (6) соотношения выполнялись и для θ -, φ - компонент, поле, представляемое в виде (2), было бы бессиловым с константой $\alpha = 1$, но при произвольной функции Q этого свойства нет.

В монографии [8] для представления бессиловых полей использована более общая форма

$$\vec{H} = \alpha \text{rot}(\vec{A}) + \text{rot}\text{rot}(\vec{A}), \quad (9)$$

которая сходна с (2) и (7) наличием повторной операции rot . Для введенной новой неизвестной функции \vec{A} условие (8) тоже сводится к уравнению Гельмгольца. Использование представлений (7) и (9) свидетельствует в пользу аналогичного им представления (2), однако этим приемом удастся воспользоваться только в некоторых частных случаях, как это сделано в [7, 8], а не для произвольного соленоидального поля, как утверждается в обсуждаемой теореме из [3].

О единственности потенциала

В формулировке теоремы [3] есть еще одно утверждение: «... однозначно восстанавливается выражением (2)». Разумеется, вычисление по этим формулам дает единственный результат, поскольку в нем нет неоднозначных функций, но эти слова можно трактовать и не столь тривиально, а как единственность такой функции Q для заданного поля \vec{H} . Последнее не верно. Возьмем произвольную скалярную функцию $q(r)$, зависящую только от координаты r и равную нулю на граничной сфере $r = R$, чтобы удовлетворить однородному граничному условию, наложенному на $Q(r)$ условиями теоремы. Направленная по радиусу векторная функция $rq(r)(1, 0, 0)$ имеет нулевой ротор, и поэтому функция $q(r)$ может быть добавлена к $Q(r)$ без изменения представляемого поля \vec{H} . Значит, единственности $Q(r)$ нет.

Заключение

Таким образом, представление (2) может быть справедливым только для гораздо более узкого класса функций, чем указанный в теореме, и когда функция $Q(r)$ существует, она не единственная.

Литература

1. Денисенко В.В. Энергетический метод для трехмерных эллиптических уравнений с несимметричными тензорными коэффициентами // Сибирский математический журнал. - 1997. - Т. 38. № 6. - С. 1267-1281.
2. Быховский Э.Б. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы // Вестник ЛГУ. - 1957. - № 13. С. - 50-66.
3. Аксенов В.В. О некоторых соленоидальных векторных полях в сферических областях // Дифференциальные уравнения. - 2012. - Т. 48. № 7. - С. 1056-1059.
4. Аксенов В.В. Основы геомагнетизма. - Новосибирск: изд. ИВМиМГ СО РАН. - 2012. – 132 с.
5. Аксенов В.В. Электромагнитное поле Земли. – Новосибирск: изд. ИВМиМГ СО РАН. - 2009. – 216 с.
6. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. – М.: Мир. - 1980. – 332 с.
7. Паркер Е. Космические магнитные поля. - М.: Мир. - 1982. – 608 с.
8. Marsh G.E. Force-free magnetic fields. Solutions, topology and applications. - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific. - 1996. – 157 p.

References

1. Denisenko V.V. Jenergeticheskij metod dlja trehmernyh jellipticheskikh uravnenij s nesimmetrichnymi tenzornymi kojefficientami // Si-birskij matematicheskij zhurnal. - 1997. - T. 38. № 6. - P. 1267-1281.
2. Byhovskij Je.B. Reshenie smeshannoј zadachi dlja sistemy uravnenij Maksvella v sluchae ideal'no provodjashheј granicy // Vestnik LGU. - 1957. - № 13. P. 50-66.
3. Aksenov V.V. O nekotoryh solenoidal'nyh vektornyh poljah v sfericheskikh oblastjah // Differencial'nye uravnenija. - 2012. - T. 48. № 7. - P. 1056-1059.
4. Aksenov V.V. Osnovy geomagnetizma. - Novosibirsk: izd. IV-MiMG SO RAN. - 2012. – 132 p.
5. Aksenov V.V. Jelektromagnitnoe pole Zemli. – Novosibirsk: izd. IVMiMG SO RAN. - 2009. – 216 p.
6. Moffat G. Vozbuzhdenie magnitnogo polja v provodjashheј srede. – M.: Mir. - 1980. – 332 p.
7. Parker E. Kosmicheskie magnitnye polja. - M.: Mir. - 1982. – 608 p.
8. Marsh G.E. Force-free magnetic fields. Solutions, topology and applications. - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific. - 1996. – 157 p.

Денисенко Валерий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования СО РАН, e-mail: denisen@icm.krasn.ru

Ильин Валерий Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, e-mail: ilin@sscc.ru

Valery Vasilievich Denisenko, DSc, Professor, Institute of Computational Modelling RAS SB, e-mail: denisen@icm.krasn.ru

Valery Pavlovich Iliin, DSc, Professor, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, e-mail: ilin@sscc.ru

УДК 517.956

© *В. В. Кибирев***ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА**

Статья посвящена изучению задачи о наклонной производной, в частности рассматриваются задачи Дирихле, Неймана и Пуанкаре.

Ключевые слова: регулярная гармоническая функция, функция Грина, абсолютная и равномерная сходимость рядов.

© *V. V. Kibirev***BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF POTENTIAL THEORY**

The paper studies the oblique derivative problem, in particular, the Dirichlet problem, Neumann, and Poincaré.

Keywords: regular harmonic function, Green's function, the absolute and uniform convergence of the series.

Введение

Важным разделом теории уравнений с частными производными является теория краевых задач для эллиптических уравнений и систем уравнений. Среди таких задач наибольший интерес представляют так называемые нефредгольмовые краевые задачи, исследование которых, как правило, сводится к изучению сингулярных интегральных уравнений, причем для этих задач нарушается альтернатива Фредгольма. Благодаря разработанности теории одномерных сингулярных интегральных уравнений [5,6] краевые задачи для эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными в настоящее время полностью изучены [1,6], что нельзя сказать о краевых задачах для эллиптических уравнений с многими независимыми переменными. Ряд важных вопросов в этой области не решен до сих пор, так как нет достаточно общих методов исследований.

Поэтому важно рассмотреть некоторые вопросы теории линейных эллиптических уравнений в трёхмерном случае и сделать некоторые обобщения на многомерный случай.

Постановка задачи

Изучение некоторых физических явлений приводит к естественной постановке следующих двух краевых задачи теории потенциала [1].

Задача Дирихле. Найти регулярную в области D непрерывную в замкнутой области $D \cup \Gamma$ гармоническую функцию u , принимающую наперед заданные значения f на границе Γ области D , т.е. $u = f$ на Γ , где f – заданная непрерывная функция.

Задача Неймана. В области D , граница Γ которой имеет непрерывно меняющуюся нормаль, найти регулярную и непрерывно дифференцируемую в $D \cup \Gamma$ гармоническую функцию u , удовлетворяющую условию $\partial u / \partial n = g$ на Γ , где g – заданная непрерывная функция, а $\partial / \partial n$ – производная по нормали к Γ .

Задача Неймана есть частный случай следующей важной более общей задачи.

Задача о наклонной производной. Пусть на границе Γ , обладающей непрерывно меняющейся нормалью, области D задано поле направлений l , т.е. в каждой точке Γ задан вектор l единичной длины. Найти регулярную в D непрерывно дифференцируемую в замкнутой области $D \cup \Gamma$ гармоническую функцию u , удовлетворяющую условию $\partial u / \partial l = h$ на Γ , где h – заданная непрерывная функция.

Все три сформулированные задачи являются частными случаями следующей граничной задачи.

Задача Пуанкаре. В области D , граница Γ которой имеет непрерывно меняющуюся нормаль, найти регулярную гармоническую функцию u , удовлетворяющую на Γ условию

$$\alpha(P) \frac{\partial u}{\partial l} + \beta(P)u = f(P),$$

где α, β и f – заданные на Γ непрерывные функции, а искомая функция u такова, что замкнутой области $D \cup \Gamma$ существует производная, фигурирующая в граничном условии.

Доказательство основных теорем

Рассмотрим задачу Дирихле. Если для уравнения Лапласа удалось бы построить в области D фундаментальное решение Ω такое, что $\Omega = 0$ на границе Γ области D , то формула

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \Omega \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u \frac{\partial \Omega}{\partial n} dS, \quad (1)$$

где $\Omega = r^{-1} + \omega$ фундаментальное решение с особенностью в точке P выражала бы решение задачи Дирихле. Функцией Грина оператора Лапласа для области D будем называть специальное фундаментальное решение $G(P, Q)$ уравнения Лапласа, зависящее от параметрической точки $Q = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, имеющее вид

$$G(P, Q) = \psi(r) + \omega(P, Q), \quad r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2,$$

И равно нулю, когда точка $P = (x_1, \dots, x_n)$ лежит на поверхности Γ .

Слагаемое ω непрерывно в замкнутой области $D \cup \Gamma$. При помощи функции Грина решение задачи Дирихле записывается формулой

$$u(P) = - \int_{\Gamma} f(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial_{Qn}} dS \quad (2)$$

Формула (2) при предположении существования функции Грина получается как следствие формулы Грина, а для применимости этой последней функция f должна удовлетворять некоторым условиям гладкости. Однако нетрудно проверить непосредственно, что формула (2) дает решение задачи Дирихле при любой непрерывной функции f [4].

Для произвольной области трудно построить функцию Грина, и задача её построения ничуть не проще исходной задачи Дирихле. Но в некоторых важных частных случаях эту функцию можно выписать явно. Так, функция Грина шара $\Sigma: \{x_1^2 + \dots + x_n^2 < R^2\}$ имеет вид

$$G(P, Q) = \psi(r) - \psi(\sigma r_1 / R),$$

$$\psi(s) = [(n-2)\omega_n]^{-1} s^{2-n},$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k)^2, r_1^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - R^2 \sigma^{-2} \xi_k)^2, \sigma^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2.$$

Здесь (x_1, \dots, x_n) - точка P , а $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - точка Q [3]. То, что эта функция удовлетворяет всем требованиям, наложенным на функцию Грина, проверяется непосредственно. Также прямым подсчетом нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \Big|_{Q \in S} = \psi'(r) \frac{R^2 - \rho^2}{rR}, \rho^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

где S - сфера $x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$. Формула (2) для шара Σ теперь принимает вид

$$u = - \frac{R^2 - \rho^2}{R} \int_S \frac{\psi'(r)}{r} f dS. \quad (3)$$

Если в этой формуле перейти к сферическим координатам, то получаем

$$u(X) = - \frac{R^{n-2} (R^2 - \rho^2)}{\omega_n} \int_{\sigma} \frac{f_1 d\sigma}{(\rho^2 - 2R\rho \cos \theta + R^2)^{n/2}}, \quad (4)$$

$f_1(\eta_1, \dots, \eta_n) = f(R\eta_1, \dots, R\eta_n)$, $\rho^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, θ - угол между радиусами-векторами точки X и точки $Q = (R\eta_1, \dots, R\eta_n)$, а интегрирование ведется по n -мерной единичной сфере $\sigma: \{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 = 1\}$. Формула (4) называется интегральной формулой Пуассона.

Очевидно, что в соотношении

$$\begin{aligned} & \frac{R^{n-2}(R^2 - \rho^2)}{[\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos\theta]^{n/2}} = \\ & = \frac{1 - \rho^2/R^2}{\left[1 - 2\frac{\rho}{R}\cos\theta + \frac{\rho^2}{R^2}\right]^{n/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n g_n(\cos\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

ряд сходится для всех $\rho < R$, причем при $\rho \leq R_1 < R$ сходится абсолютно и равномерно. Так как

$$\cos\theta = \frac{x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}}$$

то выражения

$$H_n(X) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{\sigma} f_1 g_n(\cos\theta) d\sigma$$

представляют собой однородные функции целой степени n , т.е. однородные многочлены степени n . Подставив (5) в (4) и поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(X).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Всякую регулярную в шаре Σ гармоническую функцию можно разложить в ряд по однородным многочленам, причем этот ряд во всякой строго внутренней подобласти шара Σ сходится абсолютно и равномерно.*

Из этой теоремы следует, ещё одна теорема

теорема 2. *Всякая гармоническая функция аналитична внутри своей области регулярности.*

Для полупространства $H : \{x_n > 0\}$ также можно написать аналог формулы Пуассона (4). Этот аналог имеет вид

$$u(X) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) d\xi_1, \dots, d\xi_{n-1}}{[(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - \xi_{n-1})^2 + x_n^2]^{n/2}}.$$

Из формулы Пуассона можно получить ещё целый ряд полезных следствий [4]. Имеются и другие методы для решения задачи Дирихле [5,6], но мы здесь не будем останавливаться, поскольку основной нашей целью является изучение задачи о наклонной производной. Рассмотрим лишь некоторые свойства функции Грина.

Функция Грина $G(P, Q)$ области D обращается в нуль на границе Γ области D , а в достаточно малой окрестности точки P она положи-

тельна, так как $\psi(r)$ в этой точке обращается в $+\infty$. В силу принципа максимума получаем, что $G(P, Q) > 0$ всюду в области D . Из того же принципа максимума вытекает, что решение задачи Дирихле единственно, поэтому, положив в (2) $f \equiv 1$, имеем $u \equiv 1$, следовательно,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial Q^n} dS = 1.$$

Если область D ограничена, то для любой её точки P найдется число R такое, что шар Σ радиуса R с центром в данной точке содержит внутри область D . Функция Грина этого шара имеет вид

$$G(P, Q) = \psi(r) - \psi(R) = [(n-2)\omega_n]^{-1}(r^{2-n} - R^{2-n}).$$

Пусть $G(P, Q)$ - функция Грина области D с характеристической особенностью той же точке P . Гармоническая функция

$h(P, Q) = G_1(P, Q) - G(P, Q)$ регулярна в области D и неотрицательна на границе Γ области D . В силу принципа максимума всюду в D имеем

$$G(P, Q) \leq [(n-2)\omega_n]^{-1}(r^{2-n} - R^{2-n}). \quad (6)$$

Из этой оценки вытекает справедливость утверждения.

Теорема 3. Пусть $G(P, Q)$ - функция Грина области D , а B - её подобласть с диаметром меньше h . Тогда

$$\int_B G(P, Q) d_Q \omega < \varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(h)$ зависит только от h , а не от вида подобласти B , и стремится к нулю вместе с h .

При помощи этой теоремы нетрудно показать, что для любой непрерывной, по Гельдеру, в ограниченной области D функции $f(X)$ выражение

$$v(X) = \int_D G(X, Q) f(Q) d_Q \omega$$

дает решение уравнения Пуассона $\Delta v = -f(X)$, непрерывное в $D \cup \Gamma$ и равное нулю на границе Γ .

То, что v непрерывна в $D \cup \Gamma$ и удовлетворяет уравнению Пуассона, следует из теоремы 1. Остается показать, что $v = 0$ на Γ . Пусть P - точка на Γ . Построим шар радиуса h с центром P и обозначим через B пересечение области D с этим шаром. Имеем

$$v(X) = \int_{D'} G(X, Q) f(Q) d_Q \omega + \int_B G(X, Q) f(Q) d_Q \omega,$$

где D' - часть области D , которая остается после выбрасывания B на D . Если точка X стремится к точке P , то интеграл, взятый по D' , стремится к нулю равномерно, а в силу теоремы 3 имеем

$$\left| \int_B G(X, Q) f(Q) d_Q \omega \right| < M \varepsilon(h),$$

причем M – максимум по $|f|$ подобласти B . Так как h можно взять сколь угодно малым, то $\lim_{X \rightarrow P} v(X) = 0$, $P \in \Gamma$.

Нетрудно показать, что для функции Грина можно вывести формулу

$$\begin{aligned} G(X, P) - G(P, X) = \\ = \int_{\Gamma} \left[G(Q, P) \frac{\partial G(Q, X)}{\partial n} - G(Q, X) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial n} \right] dS, \end{aligned} \quad (7)$$

но в силу того, что функция Грина на границе Γ области D обращается в нуль, отсюда получаем свойство симметрии функции Грина $G(X, P) = G(P, X)$ [7].

Попытаемся построить аналог функции Грина для задачи Неймана. Эта функция должна быть фундаментальным решением уравнения Лапласа $\Omega = r^{-1} + \omega$ удовлетворяющим на Γ условию $\partial \Omega / \partial n = 0$. Следовательно, регулярная в области D гармоническая функция ω должна удовлетворять на Γ условию

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial n} (r^{-1}). \quad (8)$$

По теореме 2:

(Пусть задан кусок поверхности Γ , ограничиваемой кривой C , и точка P , не принадлежащая Γ . Тогда потенциал двойного слоя с постоянной плотностью $\sigma = 1$ поверхности Γ в точке P по абсолютной величине равен телесному углу, под которым кривая C видна из точки P . В частности, потенциал двойного слоя поверхности, ограничивающей область D , имеет постоянное значение -4π во всех внутренних точках D , а вне D равен нулю),

доказанной в [3], интеграл от правой части этого равенства равен 4π , а из теоремы 1:

(Если гармоническая функция регулярна в ограниченной области D и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $D \cup \Gamma$, то интеграл по поверхности Γ от ее нормальной производной равен нулю),

доказанной также в [3], теперь следует, что регулярной в области D гармонической функции, удовлетворяющей условию (8), не существует. Аналогичная ситуация имеет место и при $n > 3$ [8].

Для того, чтобы обойти эту трудность, зафиксируем в области точку A и аналог функции Грина для задачи Неймана будем искать в виде $N(X, Q; A) = \psi(r) - \psi(\rho) + \omega(X, Q; A)$, где r – расстояние $L(Q, X)$ от

точки X до Q , а ρ - расстояние $L(X, A)$ от точки X до A . Функция ω регулярна в области D и на границе Γ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \psi(p) - \frac{\partial}{\partial n} \psi(r).$$

Аналогично формуле (7) выводится соотношение

$$u(X) - u(A) = \int_{\Gamma} N(X, Q; A) \frac{\partial u}{\partial n} d_Q S,$$

в силу которого для решения задачи Неймана получается формула

$$u(X) = C + \int_{\Gamma} N(X, Q; A) g(Q) d_Q S, \quad (9)$$

где $u(A) = C$ - произвольная постоянная, причем данная функция g удовлетворяет условию теоремы 1 из [3],

$$\int_{\Gamma} g(Q) dS = 0.$$

Функция N фигурирующая в формуле (9), называется функцией Неймана области D .

Заключение

При изучении задачи о наклонной производной мы рассмотрели задачу Дирихле. Доказали теорему о разложении регулярной гармонической функции в ряд, рассмотрели некоторые свойства функции Грина.

Мы пока не касались проблемы существования функции Грина и Неймана. Решение данного вопроса эквивалентно исследованию исходных задач Дирихле и Неймана. Решим в дальнейшем обе задачи путем сведения их к интегральным уравнениям Фредгольма для случая, когда граница области является достаточно гладкой поверхностью, а именно предположим, что граница области имеет непрерывно меняющуюся касательную плоскость, а в некоторых случаях будем требовать непрерывности главных кривизн границы.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: «Наука», 1981. – 448с.
2. Кибирев В.В. К задаче о наклонной производной с линейными коэффициентами для гармонических функций. – Диф.уравнения. – 1980. – Т.16. - №1. – с.80-85.
3. Кибирев В.В. Формула Грина в теории потенциала. – Вестник БГУ. Математика и информатика. – 9(3) 2014. – Улан-Удэ.: изд-во БГУ, 2014. С.38-62.
4. Курант Р. Уравнение с частными производными.: Мир, 1964. – 830с.

5. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.- М.: ИЛ,1961, 216 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512с.
7. Янушаускас А. К задаче о наклонной производной для гармонических функций трех независимых переменных.// Сиб.матем.журнал. – 1967. – Т.8. – №2. – с.447-462.
8. Янушаускас А. Аналитические и гармонические функции многих переменных. – Новосибирск.: Наука, 1981. – 184с.

References

1. Bicadze A.V. Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh. – М.: «Nauka», 1981. – 448 p.
2. Kibirev V.V. K zadache o naklonnoj proizvodnoj s linejnymi koeficientami dlja garmonicheskikh funkcij. – Dif.uravnenija. – 1980. – Т.16. - №1. – P.80-85.
3. Kibirev V.V. Formula Grina v teorii potenciala. – Vestnik BГУ. Matematika i informatika. – 9(3) 2014. – Ulan-Ude: izd-vo BГУ, 2014. P.38-62.
4. Kurant R. Uravnenie s chastnymi proizvodnymi: Mir, 1964. – 830 p.
5. Miranda K. Uravnenija s chastnymi proizvodnymi jellipticheskogo tipa.- М.: ИЛ,1961, 216 p.
6. Mushelishvili N.I. Singuljarnye integral'nye uravnenija. – М.: Nauka, 1968. – 512 p.
7. Janushauskas A. K zadache o naklonnoj proizvodnoj dlja garmonicheskikh funkcij treh nezavisimyh peremennyh.// Sib.matem.zhuranl. – 1967. – Т.8. – №2. – p. 447-462.
8. Janushauskas A. Analiticheskie i garmonicheskie funkicii mnogih peremennyh. – Novosibirsk.: Nauka, 1981. – 184 p.

Кибирев Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: kafedra_pm@bsu.ru

Kibirev Vladimir Vasilievich, candidate of physical and mathematical sciences, professor, applied mathematics department, Buryat State University, e-mail: kafedra_pm@bsu.ru

3. Математическое моделирование и обработка данных

УДК 528.81, 537.874

© П. Н. Дагуров, А. В. Дмитриев,
С. И. Добрынин, Т. Н. Чимитдоржиев

МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ МИКРОВОЛН ОТ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ С ШЕРОХОВАТЫМИ ГРАНИЦАМИ ¹

Предложена модель обратного рассеяния микроволн от двухслойной среды. Показано, что слоистая структура земных покровов, наряду с вариациями амплитуды, вызывает заметные вариации фазы обратнорассеянных микроволн, которые необходимо учитывать при интерпретации данных дистанционного зондирования. Приведены результаты расчетов фазы волн, отраженных и рассеянных от некоторых двухслойных покровов.

Ключевые слова: дистанционное зондирование, микроволны, отражение, рассеяние, фаза.

© P. N. Dagurov, A. V. Dmitriev,
S. I. Dobrynin, T. N. Chimitdorzhiev

SCATTERING OF MICROWAVES FROM A TWO-LAYER MEDIUM WITH ROUGH BOUNDARIES

A model for the backscattering of radio waves from a two-layer is proposed. It is shown that the layered structure of Earth's surface, along with variations in amplitude, phase causes noticeable variation reflected and scattered microwaves to be considered in the interpretation of remote sensing data. The calculation results of the phase of the waves reflected and scattered by some two covers.

Keywords: remote sensing, microwave, reflection, scattering, phase.

Введение

Наряду с амплитудой, основной характеристикой радиоволны является его фаза, пропорциональная пути, пройденному волной. Свойства фазы, точнее, разности фаз, изначально использовались в радионавигации и в последние десятилетия нашли широкое применение в глобальных навигационных спутниковых системах.

Интерферометрические методы нашли широкое применение в космическом радиолокационном дистанционном зондировании Земли. При ин-

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО и при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-29-06003 офи_м.

терпретации данных зондирования интерферометрическим радаром основной информативной характеристикой является интерферометрическая фаза радиолокационного сигнала, рассеянного земной поверхностью. Используемые до последнего времени расчетные методы практически не учитывают зависимость фазы радиолокационного сигнала от физических и геометрических свойств почвенных покровов, в частности от слоистой структуры приповерхностной почвы. Обычно при анализе работы интерферометрических радаров используется следующее выражение для интерферометрической фазы сигнала [1]

$$\varphi = \varphi_{topo} + \varphi_{def} + \varphi_{atm} + \varphi_{noise}, \quad (1)$$

где слагаемое φ_{topo} возникает вследствие рельефа, компонента φ_{def} описывает влияние деформаций земной поверхности за время между пролетами спутника, составляющая φ_{atm} возникает вследствие неоднородности атмосферы, слагаемое φ_{noise} обусловлено шумами приемно-передающего оборудования.

В формуле (1) не учитывается зависимость фазы сигнала от изменения отражательных свойств поверхности, которая может быть обусловлена слоистой структурой влажности почвы, влиянием замерзания верхнего слоя почвы и другими факторами. Между тем, вариации фазы могут существенно уменьшить точность метода дифференциальной интерферометрии, используемой для определения деформаций и подвижек земных покровов и сооружений на них [2]. Ранее, в работах [3-5] было показано, что слоистость земных покровов вызывает заметные вариации фазы отраженного сигнала. В данной работе исследуется влияние двухслойной среды с шероховатыми границами раздела на фазу микроволн при обратном рассеянии в рамках предложенной приближенной модели.

1. Постановка задачи

Геометрия задачи показана на рис. 3. Из среды 1 (атмосфера) на слой 2 с шероховатыми границами раздела, лежащий на полупространстве 3, падает плоская электромагнитная волна единичной амплитуды. Среда 2 и 3 имеют комплексные диэлектрические проницаемости ε_2 и ε_3 , соответственно. Полагаем, что неровности являются стационарными случайными функциями горизонтальных координат с нулевым средним значением, так что границы раздела в среднем являются плоскостями с расстоянием между ними d (средняя толщина слоя). Также будем считать флуктуации малыми, т. е. среднеквадратичное отклонение неровностей много меньше длины волны.

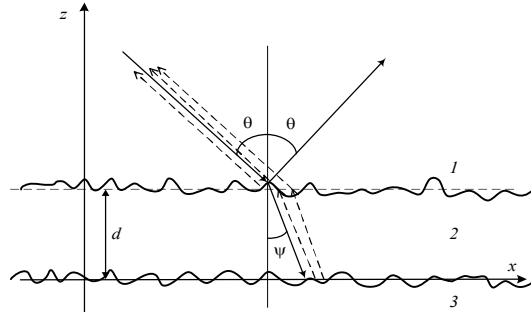


Рис. 1. Геометрия задачи об обратном рассеянии

2. Фаза волны при обратном рассеянии

Найдем поле обратного рассеяния. Как показано на рис. 3, это поле является суммой волн, испытавших различное число отражений и преломлений. Во-первых, это волна, рассеянная верхней граничной поверхностью 12 между средами 1 и 2; затем волна, прошедшая (преломившаяся) в слой через границу 12, рассеянная от нижней границы 23 и затем прошедшая границу 21 и т. д. Поскольку неровности малы, будем полагать, что коэффициенты прохождения определяются формулами Френеля (борновское приближение). Введем понятие коэффициента обратного отражения по полю от шероховатой поверхности, равного отношению напряженности рассеянного поля, к напряженности падающего поля. Тогда коэффициент обратного отражения от слоя с шероховатыми границами можно представить в виде

$$r = r_{12} + T_{12}r_{23}T_{21}e^{2ik_2d/\cos\psi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_{21}r_{23}e^{2ik_2d/\cos\psi})^n \tag{2}$$

где r_{12} и r_{23} – коэффициенты обратного отражения по полю от верхней и нижней поверхностей, соответственно; T_{12} и T_{21} – коэффициенты прохождения через верхнюю границу, k_2 – волновое число в слое, θ_2 – угол преломления, определяемый законом Снеллиуса.

Используя формулу для бесконечной геометрической прогрессии, получим

$$r = \frac{r_{12} + (r_{12}^2 + 1 - R_{12}^2)r_{23}e^{2ik_2d/\cos\psi}}{1 + r_{12}r_{23}e^{2ik_2d/\cos\psi}}, \tag{3}$$

где R_{12} - коэффициент отражения Френеля от второй среды.

Учитывая, что $r_{12}, r_{23} \ll 1$ и полагая, что неровности верхней и нижней поверхностей не коррелированы между собой, после усреднения получим

$$\langle r \rangle = \langle r_{12} \rangle + \left(\langle r_{12}^2 \rangle + 1 - R_{12}^2 \right) \langle r_{23} \rangle e^{2ik_2d/\cos\psi} \tag{4}$$

Поскольку мы ограничиваемся малыми неровностями, для оценок (4) можно использовать результаты метода малых возмущений [6]. Коэффициент $\langle r \rangle$ связан с коэффициентом обратного рассеяния σ_0 , который

обычно определяется во всех теориях радарного рассеяния, соотношением $\langle r \rangle = \sqrt{\sigma_0/4\pi}$. На рис. 2 приведены построенные по формуле (4) зависимости фазы коэффициента $\langle r \rangle$ от толщины слоя на длине волны 23,5 см при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 23$ см, угол $\psi = 30^\circ$, $\varepsilon_2 = 8 + 4i$; на рис. 2а средние коэффициенты обратного отражения $r_{12} = 0,02$, $r_{23} = 0,03$, а на рис. 2б – $r_{12} = 0,03$, $r_{23} = 0,02$, $R_{12} = 0,5$.

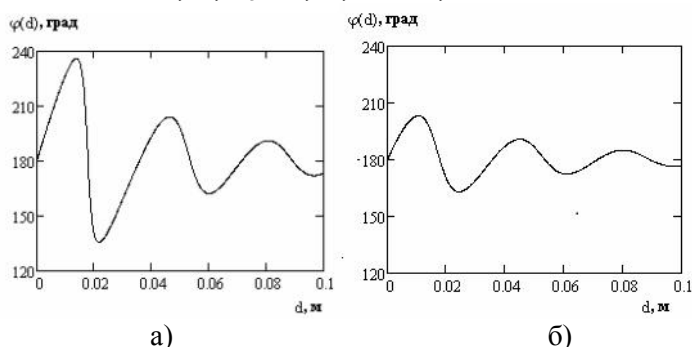


Рис. 2. Зависимости фазы среднего коэффициента обратного отражения от толщины слоя

Наибольшее влияние слоистости почвы на изменения амплитуды и фазы отраженного сигнала проявляется в том случае, когда на влажной почве находится сравнительно сухой слой. Изменения фазы в зависимости от толщины слоя могут достигать нескольких десятков градусов. Эти вариации фазы могут являться источником заметных ошибок при использовании метода дифференциальной интерферометрии и, следовательно, их необходимо учитывать при его практическом применении.

Заключение

В работе представлены возможные вариации фазы микроволн при отражении и рассеянии от двухслойной влажной почвы. Установлено, что слоистость почвы может приводить к заметным изменениям фазы. Полученные результаты для двухслойной почвы могут служить основой для анализа многослойной среды и непрерывной слоистости. Сделан вывод о необходимости учета вариаций фазы для метода дифференциальной интерферометрии.

Литература

1. Kampes В.М. Radar Interferometry. Persistent Scatterer Technique. – Springer, 2006. – 221 p.
2. Lanari, R., Casu, F., Manzo et al. An overview of the Small Baseline Subset algorithm: A DInSAR Technique for surface deformation analysis // Pure and Applied Geophysics. – 2007. – V. 164. – P. 647–661.
3. Дагуров П.Н., Дмитриев А.В., Дымбрылов Ж.Б., Чимитдоржиев Т.Н. Влияние слоистой структуры влажности почвы на работу интерферомет-

рических радиолокаторов с синтезированной апертурой // Известия вузов. Физика. – 2012. – Т.55. – № 8/2. – С. 266-267.

4. Дагуров П.Н., Дмитриев А.В., Чимитдоржиев Т.Н., Базаров А.В., Балтухаев А.К., Дымбрылов Ж.Б. Вариации амплитуды и фазы коэффициента отражения микроволн от влажно-слоистой почвы // Вестник СибГАУ. – 2013. – Вып. 5(51). – С. 117-120.

5. Чимитдоржиев Т.Н., Дагуров П.Н., Захаров А.И., Татьков Г.И., Быков М.Е., Дмитриев А.В., Балданов Н.Д., Мухорин Е.А., Мильхеев Е.Ю. Оценка сезонных деформаций болотистых почв методами радиолокационной интерферометрии и геодезического нивелирования. // Криосфера Земли. – 2013. – т. XVII. – № 1. – с. 80–87.

6. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 428 с.

References

1. Kampses B.M. Radar Interferometry. Persistent Scatterer Technique. – Springer, 2006. – 221 p.

2. Lanari, R., Casu, F., Manzo et al. An overview of the Small Baseline Subset algorithm: A DInSAR Technique for surface deformation analysis // Pure and Applied Geophysics. – 2007. – V. 164. – P. 647–661.

3. Dagurov P.N., Dmitriev A.V., Dymbrylov J.B., Chimitdorzhiev T.N. Influence of the layered structure of the soil moisture to work interferometric synthetic aperture radar // Proceedings of the Universities. Physics. - 2012 - V.55. - № 8/2. - P. 266-267.

4. Dagurov P.N., Dmitriev A.V., Chimitdorzhiev T.N., Bazarov A.V., Baltuhaev A.K., Dymbrylov J.B. Variations in amplitude and phase of the reflection coefficient of the microwaves from the wet-layered soil // Herald SibSAU. - 2013 - Vol. 5 (51). - P. 117-120.

5. Chimitdorzhiev T.N., Dagurov P.N., Zakharov A.I., Tatkov G.I., Bykov M.E., Dmitriev A.V., Baldanov N.D., Muhorin E.A., Milheev E.Y. Evaluation of seasonal strain soil marshy methods radar interferometry and geodetic leveling. // Cryosphere Earth. - 2013 - Vol. XVII. - № 1. - P. 80-87.

6. Bass F.G., Fuks I.M. Scattering of waves on a statistically rough surface. - М.: Nauka, 1972 - 428 p.

Дагуров Павел Николаевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИФМ СО РАН, e-mail: dpr@ipms.bscnet.ru

Дмитриев Алексей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИФМ СО РАН, e-mail: dav@ipms.bscnet.ru

Добрынин Сергей Иннокентьевич, аспирант, начальник отдела информационных технологий Бурятского филиала СибГУТИ, e-mail: wmdumb@gmail.com

П. Н. Дагуров, А. В. Дмитриев, С. И. Добрынин, Т. Н. Чимитдоржиев. Рассеяние микроволн от двухслойной среды с шероховатыми границами

Чимитдоржиев Тумэн Намжилович, доктор технических наук, зам.директора ИФМ СО РАН, e-mail: scidir@ipms.bscnet.ru

Dagurov Pavel Nikolaevich, DSc, Leading Researcher of the IPMS SB RAS, e-mail: dpn@ipms.bscnet.ru

Dmitriev Aleksey Valerievich, PhD, Senior Researcher of the IPMS SB RAS, e-mail: dav@ipms.bscnet.ru

Dobrynin Sergey Innokentievich, graduate student, Head of Information Technology Department of the Buryat branch SibSUTI, e-mail: wmdumb@gmail.com

Chimitdorzhiev Tumen Namzhilovich, DSc, Deputy Director of the IPMS SB RAS, e-mail: scidir@ipms.bscnet.ru

УДК 681.51:519.6

© *А. П. Мадыев, Д. Ш. Ширапов***МЕТОД ПРИВЕДЕНИЯ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ДИСПЕРСИИ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ ТИПА ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ**

Разработан метод приведения слагаемых дисперсий нестационарных случайных процессов, вызванных многократными скачкообразными изменениями стационарных случайных воздействий трех различных видов на входе линейных динамических объектов. Метод позволяет значительно сократить число слагаемых, обеспечивая тем самым существенное снижение вычислительных затрат.

Ключевые слова: случайное стационарное воздействие, линейный динамический объект, включение, отключение, инверсия, переходный режим, случайный сигнал, дисперсия.

© *A. P. Madyev, D. Sh. Shirapov***THE METHOD OF BRINGING THE RESULTANT DISPERSION OF
NONSTATIONARY SIGNALS LIKE THE TRANSITION MODE**

Developed a method of bringing the components of the variances of nonstationary stochastic processes, caused by multiple abrupt changes of stationary stochastic effects of three different types of input linear dynamic objects. The method allows to significantly reduce the number of components, thereby providing a significant reduction in computational costs.

Key words: random fixed effects, linear dynamic object, enabling, disabling, inversion, transition mode, a random signal, variance.

Введение

Известна корреляционная функция и дисперсия реакции линейного динамического объекта (ЛДО) в переходном режиме от однократного включения (скачка) стационарного случайного воздействия (ССВ) с нулевым математическим ожиданием [1–3]. Такой режим – всего лишь один из частных случаев переходных режимов с тремя возможными видами многократных скачков ССВ (включений, выключений или инверсий), которые ранее не исследовались. В [4] впервые получены результирующие дисперсии подобных нестационарных сигналов (реакций), которые позволяют их исследовать.

Полученные в [4] дисперсии содержат большое число слагаемых $N = \sum_{i=1}^{M+1} i$ (где M – число включений, выключений или инверсий ССВ), которое быстро возрастает с увеличением количества скачков.

В работе ставится задача разработки метода, позволяющего значительно сократить число слагаемых результирующих дисперсий нестационарных сигналов в переходных режимах ЛДО от многократных включений, выключений или инверсий ССВ.

1. Приведение составляющих дисперсии

Результирующие дисперсии во всех переходных режимах от многократных скачков с общим числом M включений, выключений или инверсий ССВ получены [4] в виде совокупности частных сумм функционалов, представляющих собой дисперсии $\sigma_{S_i S_i}^2(t)$ от включений ССВ в моменты времени $t_{\text{П}i-1}$ и взаимные дисперсии $\sigma_{S_i S_j}^2(t)$, образованные всеми возможными парами реакций ЛДО от включения ССВ в различные моменты времени $t_{\text{П}i-1}$ и $t_{\text{П}j-1}$, а также дисперсию $\sigma_{S_i S_i}^2(t)$ установившегося режима до первого переходного режима (см. таблица 1).

Таблица 1

Дисперсии сигнала в многократных переходных режимах

Переходной режим	Матричное представление слагаемых дисперсий	Результирующая дисперсия
Многократное включение и отключение ССВ	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{S_2 S_2}^2 & \dots & (-1)^{2+j} 2\sigma_{S_2 S_j}^2 & \dots & (-1)^{2+M+1} 2\sigma_{S_2 S_{M+1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{i+j} 2\sigma_{S_i S_j}^2 & \dots & (-1)^{i+M+1} 2\sigma_{S_i S_{M+1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{pmatrix}$	$\sigma_S^2(t) = \sum_{i=2}^{M+1} \sigma_{S_i S_i}^2 + 2 \sum_{i=2}^{M+1} \sum_{j=i+1}^{M+1} (-1)^{i+j} \sigma_{S_i S_j}^2$
Многократное отключение и включения ССВ	$\begin{pmatrix} \sigma_{S_1 S_1}^2 - 2\sigma_{S_1 S_2}^2 & \dots & (-1)^{1+j} 2\sigma_{S_1 S_j}^2 & \dots & (-1)^{1+M+1} 2\sigma_{S_1 S_{M+1}}^2 \\ 0 & \sigma_{S_2 S_2}^2 & \dots & (-1)^{2+j} 2\sigma_{S_2 S_j}^2 & \dots & (-1)^{2+M+1} 2\sigma_{S_2 S_{M+1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^{i+j} 2\sigma_{S_i S_j}^2 & \dots & (-1)^{i+M+1} 2\sigma_{S_i S_{M+1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{pmatrix}$	$\sigma_S^2(t) = \sigma_{S_1 S_1}^2 + \sum_{i=2}^{M+1} \sigma_{S_i S_i}^2 + 2 \sum_{j=2}^{M+1} (-1)^{j+1} \sigma_{S_1 S_j}^2 + 2 \sum_{i=2}^{M+1} \sum_{j=i+1}^{M+1} (-1)^{i+j} \sigma_{S_i S_j}^2$

Многократная инверсия знака ССВ	$\begin{pmatrix} \sigma_{S_1 S_1}^2 & -4\sigma_{S_1 S_2}^2 & \dots & (-1)^{1+j} 4\sigma_{S_1 S_j}^2 \dots & (-1)^{1+M+1} 4\sigma_{S_1 S_{M+1}}^2 \\ 0 & 4\sigma_{S_2 S_2}^2 & \dots & (-1)^{2+j} 8\sigma_{S_2 S_j}^2 \dots & (-1)^{2+M+1} 8\sigma_{S_2 S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 \dots & & (-1)^{i+j} 8\sigma_{S_i S_j}^2 \dots & (-1)^{i+M+1} 8\sigma_{S_i S_{M+1}}^2 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 \dots & 0 \dots & 0 \dots & 4\sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \sigma_S^2(t) = & \sigma_{S_1 S_1}^2 + 4 \sum_{i=2}^{M+1} \sigma_{S_i S_i}^2 + \\ & + 4 \sum_{j=2}^{M+1} (-1)^{j+1} \sigma_{S_i S_j}^2 + \\ & + 8 \sum_{i=2}^{M+1} \sum_{j=i+1}^{M+1} (-1)^{i+j} \sigma_{S_i S_j}^2 \end{aligned}$
---------------------------------------	--	---

В свою очередь, функционалы-слагаемые результирующей дисперсии имеют вид:

$$\sigma_{S_1 S_1}^2(t) = \int_{t_{П-1}}^t \int_{t_{П-1}}^t h_o(t-x)h_o(t-y)R_B(y-x)dxdy, \tag{1}$$

$$\sigma_{S_2 S_2}^2(t) = \int_{t_{П-1}}^t \int_{t_{П-1}}^t h_o(t-x)h_o(t-y)R_B(y-x)dxdy, \tag{2}$$

$$\sigma_{S_i S_i}^2(t) = \int_{-\infty t_{П-1}}^t \int_{-\infty t_{П-1}}^t h_o(t-x)h_o(t-y)R_B(y-x)dxdy, \tag{3}$$

$$\sigma_{S_i S_i}^2(t) = \int_{-\infty -\infty}^t \int_{-\infty -\infty}^t h_o(t-x)h_o(t-y)R_B(y-x)dxdy, \tag{4}$$

где $h_o(t-x)$ – импульсная характеристика ЛДО; $R_B(y-x)$ – корреляционная функция ССВ.

Функционалы (1) – (4) имеют идентичные подынтегральные выражения, пересекающиеся области интегрирования и входят в результирующую дисперсию с чередующимися противоположными знаками. Такие свойства позволяют сократить число слагаемых в выражениях результирующих дисперсий.

Для удобства введем обозначение двойного интеграла произвольной составляющей дисперсий в виде функционала P четырех переменных (границы областей интегрирования внешнего и внутреннего интеграла):

$$P(a,b,c,d) = \int_a^b \int_c^d h_o(t-x)h_o(t-y)R_B(y-x)dxdy.$$

1.1. Приведение дисперсии сигнала при многократном включении и отключении

Столбец соответствующей матрицы (строка 1 таблицы 1) состоит из $(j-2)$ функционалов взаимных дисперсий и дисперсии от включения ССВ в момент времени $t_{П-1}$:

$$2 \sum_{i=2}^{j-1} (-1)^{i+j} P(t_{\Pi_{i-1}}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t) + P(t_{\Pi_{j-1}}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t), \quad (5)$$

где $j = \overline{3, M+1}$. Для функционалов дисперсии от включения ССВ в момент времени $t_{\Pi_{j-1}}$ далее там, где это удобно, оставим прежнее обозначение $\sigma_{s_j}^2$.

Очевидно, что взаимные дисперсии в (5) имеют противоположные знаки и пересекающиеся области интегрирования $(t_{\Pi_{i-1}}, t)$, $t_{\Pi_{i-1}} < t_{\Pi_i}$.

Рассмотрим сумму первой пары ($i = 2, 3$) функционалов взаимных дисперсий в (5):

$$2[(-1)^{2+j} P(t_{\Pi_1}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t) + (-1)^{3+j} P(t_{\Pi_2}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t)]. \quad (6)$$

Область интегрирования внешнего интеграла (t_{Π_1}, t) , первого функционала рассматриваемой пары может быть поделена на две смежные области (t_{Π_1}, t_{Π_2}) и (t_{Π_2}, t) , а сам функционал представлен в виде суммы двух функционалов:

$$2[(-1)^{2+j} P(t_{\Pi_1}, t_{\Pi_2}, t_{\Pi_{j-1}}, t) + (-1)^{2+j} P(t_{\Pi_2}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t)]. \quad (7)$$

Второй функционал полученной суммы совпадает со вторым функционалом (6), но имеет противоположный знак и поэтому (6) преобразуется к виду:

$$(-1)^{2+j} 2P(t_{\Pi_1}, t_{\Pi_2}, t_{\Pi_{j-1}}, t).$$

Таким образом, пары подобных функционалов приводятся к одному функционалу с измененными областями интегрирования внешних интегралов.

В зависимости от M число функционалов взаимных дисперсий в (5) может быть как четным, так и нечетным. В первом случае все пары функционалов взаимных дисперсий приводимы к функционалам вида:

$$(-1)^{i+j} 2P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_{j-1}}, t)$$

и замыкает колонку функционал дисперсии от включения ССВ.

Во втором случае в j -й колонке остается последний функционал взаимной дисперсии ($i = j - 1$) и функционал дисперсии от включения ССВ.

Рассмотрим подробнее сумму оставшихся функционалов:

$$(-1)^{2j-1} 2P(t_{\Pi_{j-2}}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t) + P(t_{\Pi_{j-1}}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t).$$

Здесь видно, что первое слагаемое всегда будет отрицательным $\forall j$, а области интегрирования внешних интегралов обоих функционалов пересекаются аналогично (6). Таким образом, рассмотренные функционалы преобразуются к следующему виду:

$$-2P(t_{\Pi_{j-2}}, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_{j-1}}, t) - P(t_{\Pi_{j-1}}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t).$$

Первый функционал в указанном выражении имеет области интегрирования аналогичные областям интегрирования приведенных функционалов.

Для наглядности запишем все слагаемые дисперсии после приведения по пределам внешних интегралов в виде матрицы (без нулевой строки), в которой нулями обозначены функционалы, сокращенные в результате приведения:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{S_2 S_2}^2 - 2P(t_{\Pi 1}, t_{\Pi 2}, t_{\Pi 2}, t) \dots (-1)^{2+j} 2P(t_{\Pi 1}, t_{\Pi 2}, t_{\Pi j-1}, t) \dots (-1)^{2+M+1} 2P(t_{\Pi 1}, t_{\Pi 2}, t_{\Pi M}, t) \\ -\sigma_{S_3 S_3}^2 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ & (-1)^i \sigma_{S_i S_i}^2 \dots (-1)^{i+j} 2P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi j-1}, t) \dots (-1)^{i+M+1} 2P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi M}, t) \\ & (-1)^{i+1} \sigma_{S_{i+1} S_{i+1}}^2 \dots & & 0 \\ & \dots & & \\ & & & (-1)^{M+1} \sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{pmatrix}$$

Теперь результирующая дисперсия состоит из дисперсий от включения ССВ и меньшего числа приведенных функционалов с областями интегрирования не совпадающими с областями интегрирования взаимных дисперсий.

Отметим, что приведенные функционалы строк матрицы имеют противоположные знаки и пересекающиеся области интегрирования, но уже внутренних интегралов. Это позволяет выполнить еще одно приведение функционалов по областям интегрирования внутренних интегралов.

Действительно, рассмотрим частную сумму приведенных функционалов i -й строки, следующих сразу за $(-1)^i \sigma_{S_i S_i}^2$:

$$2 \sum_{j=i+1}^{M+1} (-1)^{i+j} P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi j-1}, t). \tag{8}$$

Слагаемые указанной частной суммы обладают свойствами, аналогичными рассмотренным выше свойствам (5). Следовательно, сумма соответствующих пар функционалов в (8) преобразуется к виду:

$$\sum_{j=i+1}^{M+1} [(-1)^j - 1] P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi j-1}, t_{\Pi j}),$$

если число слагаемых суммы четное (нечетное M).

Для нечетного числа слагаемых (четное M) сумма примет вид:

$$\sum_{j=i+1}^M [(-1)^j - 1] P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi j-1}, t_{\Pi j}) - 2P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi M}, t).$$

Для наглядности запишем все слагаемые дисперсии после приведения по пределам внешних и внутренних интегралов в виде матрицы (без нулевой строки), в которой нулями обозначены функционалы, сокращенные в результате приведения:

$$\left(\begin{array}{cccc} \sigma_{S_2 S_2}^2 - 2P(t_{\Pi 1}, t_{\Pi 2}, t_{\Pi 2}, t_{\Pi 3}) & 0 \dots & -2P(t_{\Pi 1}, t_{\Pi 2}, t_{\Pi y-1}, t_{\Pi y}) & 0 \dots X \\ -\sigma_{S_3 S_3}^2 & 0 \dots & & 0 \\ & \dots & & \\ & (-1)^i \sigma_{S_i S_i}^2 \dots & 0 - 2P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi y-1}, t_{\Pi y}) & 0 \dots X \\ & & (-1)^{i+1} \sigma_{S_{i+1} S_{i+1}}^2 & 0 \dots 0 \\ & & \dots & \\ & & & (-1)^{M+1} \sigma_{S_{M+1} S_{M+1}}^2 \end{array} \right), \quad (9)$$

где $X = \begin{cases} -2P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi M}, t) & \text{для четных } M; \\ 0 & \text{для нечетных } M. \end{cases}$

Число элементов в матрице приведенных функционалов (9) существенно меньше, чем в исходной (таблица 1): строки с нечетными i содержат только $-\sigma_{S_i S_i}^2$, в строках с четными i приведенные функционалы чередуются с 0, т.е. в них содержится примерно вдвое меньшее число функционалов.

Окончательно результирующая дисперсия сигнала при многократном включении и отключении (МВО) примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(t) = & \sum_{i=2}^{M+1} (-1)^i \sigma_{S_i S_i}^2 + \\ & + \sum_{i=2}^M \sum_{j=i+1}^M \frac{[1 - (-1)^{i+1}]}{2} \{ [(-1)^j - 1] P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi j-1}, t_{\Pi j}) + \\ & + [(-1)^{M+1} - 1] P(t_{\Pi i-1}, t_{\Pi i}, t_{\Pi M}, t) \} \end{aligned} \quad (10)$$

Множитель $\frac{[1 - (-1)^{i+1}]}{2}$ обращает в 0 всю строку приведенных функционалов с нечетными i , множитель $[(-1)^j - 1]$ обращает в 0 в каждой оставшейся строке функционалы взаимной дисперсии, сокращенные в результате приведения. Множитель $[(-1)^{M+1} - 1]$ обращает в 0 в каждой оставшейся строке функционал вида X в (9).

1.2. Приведение дисперсии сигнала при многократном отключении и включении

Матрица составляющих дисперсии при многократном отключении и включении (МОВ) (строка 2 таблицы 1) отличается от рассмотренной матрицы при МВО наличием строки с $i = 1, j = \overline{1, (M+1)}$. Поэтому результирующая дисперсия при МОВ будет иметь дополнительные слагаемые, образованные функционалами первой строки.

Рассмотрим частную сумму функционалов первой строки матрицы дисперсий (строка 2 таблицы 1) без $\sigma_{S_1 S_1}^2$:

$$2 \sum_{j=2}^{M+1} (-1)^{j+1} P(t_{\Pi 0}, t, t_{\Pi j-1}, t), \quad (11)$$

где $t_{\Pi_0} = -\infty$.

Функционалы частной суммы (11) имеют свойства аналогичные свойствам функционалов, рассмотренных выше и попарно приводятся к общим функционалам аналогичным образом.

Для четных M (четное число функционалов) все функционалы (11) образуют приводимые пары функционалов:

$$\sum_{j=2}^M [(-1)^{j+1} - 1] P(t_{\Pi_0}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_j}).$$

Для нечетных M (нечетное число функционалов) остается один неприводимый функционал:

$$\sum_{j=2}^M [(-1)^{j+1} - 1] P(t_{\Pi_0}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_j}) - 2P(t_{\Pi_0}, t, t_{\Pi_M}, t).$$

Таким образом (11) после приведения примет вид:

$$\sum_{j=2}^M [(-1)^{j+1} - 1] P(t_{\Pi_0}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_j}) + [(-1)^M - 1] P(t_{\Pi_0}, t, t_{\Pi_M}, t).$$

Окончательно результирующая дисперсия сигнала при МОВ примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_s^2(t) = & \sum_{i=1}^{M+1} (-1)^i \sigma_{S_i}^2 + \\ & + \sum_{i=2}^M \sum_{j=i+1}^M \frac{[1 - (-1)^{i+j}]}{2} \{ [(-1)^j - 1] P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_j}) + \\ & + [(-1)^{M+1} - 1] P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_M}, t) \} + \\ & + \sum_{j=2}^M \{ [(-1)^{j+1} - 1] P(t_{\Pi_0}, t, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_j}) + [(-1)^M - 1] P(t_{\Pi_0}, t, t_{\Pi_M}, t) \} \end{aligned} \quad (12)$$

1.3. Приведение дисперсии сигнала при многократной инверсии

Функционалы составляющих дисперсии (строка 3 таблицы 1) имеют свойства, аналогичные рассмотренным выше свойствам функционалов при МВО и МОВ. Применяя подход, аналогичный подходам в рассмотренных выше режимах, т.е. выполнив приведение исходных функционалов сначала по областям интегрирования внешних интегралов, получим следующий вид матрицы функционалов составляющих дисперсии:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{S_1}^2 - 4P(t_{\Pi_0}, t_{\Pi_1}, t_{\Pi_1}, t) \dots (-1)^{1+j} 4P(t_{\Pi_0}, t_{\Pi_1}, t_{\Pi_{j-1}}, t) \dots (-1)^{1+M+1} 4P(t_{\Pi_0}, t_{\Pi_1}, t_{\Pi_M}, t) \\ 0 \dots \dots (-1)^{2+j} 4P(t_{\Pi_1}, t_{\Pi_2}, t_{\Pi_{j-1}}, t) \dots (-1)^{2+M+1} 4P(t_{\Pi_1}, t_{\Pi_2}, t_{\Pi_M}, t) \\ \dots \\ 0 \dots (-1)^{i+j} 2P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_{j-1}}, t) \dots (-1)^{i+M+1} 2P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_M}, t) \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

После приведения функционалов по областям внутренних интегралов получим следующую матричную форму функционалов составляющей дисперсии:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{S_1 S_1}^2 - 4P(t_{\Pi_0}, t_{\Pi_1}, t_{\Pi_1}, t_{\Pi_2}) & 0 \dots & (-1)^{1+j} 4P(t_{\Pi_0}, t_{\Pi_1}, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_{j-1}}) & 0 \dots & X \\ & & \dots & & \\ & & 0 \dots & (-1)^{i+j} 4P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_{j-1}}, t_{\Pi_{j-1}}) & 0 \dots & X \\ & & & \dots & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $X = \begin{cases} -4P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_M}, t) & \text{для нечетных } i + j; \\ 0 & \text{для четных } i + j. \end{cases}$

Число элементов в матрице приведенных функционалов (13) существенно меньше, чем в исходной: в каждой строке после приведения сокращается около половины функционалов.

Результирующее выражение для дисперсии при многократной инверсии (МИ) примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(t) = & \sigma_{S_1 S_1}^2 + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \{ [(-1)^{i+j+1} - 1] P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_{j-2}}, t_{\Pi_{j-1}}) + \\ & + [(-1)^{i+M+1} - 1] P(t_{\Pi_{i-1}}, t_{\Pi_i}, t_{\Pi_M}, t) \} \end{aligned} \quad (14)$$

Итак, приведение функционалов дисперсий по внешним и внутренним областям интегрирования позволяет практически вдвое сократить число слагаемых результирующих дисперсий во всех рассмотренных режимах с многократными скачками ССВ.

Заключение

Разработан метод приведения результирующих дисперсий для различных переходных режимов линейного динамического объекта при многократных включениях, отключениях или инверсиях стационарных случайных воздействий. Метод позволяет почти вдвое сократить число слагаемых в результирующих дисперсиях, что значительно сократит вычислительные затраты.

Получены результирующие дисперсии сигнала при многократном включении и отключении (10), при многократном отключении и включении (12) и при многократной инверсии (14).

Литература

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
2. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2005. – 462 с.

-
4. Мадыев А.П., Ширапов Д.Ш. Математическая модель нестационарных случайных сигналов, вызванных многократными переходными режимами от стационарных воздействий. – Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2015. – №1. – С. 16–24.

References

1. Bendat J., Pirsol A. Applied analysis of random data – Translation from English. M.: Mir, 1989. – 540 p.
2. Levin B.R. Theoretical foundations of statistical radio engineering – 3 edition, revised and enlarged. M.: Radio and communications, 1989. – 656 p.
3. Baskakov S.I. Radio circuits and signals. M.: Vysshaya Shkola 2005. – 462 p.
4. Madyev A.P., Shirapov D.Sh. Mathematic model of non-stationary signals in multiple transient regimes caused by stationary input. – Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika. – 2015. – №1. – P. 16–24.

Мадыев Алексей Петрович, старший преподаватель кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: mapost3@gmail.com

Ширапов Дашадондок Шагдарович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: shir48@mail.ru

Madyev Aleksey Petrovich, Senior Lecturer, Department "Electronic computing systems", East Siberian State University of Technology and Management, e-mail: mapost3@gmail.com

Shirapov Dashadondok Shagdarovich, Doctor of physics and mathematics, professor, head of Department "Electronic computing systems", East Siberian State University of Technology and Management, e-mail: shir48@mail.ru

4. Информационные системы и технологии

УДК 004.75

© *А. А. Ветров, А. С. Гаченко, Е. С. Фереферов, А. Е. Хмельнов*

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕКЛАРАТИВНЫХ СПЕЦИФИКАЦИЙ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ И ИНТЕГРАЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ¹

Статья посвящена актуальным проблемам разработки информационных систем и их интеграции в рамках единой информационно-аналитической среды крупных организаций. Авторы предлагают оригинальный подход к созданию информационных систем для взаимодействия с реляционными базами данных, пространственными данными, многомерного анализа данных на основе декларативных спецификаций, позволяющий значительно сократить как время разработки систем, так и упростить межсистемную интеграцию.

Ключевые слова: информационные системы, геоинформационные системы, базы данных, OLAP, спецификация.

© *A. A. Vetrov, A. S. Gachenko, E. S. Fereferov, A. E. Hmelnov*

BUILDING AND INTEGRATION OF INFORMATION SYSTEMS BASED ON DECLARATIVE SPECIFICATION

The article is devoted to actual problems of information systems development and their integration into a single information-analytical environment of large organizations. The authors propose an original approach to the information systems development to interact with relational databases, spatial data, multidimensional data analysis, based on declarative specifications, significantly reducing development systems time and to simplify inter-system integration.

Keywords: information systems, GIS, databases, OLAP, specification.

Введение

Информационно-аналитическая среда современных организаций, как правило, представляет собой набор информационных систем (ИС), реализованных на разных платформах и системах программирования, ориентированных на различные технологии доступа и представления данных, иногда, использующих разные системы управления базами данных (СУБД). Особенно часто такая разнородность ИС встречается в органах государственной власти и местного самоуправления, что объясняется за-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 14-07-31339

конодательной необходимостью разработки систем на конкурсной основе, в результате чего подрядчики разрабатывают каждую систему не согласованно с существующими смежными системами.

Принятие эффективных управленческих решений основывается на анализе подготовленных данных. В свою очередь, подготовка данных включает сбор данных из различных источников, обобщение, структурирование, агрегацию и представление пользователю в определенном виде (например, таблицы, графики, цифровые карты). В условиях отсутствия единой информационно-аналитической среды комплексирование информационных ресурсов является сложной задачей, часто требующее больших усилий по организации конвертации разнородных данных в целевые форматы.

1. Подходы к разработке информационных систем

Современные ИС представляют собой программные комплексы, функции которых состоят в поддержке сбора, хранения, выполнения специфических преобразований информации, моделирования, вычислений, агрегаций, анализа, и предоставления данных пользователям. Хотя некоторые ИС могут быть основаны на применении сложных алгоритмов обработки информации и взаимодействии с внешними аппаратными средствами, основная задача значительной части таких систем сводится к организации удобного взаимодействия пользователей с базами данных (БД).

На сегодняшний день существует большое количество технологий разработки ИС. Каждая предоставляет разработчикам те или иные преимущества, и имеют свои недостатки. Например, технологии разработки ИС, основанные на императивном программировании и использовании развитых библиотек визуальных компонентов (например, VCL [1], MFC [2], FCL [3]) предоставляют общецелевые инструментальные средства и позволяют ускорить создание программ за счёт применения готовых компонент, реализующих как части визуального интерфейса, так и бизнес-логики для взаимодействия с БД. Недостатком данного подхода является необходимость вносить изменения в программный код ИС каждый раз, когда изменяется структура данных (например, добавляются новые поля в таблицах, корректируется тип поля), заново реализуя функции для доступа к новым элементам БД.

Существующие подходы в области объектно-реляционного отображения (например, Hibernate/ NHibernate [4], Entity Framework [5]) позволяют ускорить разработку приложений баз данных (ПБД) за счёт автоматизации построения объектной модели обеспечивающей взаимодействие с сущностями реляционной БД и являющейся описанием структуры БД для приложения. При этом часть программного кода, в частности классы соответствующие сущностям БД, классы обеспечивающие преобразование объектных запросов в SQL-запросы, генерируется автоматически. Необходимо отметить, что изменения в структуре БД приводят к необходимости регенерации классов, что не является сложным процессом, но тре-

бует аккуратного программирования при доработке этих классов, чтобы не смешивать автоматически сгенерированный и созданный вручную код.

Технологии порождающего программирования [6-8] позволяют значительно сократить время разработки ИС за счет формализации знаний о структуре системы в виде модели, при этом единожды выделив схожие структуры данных и присущие им бизнес-процессы в отдельные компоненты, а также сгенерировав соответствующие им сценарии создания структур в СУБД, алгоритмы обработки бизнес-процессов, экранные формы и распространять их на все подобные компоненты. Необходимо отметить, что сгенерированный код при этом является грубым каркасом будущей системы, поэтому практически всегда его требуется дорабатывать вручную, при этом полученные изменения не отражаются в исходных абстрактных моделях системы

Большинство БД современных ИС содержат информацию о реально существующих физических объектах, имеющих пространственные характеристики (например, почтовый адрес, координаты, кадастровый номер). Для решения задач обработки, представления и анализа пространственных данных (ПД) современные ИС должны в том или ином объеме включать соответствующие функциональные возможности геоинформационных систем (ГИС). Современные ГИС предлагают разработчикам API (например, GisToolKit, MapX) реализации ГИС-функциональности. Несмотря на развитость этих API, реализация таких функций – сложная и трудоёмкая задача, требующая знаний в области геоинформационных технологий. Реализация ГИС-функциональности существующими методами часто приводит к дублированию функций целевой ГИС в разрабатываемой системе, поскольку используют доступ к данным из приложения ГИС. Модернизация существующих ИС, направленная на интеграцию с функциями обработки ПД, как правило, требует наличия исходных кодов этих ИС у разработчика, а в случае их отсутствия приводит к необходимости повторной разработки системы.

2. Разработка информационных систем на основе декларативных спецификаций

Авторами создан ряд технологий автоматизации разработки информационных систем, опирающихся на использование декларативных спецификаций. Для создания ПБД разработана технология и инструментальное средство «ГеоАРМ» [9-10], позволяющие за счёт использования декларативных спецификаций автоматически создавать ИС, обеспечивающие взаимодействие пользователей с БД и географическими цифровыми картами. А для автоматизированного создания систем поддержки проведения оперативной аналитической обработки данных разработано технология и инструментальное средство MDAttr [11]. Спецификация ПБД является средством представления и хранения модели системы и содержит минимально необходимую информацию о его структуре, которой, однако, оказывается достаточно для автоматической реализации приложения, и, в

частности, создания пользовательских интерфейсов, обеспечения выполнения CRUD-функций, построения пользовательских запросов, поддержки взаимодействия с ПД, а также организации взаимодействия с внешними подключаемыми модулями для решения специфических задач. Поддержка полноценной клиент-серверной функциональности обеспечена новой технологией размещения декларативных спецификаций в источнике данных, таком как база данных или хранилище данных [12]. Декларативные спецификации удобны своей компактностью, при этом обладают предметной ориентированностью и выразительностью, а также широкой возможностью интерпретации различными трансформационными и другими процедурами.

Взаимодействие пользователя с данными в рамках разработанной технологии (рис. 1) осуществляется через настраиваемое при помощи спецификации универсальное автоматизированное рабочее место (АРМ), реализующее пользовательский интерфейс доступа к БД, а также картографический модуль для доступа к пространственным данным и подключаемые внешние модули (Plugin), расширяющие функциональные возможности универсального АРМ (например, для решения вычислительных задач). Данный подход ориентирован на быстрое создание настольных приложений – АРМов. Преимуществами данной технологии являются высокая скорость разработки ИС за счет отсутствия необходимости компиляции программного кода и возможность легкого масштабирования готовых АРМов по данным, поскольку при изменении структуры сущностей объекта автоматизации достаточно внести изменения только в спецификацию. Картографический модуль, входящий в состав универсального АРМа, реализует все основные функции ГИС (масштабирование, создание объектов и пользовательских карт и т.д.) и обеспечивает взаимодействие с цифровыми картами в форматах ГИС «Карта» и «MapInfo», а также поддерживает привязку и отображение данных из предметных БД (в том числе результатов запросов).

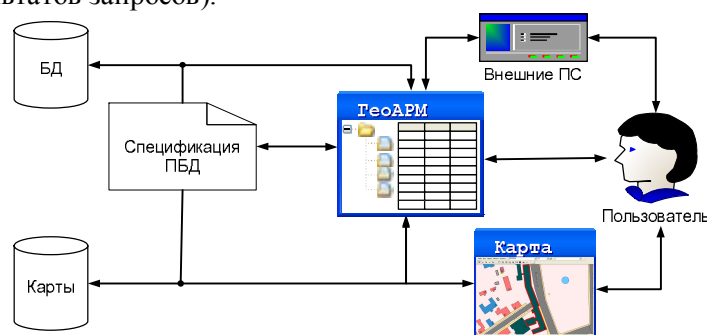


Рис. 1. Схема взаимодействия пользователя с данными в рамках технологии спецификации ПБД

Представленная технология предоставляет широкие возможности межсистемной интеграции. Описание моделей в виде спецификаций систем позволяет поддерживать модульную разработку ИС – интегрировать

готовые спецификации приложений для работы с частью БД при разработке новых, более масштабных систем (рис.2) (например, создания АР-Ма руководителя). Кроме того, рассматриваемая технология может использоваться, как при разработке системы с нуля, так и при создании приложения для работы с существующей БД. Т.е. здесь не накладываются существенные ограничения на способ организации БД, как это происходит, например, при использовании EAV-подхода [13], поэтому во многих случаях возможна разработка ПБД в инструментальном средстве «ГеоАРМ» под существующую БД с сохранением совместимости с унаследованными приложениями, использующими эту БД для решения других задач.

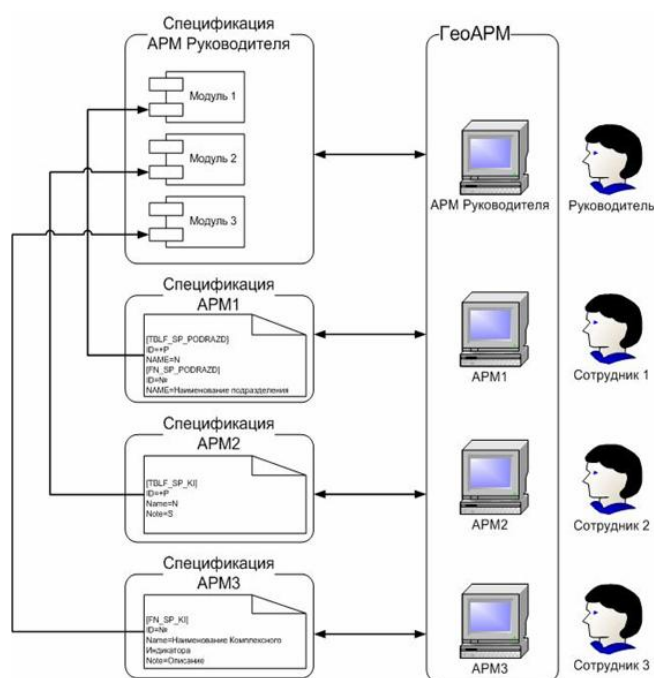


Рис. 2 Интеграция АРМов на уровне спецификаций

3. Технологии создания web-ориентированных информационных систем

Для автоматизации создания web-ориентированных систем в ИДСТУ СО РАН разработаны технологии, обеспечивающие публикацию, как информации из БД, так и пространственных данных в виде цифровых карт с привязкой к ним данных. Основой данных технологий также является использование декларативных спецификаций.

В подавляющем большинстве форматов пространственных данных предусматривается хранение семантической информации (атрибутов пространственных объектов). В ГИС, как правило, каждый слой карты рассматривается, как таблица БД, при этом пространственный объект, связанный с записью, рассматривается в качестве значения специального по-

ля этой таблицы. Таким образом, при этом все объекты слоя характеризуются одним и тем же ограниченным набором атрибутов. Так как цифровые карты невозможно использовать без семантической информации (табличные данные), то авторами разработан оригинальный формат SMD (Static Map Data) [16]. Данный формат позволяет эффективно (по времени отображения и загрузки информации в память) визуализировать пространственные объекты. Хранение семантической информации в формате SMD обеспечено разработкой модулей, предназначенные для хранения неизменяемых таблиц - статическая БД (СБД). Особенностью разработанного представления является возможность эффективного включения в таблицу большого количества необязательных полей. При этом допускается наличие в одной записи нескольких значений одного необязательного поля. С другой стороны, в СБД могут быть эффективно представлены и реляционные таблицы, вообще не содержащие необязательных полей. Неизменяемость данных используется для оптимизации хранения строковых значений в СБД: все строки собираются в блок строковых констант, в котором каждая строка встречается только один раз, а записи содержат ссылки на этот блок.

Таким образом, может быть эффективно представлена, как реляционная, так и теговая семантическая информация. Более того, записи, собранные из разных источников, и имеющие разную структуру, могут быть собраны в одну общую таблицу СБД без потери памяти на хранение неиспользуемых полей. В случае фильтрации полученной таблицы по исходному слою, представление сводной таблицы в компоненте не будет отличаться от представления исходной таблицы (будут отображаться лишь те поля, которые были получены из выбранного слоя).

Рассмотрим еще один способ публикации данных из СУБД в интернете, использующий для представления записей из таблицы стандартный браузер. В рамках этой технологии пользователь, имея данные в СУБД, может опубликовать тематические данные с привязкой к карте. Технология представляет собой настраиваемую библиотеку (DLL). При помощи технологии декларативных спецификаций происходит взаимодействие библиотеки с данными. Для отображения табличных данных существует возможность создания собственных HTML шаблонов в том виде, в котором это необходимо пользователю, также, при необходимости, шаблоны создаются автоматически.

4. Инструментальная система интегрированного OLAP-анализа

Проведение информационно-аналитической работы требует создания единого, неизменяемого, предметно-ориентированного, привязанного ко времени информационного ресурса – хранилища данных (ХД) [15]. Конечной целью использования ХД является анализ данных и представление результатов этого анализа в виде, удобном для восприятия и принятия решений. Одним из наиболее востребованных видов анализа является OLAP анализ (On-line analytical processing) [16]. OLAP – ключевой ком-

понент организации ХД, цель которого обеспечить пользователей гибким, интуитивно понятным и простым доступом к данным.

Как упоминалось, авторами разработана инструментальная система MDAttr, предназначенная для проведения интегрированного OLAP анализа, что подразумевает возможность проведения оперативной аналитической обработки данных, собираемых в одном разрезе через единый интерфейс доступа пользователя, т.е. без необходимости создания отдельных многомерных кубов данных для каждого факта, если они обладают одинаковым набором измерений. В основе данной системы также лежит использование декларативных спецификаций. Реализация преимуществ данной подхода в рамках клиент-серверной технологии осуществлена путем размещения спецификаций приложений внутри ХД. Таким образом, оно выступает источником данных и спецификаций приложения для MDAttr и настраивается администратором под конкретную предметную область. Спецификации являются представлением структуры приложения ХД и хранятся в машиночитаемом формате, в соответствии с требованиями системы MDAttr.

Система MDAttr реализует:

- многомерное концептуальное представление данных с полной поддержкой множественных иерархий;
- авторскую технологию интегрированного OLAP-анализа;
- генерируемый графический пользовательский интерфейс на основе спецификаций приложения;
- поддержку большинства современных систем управления базами данных (СУБД) через интерфейс ADO (ActiveX Data Objects);
- привязку пространственных данных с возможностью построения тематических карт;
- вычисляемые поля, задаваемые выражениями;
- многоязычный пользовательский интерфейс;
- построение диаграмм по результатам анализа;
- экспорт данных в электронные таблицы, для использования сторонними системами.

Для формирования ХД (как таблиц спецификаций, так и данных предметной области), а также для автоматизации массового ввода информации может быть использовано вышеупомянутая система ГеоАРМ. Возможен ввод части спецификаций ПБД напрямую в ХД в таблицы спецификаций ХД.

Заключение

В рамках программ информатизаций органов государственной власти и местного самоуправления в ИДСТУ СО РАН с применением описанных выше технологий разработаны более десятка информационных систем, обеспечивших автоматизацию деятельности ключевых структурных подразделений. Для решения задач жилищно-коммунального хозяйства г. Иркутска разработаны: ИС «Управление многоквартирными домами», ИС

«Отдел жилищного хозяйства», ИС «Отдел коммунального хозяйства». Для обеспечения поддержки градостроительной деятельности разработаны: ИС «Реестр строящихся зданий и сооружений», ИС «Формирование градостроительного плана», ИС «Геодезические съемки», ИС «Учет градостроительной документации», ИС «Книги хранения», ГИС «Адресный план», ИС «Единый общегородской реестр адресов недвижимости», ИС «Ветхое жилье», ИС «Объекты топонимики», а также слои муниципальной ГИС «Детские и спортивные площадки», «Рекламные конструкции», «Площадки для твердых бытовых отходов», «Сети освещения», «Избирательные округа».

Обеспечение население актуальной информацией в области инвестиционной деятельности реализовано web ориентированной геоинформационной системой «Инвестор». Данная ИС интегрирует актуальные общедоступные пространственные и тематические данные об объектах территориальной инфраструктуры города, которые формируются профильными комитетами и подведомственными им организациями муниципалитета.

Использование технологии создания ИС на основе декларативных спецификаций позволило сформировать единое информационно-аналитическое пространство в администрации г. Иркутска, обеспечить межсистемную интеграцию данных, в том числе с БД систем созданных сторонними разработчиками. Комплексирование разнородной информации обеспечило подготовку данных для проведения многомерного анализа и, как следствие, повысило качество принятия управленческих решений.

Литература

1. VCL Overview //Embarcadero. URL: http://docs.embarcadero.com/products/rad_studio/delphiAndcpp2009/HelpUpdate2/EN/html/devwin32/vclov_xml.html
2. Приложения MFC для рабочего стола. Microsoft Developer Network. URL: <http://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/d06h2x6e.aspx>
3. .NET Framework Class Library Overview// Microsoft Developer Network. URL: [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/hfa3fa08\(v=vs.110\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/hfa3fa08(v=vs.110).aspx)
4. Hibernate ORM documentation//Hibernate ORM. URL: <http://hibernate.org/orm/documentation/>
5. Entity Framework (EF) Documentation.//Microsoft. Data Developer Center. URL: <http://msdn.microsoft.com/en-us/data/ee712907>
6. Грибачёв К. Delphi и Model Driven Architecture. Разработка приложений баз данных. СПб.: Питер, 2004.
7. Грибова В.В., Кисленок Р.С. Автоматизация разработки визуального представления пользовательского интерфейса по модели предметной области. // Искусственный интеллект. 2006. No. №4. с. 148-152.
8. Черкашин Е.А., Федоров Р.К., Бычков И.В., Парамонов В.В. Автоматизация синтеза ядра информационной системы с использованием UML-описания. // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. С. 114-121.

9. Фереферов Е.С., Хмельнов А.Е. Автоматизация создания пользовательского интерфейса на основе модели приложения баз данных // Вестник Бурятского гос. ун-та. 2013. № 9. С. 100–118.

10. Фереферов Е.С., Бычков И.В., Хмельнов А.Е. Технология разработки приложений баз данных на основе декларативных спецификаций // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 5. С. 85–100.

11. Ветров А.А., Фереферов Е.С., Хмельнов А.Е. Технология использования метаописаний для формирования хранилищ данных и анализа многомерных данных // Вестник Бурятского государственного университета. 2011, № 9, с. 83-86.

12. Ветров А. А., Фереферов Е. С., Хмельнов А. Е., Шигаров А. О. Формирование хранилища данных для системы MDAttr // Вестник Бурятского государственного университета. — 2012. — № 9. — С. 22 – 28.

13. Introduction to EAV Model in Magento // Magento Planet. URL: <http://magentoplanet.wordpress.com/2014/03/19/introduction-to-eav-model-in-magento/>

14. Inmon W. Building the Data Warehouse. Wiley, 2005. – 543 с.

15. Codd E.F., Codd S.B., and Salley C.T. "Providing OLAP (On-line Analytical Processing) to User-Analysts: An IT Mandate". Codd & Date, Inc. 1993.

16. Бычков И.В., Гаченко А.С., Ружников Г.М., Фереферов Е.С., Хмельнов А.Е., Фёдоров Р.К. Интеграция информационно-аналитических ресурсов и обработка пространственных данных в задачах управления территориальным развитием // Новосибирск: Изд-во СО РАН, – 2012. – 369 с.

References

1. VCL Overview // Embarcadero. URL: http://docs.embarcadero.com/products/rad_studio/delphiAndcpp2009/HelpUpdate2/EN/html/devwin32/vclov_xml.html

2. MFC Desktop applications. Microsoft Developer Network. URL: <http://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/d06h2x6e.aspx>

3. .NET Framework Class Library Overview // Microsoft Developer Network. URL: [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/hfa3fa08\(v=vs.110\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/hfa3fa08(v=vs.110).aspx)

4. Hibernate ORM documentation // Hibernate ORM. URL: <http://hibernate.org/orm/documentation/>

5. Entity Framework (EF) Documentation // Microsoft. Data Developer Center. URL: <http://msdn.microsoft.com/en-us/data/ee712907>

6. Gribachev K. Delphi and Model Driven Architecture. Database applications development. SPb.: Piter, 2004.

7. Gribova V.V., Kislénok R.S. Automate the development of visual representation of the user interface for the domain model. // Artificial intelligence. 2006. No. №4. pp. 148-152.

8. Cherkashin E.A., Fedorov R.K., Bychkov I.V., Paramonov V.V. Automation of the syntheses of a kernel of the information system with using UML-description // Computational Technologies. 2005. T. 10 S1. pp. 114-121.

9. Fereferov E.S., Hmelnov A.E. Automatization of user interface creation based on models of database application // The Buryat State University Bulletin. 2013. № 9. pp. 100–118.

10. Fereferov E.S., Bychkov I.V., Hmelnov A.E. Technology for database applications based on declarative specifications // Computational Technologies. 2014. Т. 19, № 5. pp. 85–100.

11. Vetrov A.A., Fereferov E.S., Hmelnov A. E. Using technology of meta-description for forming data warehouse and multidimensional data analysis // The Buryat State University Bulletin. 2011, № 9, pp. 83-86.

12. Vetrov A.A., Fereferov E.S., Hmelnov A.E., Shigarov A.O. Forming data warehouse for system MDattr // The Buryat State University Bulletin. — 2012. — № 9. — pp. 22 – 28.

13. Introduction to EAV Model in Magento // Magento Planet. URL: <http://magentoplanet.wordpress.com/2014/03/19/introduction-to-eav-model-in-magento/>

14. Inmon W. Building the Data Warehouse. Wiley, 2005. – 543 p.

15. Codd E.F., Codd S.B., and Salley C.T. "Providing OLAP (On-line Analytical Processing) to User-Analysts: An IT Mandate". Codd & Date, Inc. 1993.

16. Bychkov I.V., Gachenko A.S., Rugnikov G.M., Fereferov E.S., Hmelnov A.E., Fedorov R.K. Integration of information and analytical resources and processing spatial data in territorial development tasks // Novosibirsk: Publishing House of SB RAS, - 2012. - p 369.

Ветров Александр Анатольевич, младший научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, e-mail: vetrov@icc.ru

Гаченко Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, e-mail: gachenko@icc.ru

Фереферов Евгений Сергеевич, кандидат технических наук, учёный секретарь ИДСТУ СО РАН, e-mail: fereferov@icc.ru

Хмельнов Алексей Евгеньевич, кандидат технических наук, зам. директора ИДСТУ СО РАН, e-mail: hmelnov@icc.ru

Vetrov Alexandr Anatolievich, junior researcher of Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, e-mail: vetrov@icc.ru

Gachenko Andrey Sergeevich, PhD of Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, e-mail: gachenko@icc.ru

Fereferov Evgeniy Sergeevich, PhD, scientific secretary of Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, e-mail: fereferov@icc.ru

Hmelnov Alexey Evgenievich, PhD of Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, e-mail: hmelnov@icc.ru

УДК 004.42

© Г. В. Попков

К ВОПРОСУ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ В МОБИЛЬНЫХ СЕТЯХ В УСЛОВИЯХ РАЗРУШАЮЩИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В статье рассматриваются некоторые вопросы исследования и проектирования структур сетей мобильной связи в случае возникновения чрезвычайных ситуаций. Предлагается исследовать задачи, возникающие при анализе и синтезе сетей связи, связанные с применением методов теории графов, теории гиперсетей и других теорий описывающих взаимодействие различных структур. В статье рассматривается задача поиска максимального s-t потока в нестационарной гиперсети, задача поиска кратчайших по задержке простых v -цепей в нестационарной гиперсети.

Ключевые слова: Сети электросвязи, сети мобильной связи, теория графов, надёжность и живучесть сетей связи.

© G. V. Popkov

THE QUESTION OF STRUCTURAL RELIABILITY IN MOBILE NETWORKS UNDER DESTROYS INFORMATIONAL INFLUENCE

This article discusses some of the issues of research and design structures of mobile networks in case of emergency. It is proposed to investigate the problems arising in the analysis and synthesis of communications networks, related to the use of methods of graph theory, theory and other theories hypernetwork describing the interaction of different structures. The article deals with the task of finding the maximum st flow in the non-stationary hypernetwork, the task of finding the shortest delay of simple v -chains in the non-stationary hypernetwork.

Keywords: Telecommunication network, mobile network, graph theory, reliability and survivability of communication networks.

Введение

Хорошо известно, что структурная надёжность сетей связи связана прежде всего с заданными критериями живучести и соответствующими структурными и временными показателями этих сетей [1]. Во-вторых, те и другие (критерии и показатели) существенно зависят от типа сетей связи и их назначения. Отсюда следует, что само понятие живучесть и ее составляющая часть, структурная надёжность для каждого типа сети связи, должно определяться согласно виду и назначению данной сети. Кроме того, классификация атак на сеть [2], также накладывает свой отпечаток на задачи анализа структурной надёжности сетей связи. В данной статье

рассматриваются две задачи анализа структурной надежности мобильных сетей передачи данных в которых анализируется состояние двух мобильных корреспондирующих пар x и y при условии вывода из строя базовых станций сети радиосвязи.

1. Постановка задачи

Предположим, что базовая сеть мобильной связи представляет собой граф $G(X,R)$, в котором вершинам соответствуют базовые станции сети, а ребрам линии связи. Пусть, также существует пара абонентов, которые потенциально могут быть связанными с любой базовой станцией по соответствующему радио-каналу. Другими словами сеть мобильной связи можно представить в виде нестационарной гиперсети [3] в которой первичная сеть состоит из графа базовой сети и гиперребер добавляемых ко всем вершинам графа. Вершине z инцидентно $n(z)$ различных гиперребер, если и только если, соответствующая базовая станция может работать на $n(z)$ радио-каналах. Таким образом, первичная сеть гиперсети задается гиперграфом. Здесь мы будем предполагать, что станции работающие с нашими абонентами не «мешают» друг другу. Очевидно, что вершины x и y будут инцидентны всем добавляемым гиперребрам. Таким образом, абонент потенциально может работать с любой станцией и по любому каналу. Если, это не так, то в модели легко предусмотреть любую конфигурацию. Очевидно, что вторичная сеть гиперсети задается мультиграфом в котором из каждой вершин x и y выходит $n(z)$ ребер в вершину z проходящих по соответствующим гиперребрам гиперсети. На рис. 1 приведен пример такой гиперсети.

Здесь нестационарность определяется уже тем, что абоненты вторичной сети передвигаясь по местности переходят в зону действия очередных базовых станций. Поэтому, зная маршрут абонента можно легко составить расписание работы линий связи вторичной сети. Кроме того, задержки в каналах и станциях первичной сети показывают временную зависимость прохождения информации по мобильной сети.

Проблема усложняется еще тем, что базовые станции могут быть выведены из строя различными способами. Например: физическое уничтожение, включение широкополосной помехи, вывод некоторых каналов из строя узкополосной радио-помехой. Кроме того, современные сети мобильной связи могут быть атакованы разрушающими информационными воздействиями (РИВ). С точки зрения физического уничтожения можно предположить, что противнику известна структура сети и поэтому он будет пытаться нанести удар по узкому месту, т.е. нанести мобильной сети связи максимальный урон при минимальных затратах. Следовательно, мы можем рассмотреть возможные варианты воздействия на сеть и при этом вычислять такие важные показатели, как пропускная способность, так и время задержки пакетов или сообщений в сети. Рассмотрим математическую модель такой сети и соответствующие задачи вычисления существенных параметров сети.

2. Основные определения

Определение: Нестационарная гиперсеть $S(t)=(X, V, R)$ включает следующие объекты [3]:

$X = (x_1, \dots, x_n)$ – множество вершин;

$V = (v_1, \dots, v_g)$ – множество ветвей;

$R = (r_1, \dots, r_m)$ – множество ребер;

$\forall x_i \in X$ сопоставлена $\beta_i \geq 0$ емкость вершины (буфер) и

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ работает в момент } t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\forall v_j \in V$ сопоставлена $\alpha_j(t) \geq 0$ функция пропускной способности ветви;

$\forall r_k \in R$ сопоставлена $\delta_k(t) \geq 0$ функция пропускной способности ребра.

Определение: [3] Поток по ребру rk (из x_i в x_j) есть функция $f_k : [0, T] \rightarrow R^+$ со следующими ограничениями:

$$\forall t \geq 0, \forall r_k \in R \quad f_k(t) \leq \delta_k(t) \quad \text{и} \quad \forall v_j \in V \quad \sum_{r_k \in F^{-1}(v_j)} f_k(t) \leq \alpha_j(t) \quad (1)$$

Пусть поток идет из вершины x_1 в x_n , тогда на поток налагается условие:

$$\forall t \geq 0 \quad \forall x_i \in X \setminus \{x_1, x_n\} \quad \sum_{\forall r_k=(\dots, i)} f_k(t) - \sum_{\forall r_p=(i, \dots)} f_p(t) \leq \beta_i \quad (2)$$

3. Задача поиска максимального (s-t) потока в нестационарной гиперсети

В данном разделе будут показаны две модели сведения нестационарной гиперсети к гиперсети, позволяющие решать различные задачи теории нестационарных гиперсетей.

В частности, такой задачей является поиск максимального потока, который в свою очередь является интегральным показателем структурной надежности мобильных сетей электросвязи.

Постановка задачи: Найти максимальный поток из вершины x_1 в x_n

$$\varphi = \max \sum_{\forall r_k=(\dots, x_n)} f(r_k)$$

в нестационарной гиперсети $S(t)$ за интервал времени $[0, T]$.

Упрощение: Разобьем интервал времени на m частей. В каждый отрезок времени $[t_p, t_{p+1}]$ будем считать, что гиперсеть $S(t)$ в каждом таком интервале является стационарной с параметрами:

$$\forall v_j \in V \quad \alpha_j := \int_{t_p}^{t_{p+1}} \alpha_j(t) dt; \quad \forall r_k \in R \quad \delta_k := \int_{t_p}^{t_{p+1}} \delta_k(t) dt.$$

Модель 4.1:

В каждый момент времени поток есть сумма трех потоков:

- 1) Максимальный поток из вершины x_1 в x_n ,
- 2) Максимальный поток из всех вершин (кроме x_1) в x_n (открытие буферов);
- 3) Максимальный поток из x_1 во все вершины (кроме x_n) (заполнение буферов).

Очевидно, описанный выше поток меньше или равен максимального (x_1-x_n) потока в гиперсети $S(t)$.

Модель 4.2:

Определим гиперсеть $G=(Y, U, P)$ с множеством вершин $Y=X \times T$, $(x_i, t_k) \in Y$ (рис. 1)

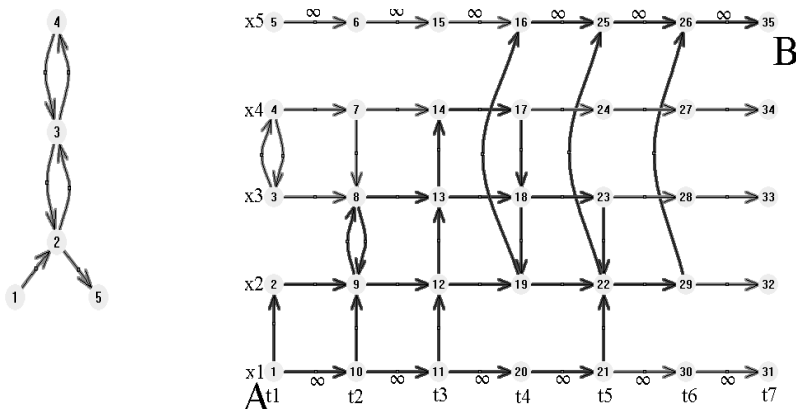


Рис 1. на рисунке показаны только вершины и ребра гиперсетей $S(t)$ и G соответственно

Из вершины (x_i, t_k) в (x_j, t_l) идет ветвь $u_c \in U$ тогда и только тогда, когда:

- a) $i=j$ и $l=k+1$;
- b) $i \neq j$ и $k=l$.

Для дуг типа a) определим вес

$$d_c = \beta_i \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right) \gamma_i \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right), \text{ если } i=1$$

или $i=n$, то $d_c = \infty$.

Для остальных ветвей веса задаются выражением:

$$d_c = (t_{k+1} - t_k) \alpha_c \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right) \gamma_i \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right) \gamma_j \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right)$$

Множество ребер P задается аналогично ветвям, только вместо функции $\alpha_c(t)$ участвует $\delta_c(t)$.

Утверждение:

Если функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)$ кусочно-постоянные, то поток $(x_l - x_n)$ в гиперсети S за интервал времени $T = (t_l, \dots, t_m)$ равен потоку в гиперсети G из вершины (x_l, t_l) в (x_n, t_m) [3].

4. Задача поиска кратчайших по задержке простых v -цепей в нестационарной гиперсети

Определим функции задержки:

$\forall r_k \in R$ сопоставлена $\tau_k(t) \geq 0$ задержка в ребра (зависит от задержки в каждой внутренней вершине ребра, плюс задержка в каждой ветви через которое проходит ребро).

Определение: Маршрут $(x_0, r_1, x_1, \dots, r_k, x_k)$ в гиперсети S называется v -цепью, если каждая ветвь используется не более одного раза [3].

Постановка задачи: Для заданной пары вершин x и y , найти кратчайшую по задержке v -цепь в нестационарной гиперсети G .

Модель 5.1:

В случае, если задержки целочисленные, построим гиперсеть $G = (Y, U, P)$ со множеством вершин $Y = X \times T$, $(x_i, t_k) \in Y$. Множество ребер P строится по схеме из [4]. Множество ветвей U состоит из множества V , через каждую ветвь которого проходят не только соответствующие ребра из R , но и их копии во все моменты времени. Для ребер, соответствующих ожиданию в вершине, сопоставлены идентичные им ветви из U . Данное сведение объектов позволяет решать практически все задачи на гиперсетях связанных с потоковыми и метрическими характеристиками, которые в свою очередь зависят от времени.

Утверждение: Кратчайшая по задержке v -цепь из x_l в x_n в нестационарной гиперсети $S(t)$ совпадает с кратчайшей v -цепью в гиперсети G из (x_l, t_0) в слой x_n .

Модель 5.2:

Пусть задержки в гиперсети нецелочисленные. Для простоты будем считать, что в задаче поиска v -цепей накладывается еще одно условие: запрет на прохождение цепи одной вершины более одного раза, т.е. требуется найти простую цепь [3], кратчайшую по задержке.

Построим гиперсеть $G = (Y, U, P)$.

Множества ребер P и вершин Y представляют собой дерево: вершина y_1 соответствует x_1 ; количество потомков у корня y_1 равно количеству исходящих дуг x_1 в момент времени $t=0$, веса дуг исходящих из y_1 равны $\tau_k(0)$ для соответствующих k . Пусть в $S(0)$ вершина x_1 соединена с вершиной x_2 ребром r_1 с задержкой $\tau_1(0)$, а момент времени $\tau_1(0)$ вершина x_2 с x_3 ребром r_2 . Тогда из вершины дерева y_2 исходит дуга весом $\tau_2(\tau_1(0))$, и т.д. Дерево строится с учетом, чтобы по любой цепочке из корня в соответствующем S не было повторяющихся вершин. На рисунке 2 показан пример построения дерева G . Безусловно, такое построение трудоемко и для ограничений дерева можно применить метод ветвей и границ, который не будет образовывать потомков, если суммарная задержка уже превосходит некоторую величину.

Что касается построения множества ветвей U , то оно аналогично построению в предыдущей модели.

Утверждение: Кратчайшая простая цепь (по величине задержки) в гиперсети G больше или равна задержке кратчайшей простой цепи в $S(t)$.

Аналогичную модель можно построить и для v -цепей.

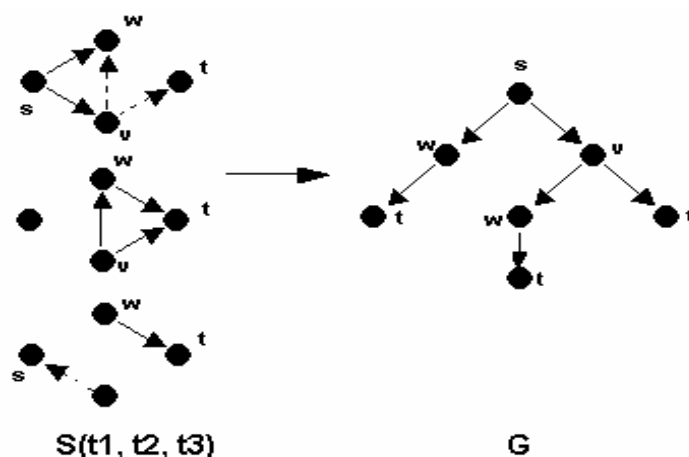


Рис. 2. Построение дерева G

Заключение

Для ряда задач на нестационарных гиперсетях применимы методы сведения их к стационарным, что позволяет получить решения. Причем эти решения отражают временную динамику изменения пропускных способностей, задержек (т.е. свойства, присущие реальным информационным сетям).

Таким образом, очевидно, что с помощью нестационарных гиперсетей можно исследовать различные структурные характеристики мобильных сетей передачи данных. Очевидно, что с помощью предло-

женных моделей можно не только анализировать показатели сети, но всевозможные варианты атак на сеть мобильной связи. В самом деле, функции параметров элементов гиперсети могут быть любыми (с одним лишь условием, эти функции должны быть кусочно-постоянными). Но тогда, модели разрушений могут вполне моделироваться этими функциями.

Литература

1. Попков В. К. Математические модели живучести сетей связи – Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1990. - 233 с.
2. Дудник Б.Я., Овчаренко В.Ф., Орлов В.К. и др. Надёжность и живучесть системы связи – М.: Радио и связь, 1984.
3. Попков В.К. «Математические модели связности. Часть 2-я» Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2001. – 180 с.
4. Lisa Fleischer, Martin Skutella “Quickest Flows Over Time” <http://www.andrew.cmu.edu/user/lkf/papers/FS-journal.pdf>
5. Величко В. В., Попков Г. В., Попков В. К. Модели и методы повышения живучести современных систем связи. – М.: Горячая линия – Телеком, 2014. – 270 с.

References

1. Popkov V. K. Matematicheskie modeli zhivuchesti setej svjazi – Novosibirsk: VC SORAN, 1990. - 233 p.
2. Dudnik B.Ja., Ovcharenko V.F., Orlov V.K. i dr. Nadjozhnost' i zhivuchest' sistemy svjazi – M.: Radio i svjaz', 1984.
3. Popkov V.K. «Matematicheskie modeli svjaznosti. Chast' 2-ja» Novosibirsk: IVM i MG SO RAN, 2001. – 180 p.
4. Lisa Fleischer, Martin Skutella “Quickest Flows Over Time” <http://www.andrew.cmu.edu/user/lkf/papers/FS-journal.pdf>
5. Velichko V. V., Popkov G. V., Popkov V. K. Modeli i metody povysheniya zhivuchesti sovremennyh sistem svjazi. – M.: Gorjachaja linija – Telekom, 2014. – 270 p.

Попков Глеб Владимирович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, e-mail: glebpopkov@rambler.ru

Popkov Gleb Vladimirovich, PhD, Senior Researcher, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, SB RAS, e-mail: glebpopkov@rambler.ru

5. Управляемые системы и методы оптимизации

УДК 681.3

© *В. П. Иванов*

МЕТОД СИНТЕЗА ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье рассматривается метод синтеза особого управления для автономных динамических систем. Доказывается, что особое управление в общем случае является огибающей семейства параметрических поверхностей и что его можно найти на этом семействе. Такой подход в ряде случаев упрощает проблемы синтеза алгоритмов и их практическую реализацию.

Ключевые слова: оптимальное управление, особое управление, автономные динамические системы, огибающие.

© *V. P. Ivanov*

METHOD FOR SYNTHESIS OF DYNAMIC SYSTEM SINGULAR CONTROL

In the article the method of synthesis of a special control for autonomous dynamical systems is described. It is proved that singular control is the envelope of the family of parametric surfaces, and that it can be found using this family. In some cases such an approach simplifies the problem of synthesis of algorithms for the practical implementation.

Keywords: optimal control, singular control, autonomous dynamic systems, envelope curve.

Введение

К настоящему времени существует достаточно разработанная общая теория оптимального управления, которая позволяет решить задачу «в принципе». Однако известно, что от общих воззрений до конкретного результата зачастую лежит достаточно большая дистанция, в том числе и в случае численного решения поставленной задачи. Причина заключается в проблемах устойчивого решения краевой задачи, «машинного нуля», вычислительной устойчивости используемых методов и т.д. Поэтому требуется искать подходы, основанные на иной интерпретации известных теорий. Одному из них и посвящена данная статья.

1. Постановка задачи

Рассмотрим автономную динамическую систему вида:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x) + B_j(x)u_j, \quad j=1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \quad i=m+1, \dots, n,$$

где: t - действительная переменная; $t \in \mathfrak{T}(t)$; $\mathfrak{T}(t)$ - открытое множество вещественной оси t ; $\mathfrak{T}(t) = (-\infty, \dots, +\infty)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$ - вектор состояния действительного n -мерного пространства; $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $B = (B_1, \dots, B_m)$ - заданные вектор-функции; $B_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, m$; $u = (u_1, \dots, u_m)$ - m -мерный вектор управления; $u \in U$; U - заданное множество допустимых управлений; $m < n$.

Задан терминальный функционал:

$$J = F[x_i(T), \quad i = m+1, \dots, n], \quad (2)$$

определенный на решениях системы уравнений (1). F - некоторая функция; $T \in \mathfrak{T}(t)$.

В момент $t = T$ могут быть заданы дополнительные условия вида

$$h_i = h_i[x(T)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

которые могут быть включены в функционал (2) через дополнительные множители Лагранжа.

Так как система уравнений (1) автономная, то множество $\mathfrak{T}(t)$ допустимо сузить до отрезка $[t_0, T]$, где t_0 - начальное значение аргумента t , $t_0 \in \mathfrak{T}(t)$. Момент времени T не фиксирован.

Значения $x(t_0) = x_0$ полагаются известными.

Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом: среди всех допустимых на отрезке $[t_0, T]$ управлений $u \in U$, переводящих точку (t_0, x_0) в точку $(T, x(T))$, найти такие, для которых функционал (2), определенный на решениях системы уравнений (1), принимает наименьшее значение при выполнении условий (3).

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, \dots, p_n)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации H :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i f_i + \sum_{j=1}^m p_j B_j u_j. \quad (4)$$

С использованием функции H в пространстве переменных $D^n(x, p)$, $x \in D^n(x, p)$, $p \in D^n(x, p)$, уравнения для x и p

запишутся в следующей канонической форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что H и p на оптимальном решении непрерывны и к этому же приводит аналог условия Эрдмана–Вейерштрасса классического вариационного исчисления. Непрерывность сохраняется и в том случае, когда правые части уравнений (1) терпят разрыв.

Для оптимального управления $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$ в рамках принципа максимума необходимо существование такого ненулевого вектора p , что выполняются следующие условия [1, 2]:

1) Функция H переменного $u \in U$ при каждом $t \in [t_0, T]$, т.е. при фиксированных x, p , достигает при $u = u_{opt}(t)$ минимума:

$$H(x_{opt}, u_{opt}, p) = \min_{u \in U} H(x, u, p). \tag{6}$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как:

$$u_{opt} = \arg \min_{u \in U} H(x, u, p). \tag{7}$$

2) Выполняются условия трансверсальности:

$$\left[H \delta t - \sum_{i=1}^n p_i \delta x_i \right]_{t_0}^T + \left[\sum_{i=1}^n \left(\mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right]_{t_0}^T = 0, \tag{8}$$

где $\delta t, \delta x_i$ - произвольные вариации соответствующих переменных; $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — вектор констант.

Обобщенные условия трансверсальности в силу независимости вариаций приводят к соотношениям:

$$\begin{aligned} [H]_{t_0}^T &= 0, \\ p_i &= \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \right], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

Непосредственным следствием системы уравнений (5) и условия (6) является выполнение соотношения: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$.

С учетом (9) для автономных динамических систем при заданном явно аргументе имеем:

$$H = const = 0. \tag{10}$$

Из выражений (6) для внутренних точек множества допустимых управлений получим:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = p_j = 0,$$

$$j = 0, 1, \dots, m$$

Из чего следует, что формально любое управление удовлетворяет условию первой вариации функционала. Такая неопределенность порождает особый случай нахождения оптимального управления. В работе [2] доказывается, что особое управление для динамических систем вида (1) может быть найдено из соотношений:

$$\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) = 0, \quad (11)$$

$$k = 0, 1, \dots, 2p_s$$

(p_s - порядок сингулярности) при выполнении следующих необходимых условий оптимальности:

$$(-1)^{p_s} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{d^{2p_s}}{dt^{2p_s}} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) \right] \geq 0, \quad (12)$$

$$p_s = 0, 1, 2, \dots$$

если $\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$

Из системы уравнений (11) с учетом соотношений (12) следует, что особое оптимальное управление определяется как $u_{j\text{ особ}} = u_{j\text{ особ}}(x, p).$

Отметим, что если в начальный момент времени значения x известны (или могут быть оценены), то вектор p определен (с точностью до констант) лишь на правом конце фазовой траектории. Возникает специфическая краевая задача, после решения которой («в принципе») тем или иным способом можно найти $p(t)$, а, следовательно, и $u_{j\text{ особ}}.$ Однако, вычислительные трудности, стоящие на этом пути, методические ошибки численных методов и ошибки округлений делают процесс нахождения достоверных значений весьма трудным, а зачастую (например, при выполнении требования реального масштаба времени) и невозможным. Поэтому представляется желательным использовать нетрадиционные методы синтеза оптимального управления, одним из которых, в частности, является метод огибающих.

Сначала докажем, что оптимальная траектория динамической системы в фазовом пространстве, определяемая в смысле минимизации функционала (2), является огибающей семейства мгновенных решений,

проведенных из каждой ее точки, и что оптимальное управление может быть найдено на семействе мгновенных решений.

Представим уравнение (10) в следующем виде:

$$H[x, u_{opt}(x, p), p] = H(x, p) = 0. \quad (13)$$

Введем непрерывную функцию $W(x)$ такую, что $W(x(T)) = J = F[x(T)]$ и $p = \frac{\partial W}{\partial x}$, и приведем уравнение (13) к

уравнению Гамильтона-Якоби:

$$H(x, p) = H\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}\right) = 0. \quad (14)$$

Так как функция W входит в уравнение (14) только своими частными производными, то она определяется с точностью до аддитивной постоянной W_0 , т.е.: $W = W_p(x, \alpha) + W_0$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - вектор независимых параметров, а $W_p(x, \alpha)$ - решение уравнения (14).

Запишем уравнение гиперповерхности [3]

$$S = W - W_p(x, \alpha) - W_0 \quad (15)$$

в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных W, x_1, \dots, x_n . Из-за наличия $(n + 1)$ независимых параметров $W_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ эта гиперповерхность является $(n + 1)$ -параметрическим семейством гиперповерхностей. Параметр W_0 вызывает лишь сдвиг вдоль оси W , поскольку

$$\frac{\partial S}{\partial W_0} = -1 \neq 0. \text{ Примем:}$$

$$\begin{aligned} W_0 &= W_0(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ \alpha_v &= \alpha_v(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad v = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (16)$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ - параметры, такие, что $\frac{\partial W}{\partial \gamma_i} \neq 0, \frac{\partial \alpha_v}{\partial \gamma_i} \neq 0, i = 1, \dots, n, v = 1, \dots, n$.

Построим огибающие относительно параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_n$:

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma_v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_v} - \sum \frac{\partial W_p}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_v} - \frac{\partial W_0}{\partial \gamma_v} = 0, \quad v = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Выбором функций (16) добьемся, чтобы

$$\det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_v}\right) \neq 0, \quad i, v = 1, \dots, n.$$

Тогда уравнения (17) будут иметь решения:

$$\beta_v = \frac{\partial W}{\partial \alpha_v}, \quad v = 1, \dots, n. \quad (18)$$

С другой стороны, если W - полный интеграл уравнения (14), то по теореме Якоби имеем:

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad p = \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (19)$$

Потребуем, чтобы α и β удовлетворяли преобразованию гамильтониана $H(x, p)$ в гамильтониан $H(\alpha)$, а также каноническим уравнениям, которые, ввиду (14), запишутся как

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0. \quad (20)$$

Из (16-20) следует, что оптимальные траектории являются огибающими n -параметрического семейства поверхностей.

Представим функцию $W_p(x, \alpha)$ в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных $x_v, v = 1, \dots, n$, т.е.:

$$W = \sum_{v=1}^n W_v^k(x_v, \alpha) + W_0. \quad (21)$$

Определим канонические переменные $p_v, v = 1, \dots, n$:

$$p_v = \frac{\partial W}{\partial x_v} = \frac{\partial W_v^k(x_v, \alpha)}{\partial x_v}, \quad v = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Согласно выражениям (22), переменные $p_v, v = 1, \dots, n$ оказываются функциями только одной x_v и α , в то время, как уравнения (1), (5), (19) говорят о том, что $p_v, v = 1, \dots, n$ в общем случае должны быть функциями всех x_1, \dots, x_n и остальных $p_i, i = 1, \dots, n, i \neq v$. Это противоречие может быть устранено, если приравнять $\alpha_v, v = 1, \dots, n$ некоторые определенные комбинации переменных x_1, \dots, x_n , «замороженных» в данный момент времени, т.е.:

$$\alpha_v = \alpha_v(x_1, \dots, x_n), \quad v = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Из выражений (16), (19), (22), (23) следует, что p_1, \dots, p_n и управление u_{opt} , можно определить на параметрическом семействе поверхностей, которое огибает оптимальная траектория, если в качестве параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ соответствующим образом взять фазовые координаты, а уравнения (17) будут разрешимы относительно частных производных W_p по параметрам $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Фиксируя в качестве

параметров «замороженные» в текущий момент времени значения фазовых координат, мы тем самым на семействе поверхностей определим семейство кривых. Назовем их мгновенными решениями, поскольку они определяются функцией W_p , являющейся решением уравнения (14).

В рамках решения уравнения (14) можно использовать в качестве мгновенных решений произвольные заданные функции, удовлетворяющие условиям (17), (19) - (23).

С другой стороны, соотношения (18)-(23) говорят о том, что для построения мгновенных решений можно следующий подход, а именно производить условное разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби (см. [3]).

Отметим, что мгновенные решения должны удовлетворять условию минимизации функционала (2) относительно используемых параметров.

Таким образом, оптимальная траектория динамической системы в фазовом пространстве является огибающей семейства мгновенных решений, проведенных из каждой ее точки.

Представим уравнения (5) для $p = (p_1, \dots, p_n)$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dp_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_v} = -p_v \left(\frac{\partial f_v}{\partial x_v} + \frac{\partial B_v}{\partial x_v} \cdot u_v \right) - \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^m p_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} + \frac{\partial B_j}{\partial x_v} \cdot u_j \right) - \sum_{i=m+1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v} \end{aligned} \quad (24)$$

$v = 1, \dots, m$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$\frac{dp_v}{dt} + \Phi_v p_v = G_v \quad v = 1, \dots, m, \quad (25)$$

где: $\Phi_v = \left(\frac{\partial f_v}{\partial x_v} + \frac{\partial B_v}{\partial x_v} \cdot u_v \right)$, $G_v = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^m p_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} + \frac{\partial B_j}{\partial x_v} \cdot u_j \right) - \sum_{i=m+1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v}$.

Проинтегрировав уравнение (25), получим:

$$p_v = \exp(-\int \Phi_v dt) \left[\int G_v \exp(\int \Phi_v dt) - C_v \right] \quad v = 1, \dots, m, \quad (26)$$

Постоянные C_v , $v = 1, \dots, n$ находятся из условий трансверсальности (9).

Первоначально рассмотрим случай, когда порядок сингулярности равен единице. Тогда особое управление можно найти из системы уравнений (см. [2]):

$$p_j = 0, \quad \frac{dp_j}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Из первых двух уравнений системы (27) следует, что $G_j = 0$.

Разрешим это уравнение относительно переменной x_j . Если корень существует, то:

$$x_j = \eta_j(x_v, p_v; v = 1, \dots, n; v \neq j). \quad (28)$$

Тогда третье уравнение системы (27) после преобразований запишем как:

$$\frac{dG_j}{dt} = \frac{\partial G_j}{\partial x_j} (f_j + B_j u_{j \text{ особ}}) + \frac{\partial G_j}{\partial \eta_j} \cdot \frac{d\eta_j}{dt} = 0.$$

Из последнего соотношения можно найти особое управление:

$$u_{j \text{ особ}} = - \frac{f_j + \left(\frac{\partial G_j}{\partial \eta_j} \cdot \frac{d\eta_j}{dt} \right) / \frac{\partial G_j}{\partial x_j}}{B_j} \quad (29)$$

при выполнении необходимых условий оптимальности в следующей форме:

$$B_j \left. \frac{\partial G_j}{\partial x_j} \right|_{x_j = \eta_j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (30)$$

Отметим, что корень уравнения $G_j = 0$ необязательно может быть единственным. Тогда каждый корень проверяется на выполнение необходимых (30) и достаточных (2) условий оптимальности.

Отметим также, что на мгновенном решении $x_j = \text{const} = \eta_j$.

В случае нулевого порядка сингулярности p_j (см. (26)) либо сохраняет знак, либо становится равным нулю лишь в одной точке на конце отрезка. Дополнив условие $p_j = 0$ условиями первого порядка сингулярности, мы приходим к аналогичному выражению.

В случае, когда порядок сингулярности превышает единицу, то, выделив условие сингулярности первого порядка $G_j = 0$, или, соответственно, $x_j = \eta_j$, а затем, продифференцировав его $2p_s - 1$ раз, можно найти особое управление как:

$$u_{j \text{ особ}} = f \left(x, \eta_j, \frac{d\eta_j}{dt}, \dots, \frac{d^{2p_s-1} \eta_j}{dt^{2p_s-1}} \right). \quad (31)$$

Следовательно, особое оптимальное управление в рамках заданного терминального критерия оптимальности можно найти на семействе мгновенных решений.

Заключение

Обобщая полученные выше результаты, можно сделать следующие выводы:

1) оптимальную траекторию динамической системы в фазовом пространстве можно представить как огибающую семейства мгновенных решений, проведенных из каждой ее точки;

2) оптимальное управление может быть найдено на семействе мгновенных решений из конкретных соотношений, складывающихся на тот или иной момент времени.

Литература

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особое оптимальное управление. – М.: Наука, 1973. – 256 с.
3. Шмутцер Э. Основные принципы классической механики и классической теории поля (канонический аппарат). – М.: Мир, 1976. – 157 с.

References

1. Boltianski V.G. Mathematical methods of the optimal control. – M: Nauka, 1969. – 408 p.
2. Gabasov R., Kirillova F. M. Syngular optimal control. – M: Nauka, 1973. – 256 p.
3. Schmutzer E. Basic principles of classic mechanics and classic theory of the field (canonical vehicle). – M: Mir, 1976. – 157 p.

Иванов Владимир Петрович, кандидат технических наук, доцент Санкт-Петербургского института, информатики и автоматизации РАН, e-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

Ivanov Vladimir Petrovich, PhD, A/Professor of St.-Petersburg Institute of Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences, e-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

Содержание

1. Алгебра и геометрия

Бадеев А. В. Пример коммутативной альтернативной супералгебры над полем характеристики 3.....	3
Ковыршина А. И. Полное описание стабильных элементов свободной нильпотентной группы $F_{2,12}$	7

2. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

Денисенко В. В., Ильин В. П. Об ошибочности теоремы В. В. Аксенова.....	16
Кибирев В. В. Основные краевые задачи теории потенциала.....	22

3. Математическое моделирование и обработка данных

Дагуров П. Н., Дмитриев А. В., Добрынин С. И., Чимитдоржиев Т. Н. Модель рассеяния микроволн от двухслойной среды с шероховатыми границами.....	30
Мадыев А. П., Ширапов Д. Ш. Метод приведения результирующей дисперсии нестационарных сигналов типа переходный режим.....	36

4. Информационные системы и технологии

Ветров А. А., Гаченко А. С., Фереферов Е. С., Хмельнов А. Е. Применение декларативных спецификаций для разработки и интеграции информационных систем.....	45
Попков Г. В. К вопросу структурной надежности в мобильных сетях в условиях разрушающих информационных воздействий.....	55

5. Управляемые системы и методы оптимизации

Иванов В. П. Метод синтеза особого управления для автономных динамических систем.....	62
---	----

Contents

1. Algebra and geometry

Badeyev A. V. An example of alternative commutative super-algebra over a field of characteristic 3.....	3
Kovyrshina A. I. Full description of stable elements of free nilpotent group $F_{2,12}$	7

2. Functional analysis and differential equations

Denisenko V. V., Iliin V. P. Incorrectness of the theorem by V. V. Ak-senov.....	16
Kibirev V. V. Basic boundary value problems of potential theory.....	22

3. Mathematical modeling and data processing

Dagurov P. N., Dmitriev A. V., Dobrynin S. I., Chimitdorzhiev T. N. Scattering of microwaves from a two-layer medium with rough boundaries.....	30
Madyev A. P., Shirapov D. Sh. The method of bringing the resultant dispersion of nonstationary signals like the transition mode.....	36

4. Information Systems and Technology

Vetrov A. A., Gachenko A. S., Fereferov E. S., Hmelnov A. E. Building and integration of information systems based on declarative specification.....	45
Popkov G. V. The question of structural reliability in mobile networks under destroys informational influence.....	55

5. Controlled systems and methods of optimization

Ivanov V. P. Method for synthesis of dynamic system singular control...	62
---	----

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ,
ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ
«ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА»

Отбор и редактирование публикуемых статей производятся редакционной коллегией из ведущих ученых и приглашенных специалистов.

В журнал следует направлять статьи, отличающиеся высокой степенью научной новизны и значимостью. Каждая статья имеет УДК, а также письменный развернутый отзыв (рецензию) научного руководителя или научного консультанта, заверенный печатью. Рецензенты должны являться признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и иметь в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи.

Автор статьи обязан заключить лицензионный договор о предоставлении неисключительных прав на использование созданного им произведения (статьи) ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет». Образец лицензионного договора представлен на сайте БГУ.

Общие требования	Тексты представляются в электронном и печатном виде. Файл со статьей может быть на дискете или отправлен электронным письмом. На последней странице – подпись автора(ов) статьи. Название статьи и аннотация даются на русском и английском языках. Аннотация (авторское резюме) должна заключать от 100 до 250 слов. После аннотации дать ключевые слова (не менее семи слов) на русском и английском языках. Несоответствие между русскоязычным и англоязычными текстами не допускается. Выполнить транслитерацию русского текста литературы латиницей.
Электронная копия	Статья представляется на русском языке в doc-файле, набранная в текстовом редакторе Microsoft Word. Текстовый редактор Microsoft Word (версии XP, 2003). В имени файла указывается фамилия первого автора.
Параметры страницы	Формат А5. Поля: левое – 1,5 см, верхнее, нижнее, правое – 1 см.
Форматирование основного текста	С нумерацией страниц внизу по центру. Абзацный отступ – 0,5 см. Интервал – одинарный.
Гарнитура шрифта	Times New Roman. Размер кегля – 11 пт.
Объем статьи (ориентировочно)	Кратких сообщений – 4-8 с., статей на соискание ученой степени кандидата наук – 8-15 с., на соискание ученой степени доктора наук – 15-30 с. Название статьи должно содержать не более 10 слов.
Сведения об авторах	Указываются фамилия, имя, отчество (полностью), ученая степень, звание, должность и место работы, страна, адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail (на русском и английском языках)

В начале статьи ставится подробный индекс УДК согласно действующим в настоящее время классификаторам. Далее следуют инициалы и фамилии авторов (полуужирный курсив, выравнивание по правому краю), название статьи (полуужирным шрифтом, по центру), аннотация, ключевые слова и перевод перечис-

ленных частей текста на английский язык. В конце документа после списка литературы приводятся сведения об авторах и их перевод на английский язык (фамилия, имя, отчество полностью, ученая степень, ученое звание, должность, место работы (указываются официальные названия организаций), контактный адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail). Ссылки на гранты приводятся в сноске на первой странице.

Статья должна быть структурирована и содержать введение, ряд разделов с возможными подразделами, заключение, список литературы.

Набор формул осуществляется в редакторе формул Microsoft Equation 3/4 или MathType 5/6. Не допускается: набор формул как текста (включая таблицу символов, надстрочные и подстрочные индексы), а также с применением автофигур; вставка формул как рисунков; сжатие формулы как рисунка. Не допускается набор формул с применением появившегося в Word 2007 нестандартного редактора формул, функционирующего только с форматом docx. Все формулы, на которые в тексте даются ссылки, выносятся в отдельную строку с нумерацией в круглых скобках в тексте по правому краю страницы (строка выравнивается по правому краю). Основной размер шрифта в формулах 11 пт.

- Список литературы – все работы необходимо пронумеровать, в тексте ссылки на литературу оформлять в квадратных скобках.

- Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются. Все статьи проходят проверку в системе «Антиплагиат. ВУЗ».

- Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ». Корректурa авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются. Гонорар авторам не выплачивается.

- Допустима публикация статей на английском языке, сведения об авторах, название, аннотацию и ключевые слова которых необходимо перевести на русский язык.

- Формат журнала 70 x 100 1/16.

- Желательно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Все объекты должны быть черно-белыми без оттенков. Рисунки и графики должны иметь четкое изображение и быть выдержаны в черно-белой гамме, лучше применять штриховку. Фотографии и рисунки в формате *.tif или *.jpg должны иметь разрешение не менее 300 dpi. Диаграммы, рисунки, графики должны прилагаться отдельными файлами, чтобы издательство имело возможность ввести в них правки. Математические формулы в текстах должны быть выполнены в MathType. Если работа содержит примеры на старославянском языке или языках народов, то отправить соответствующие символы.

Стоимость опубликования одной статьи составляет за одну страницу формата А5 для сотрудников БГУ – 150 р., для остальных – 300 р.

Оплата за публикацию статьи, авторами которой являются только аспиранты, не взимается. Должна прилагаться справка учреждения, подтверждающая, что авторы являются аспирантами этого учреждения.

Адрес: 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, Издательство БГУ.

Факс (301-2)-21-05-88

Научное издание

В Е С Т Н И К
БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2/2015

Математика, информатика

В авторской редакции
Компьютерная верстка Д. О. Трунина

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 22.06.15. Формат 70 x 100 1/16.
Усл. печ. л. 6,18. Уч.-изд. л. 3,04. Тираж 1000. Заказ 167.
Цена свободная.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии Бурятского госуниверситета
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а