

ВЕСТНИК

БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2012/1



Математика, информатика

Журнал издается
с 2012 года

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-48732 от 28.02.2012 г.

Ответственные за выпуск

Д.О. Трунин, И.-Х.Д. Хишектуева

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.С. Булдаев, д-р физ.-мат. наук, проф.
(главный редактор);
А.Д. Мижидон, д-р техн. наук, проф.;
В.Б. Цыренова, д-р пед. наук, доц.;
В.В. Кибирев, канд. физ.-мат. наук, проф.;
В.И. Антонов, канд. физ.-мат. наук, доц.;

В.И. Гурман, д-р техн. наук, проф.;
Г.А. Шишкин, канд. физ.-мат. наук, проф.;
Д.Ш. Ширапов, д-р физ.-мат. наук, проф.;
И.Б. Юмов, канд. физ.-мат. наук, доц.;
И.К. Шаранхаев, канд. физ.-мат. наук, доц.;
С.Н. Васильев, акад. РАН;
Т.Г. Дармаев, канд. физ.-мат. наук, доц.;

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а

☎ 21-16-91, vestnik_bsu_math@rambler.ru

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а

☎ 21-95-57, riobsu@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

1. Управляемые системы и методы оптимизации

Балушкин Ф.А.

Минимизация дозы облучения персонала в задаче о демонтаже энергоблоков АЭС при наличии нескольких условий предшествования 4

Гурман В.И.

Применение условий оптимальности с разрешающей системой к исследованию вырожденных задач оптимального управления 16

Гурман В.И., Будаева Д.Ц.

Проблемы информационного обеспечения модели региона 20

Малтугуева Г.С., Юрин А.Ю.

Метод поддержки принятия решений в малых группах 26

Расина И.В. Методы улучшения управляемых процессов 34

Расина И.В., Блинов А.О.

Улучшение импульсных процессов на основе дискретно-непрерывной модели 42

2. Системный анализ и информационные технологии

Танхасаев А.В.

Построение фрактальных объектов при помощи библиотеки MPICH2 52

Хандаров Ф.В., Дондоков З.Б.-Д.

Прогнозирование налога на доходы физических лиц с использованием искусственных нейронных сетей ... 59

3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

Кибирев В.В.

Задача Коши для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными 67

Плаксина И.М. Условия разрешимости одной переопределенной сингулярной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения первого порядка 71

Солодуша С.В.

Полиномиальные уравнения Вольтерра I рода в задаче моделирования нелинейных динамических систем с обратной связью 78

4. Алгебра и геометрия

Заятуев Б.В. Об одном примере келлеровой поверхности 87

Халтанова С.Ю. О клонах ультрафункций, сохраняющих нуль и единицу 93

Цыренова В.Б., Батожаргалова А.Э.

Линейчатые поверхности с параболическими образующими в четырехмерном квазиэллиптическом пространстве 99

Цыренова В.Б., Проскуракова И.В.

Комплексы в трехмерном квазигиперболическом пространстве 103

5. Математическое моделирование

Воротынцев А.В.

Модель переноса тепла и влаги в системе почва-растение с учетом баланса энергии 107

CONTENTS

1. Control systems and optimization methods

Balushkin F.A.

Minimization of personal radiation dose in problem of dismantle the atomic power station power-unit in the presence of several conditions of precedence 4

Gurman V.I.

Application of optimality conditions with resolving system problem for the investigation of degenerate optimal control problem 16

Gurman V.I., Budaeva D.Ts.

Problems of region model informational provision 20

Maltugueva G.S. , Yurin A.Y.

Method of decision-making in small groups 26

Rasina I.V.

Methods of improvement control processes 34

Rasina I.V., Blinov A.O.

Improvement of impulse process on the base of discrete-continuous model 42

2. System analysis and information technologies

Tankhasaev A.V.

Construction of fractal objects by means of library MPICH2 52

Handarov F.V. , Dondokov Z.B-D.

Personal income tax forecasting using artificial neural networks 59

3. Functional analysis and differential equations

Kibirev V.V.

Cauchy problem for the Laplace's equation with three independent variables 67

Plaksina I.M.

Conditions of solvability of one over-determined singular boundary value problem for first order functional differential equation 71

Solodusha S.V.

Polynomial Volterra equations of the first kind for modeling nonlinear dynamic systems with feedback 78

4. Algebra and geometry

Zayatuyev B.V.

One example kahlerian surface 87

Haltanova S.J.

About one interval in the lattic of clones of ultrafunctions 93

Tsyrenova V.B. , Batozhargalova A.E.

Ruled surfaces of parabolic lines in the 4d quasi-elliptic space 99

Tsyrenova V.B., Proskuryakova I.V.

Complexes in the 3d quasi-hyperbolic spece 103

5. Mathematical modeling

Vorotyntsev A.V.

The model of moisture-heat trasfer in soil-plant system subject to the energy balance 107

1. УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.8

© Ф.А. Балускин

МИНИМИЗАЦИЯ ДОЗЫ ОБЛУЧЕНИЯ ПЕРСОНАЛА В ЗАДАЧЕ О ДЕМОНТАЖЕ ЭНЕРГОБЛОКОВ АЭС ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ УСЛОВИЙ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ

В данной статье рассматривается задача минимизации дозы облучения персонала при демонтаже отработавших блоков атомных электростанций. В отличие от предыдущих публикаций здесь на очередность выполнения работ накладываются условия предшествования, задающие ограничения на очередность выполнения некоторых пар работ, причем пары, задающие ограничения, могут пересекаться друг с другом.

Ключевые слова: минимизация дозы облучения, условие предшествования.

F.A. Balushkin

MINIMIZATION OF PERSONAL RADIATION DOSE IN PROBLEM OF DISMANTLE THE ATOMIC POWER STATION POWER-UNIT IN THE PRESENCE OF SEVERAL CONDITIONS OF PRECEDENCE

The Problem is considered at minimization of a dose of an irradiation of the personnel at dismantle of the fulfilled blocks of atomic power stations. Unlike the previous works, here on sequence of performance of works the conditions of precedence setting restrictions on sequence of performance of some pairs of works, and steams setting restrictions are imposed, can be crossed with each other.

Keywords: Assignment Problem, Minimization of Protected Irradiation, Precedence Conditions.

Введение

В нынешней ситуации в атомной энергетике заканчиваются сроки службы старых ядерных реакторов на атомных электростанциях, встают новые задачи для руководства. В связи с выводом их из эксплуатации – появилась необходимость демонтировать отработавшие энергоблоки. Энергоблок – высоконаучный и сложный в технологическом плане комплекс, его демонтаж – трудозатратный процесс.

Большая часть энергоблока разбирается человеком. Каждый элемент имеет свое время демонтажа и интенсивность излучения. Очередность разборки элементов энергоблока играет основополагающую роль в целях уменьшения общей дозы облучения персоналом. Поэтому задача состоит

в том, чтобы оптимизировать последовательность демонтажа радиоактивных объектов с целью минимизации суммарной дозы облучения персонала.

1. Постановка задачи

Данная задача схожа с задачей коммивояжера, но основное отличие заключается в том, что стоимость очередного перехода зависит не только от очередного объекта, но и всех оставшихся объектов, разборка которых еще предстоит. Функционал такой задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned} c_{0,\alpha(1)}[\overline{1,N}] + \sum_{i=2}^N c_{\alpha(i-1),\alpha(i)}[\{\alpha(j): j \in \overline{1,N}\}] = \\ = c_{0,\alpha(1)}[\overline{1,N}] + \sum_{i=2}^N c_{\alpha(i-1),\alpha(i)}[\overline{1,N} \setminus \{\alpha(j): j \in \overline{1,i-1}\}], \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_{i,j}[K]$ – характеристика затрат при перемещении из i -й к j -й точке маршрута обхода, K – множество точек, которые предстоит обойти, N – общее количество объектов, которые предстоит обойти, α – перестановка из элементов множества $\overline{1,N}$.

Задачу можно решить методом динамического программирования (МДП), и для минимизации функционала (1) разработан вариант МДП [2]. Но МДП имеет большой недостаток, состоящий в том, что с его помощью можно решать задачи на персональном компьютере, когда количество объектов не превосходит двух-трех десятков.

Функционал, характеризующий суммарную дозу облучения, специалистами по АЭС [3] предлагается, в частности, использовать в виде

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^N t_{\alpha(i)} \sum_{k=i}^N H_{\alpha(k)}, \quad (2)$$

где $t_{\alpha(i)}$ – время демонтажа $\alpha(i)$ -го объекта, $H_{\alpha(i)}$ – мощность дозы излучения, создаваемая $\alpha(k)$ -ым объектом. Оценка (2) является частным случаем функционала (1).

Функционал (2) учитывает только дозы облучения, полученные при выполнении работ, но не учитываются облучения, полученные при перемещении от объекта к объекту.

В работе [4] показано, что если упорядочить элементы перестановки α по признаку убывания

$$k_{\alpha(i)} = \frac{H_{\alpha(i)}}{t_{\alpha(i)}}, \quad (3)$$

то перестановка α становится оптимальной.

Под условием предшествования в задаче оптимальной маршрутизации будем понимать условие, состоящее в том, что для пары элементов $(\alpha(j), \alpha(i))$ в допустимой перестановке α элемент $\alpha(j)$ должен стоять раньше второго.

Условия предшествования в практических задачах бывают обусловлены различными технологическими ограничениями.

Задача 1. Требуется минимизировать функционал (2) по всем перестановкам α , удовлетворяющим заданным условиям предшествования.

2. Оптимальные перестановки в задаче с несколькими условиями предшествования

Пусть имеется перестановка α , которая оптимальна без условия предшествования. Т.е. отсортирована по убыванию $k_{\alpha(i)}$ [4]:

$$\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(N)), \quad (4)$$

Рассмотрим случаи, когда в задаче 1 имеется условие предшествования в виде пары p_1q_1 . Если условие предшествования в перестановке (4) выполняется, то перестановка будет оптимальной и с условием предшествования. В противном случае

$$k_{\alpha(p_1)} < k_{\alpha(q_1)}. \quad (5)$$

Тогда согласно теореме 1 [6] оптимальная перестановка будет иметь вид:

$$\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(q_1), \alpha(p_1), \dots),$$

и отсортирована по убыванию $k_{\alpha(i)}$, $i = \overline{1, N} \setminus \{p_1, q_1\}$ и $k_{\alpha(q_1), \alpha(p_1)}$, где

$$k_{\alpha(q_1), \alpha(p_1)} = \frac{H_{\alpha(q_1)} + H_{\alpha(p_1)}}{t_{\alpha(q_1)} + t_{\alpha(p_1)}}.$$

Теорема 1. Пусть в задаче 1 имеются два условия предшествования вида p_1q_1 и p_2q_2 , для которых выполняются условие (5) и условия $k_{\alpha(p)} \geq k_{\alpha(p_1)}$, $k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} \geq k_{\alpha(p)}$. Тогда оптимальная перестановка будет иметь вид $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots)$ при сортировке по убыванию $k_{\alpha(i)}$, $i = \overline{1, N} \setminus \{p, p_1, q_1\}$ и $k_{\alpha(p), \alpha(p_1), \alpha(q_1)}$, где

$$k_{\alpha(p), \alpha(p_1), \alpha(q_1)} = \frac{H_{\alpha(p)} + H_{\alpha(p_1)} + H_{\alpha(q_1)}}{t_{\alpha(p)} + t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)}}.$$

Доказательство. Если пару элементов $(\alpha(q_1), \alpha(p_1))$ считать одним элементом в новой перестановке, то по Теореме 1 [6] минимум функционала (2) будет достигнут при упорядочении $k_{\alpha(i)}$ ($i \neq p, p_1, q_1$) и

$$k_{\alpha(p), (\alpha(p_1), \alpha(q_1))}, \text{ где } k_{\alpha(p), (\alpha(p_1), \alpha(q_1))} = \frac{H_{\alpha(p)} + k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)}}{t_{\alpha(p)} + t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)}}.$$

Т.к. демонтаж проходит последовательно, то

$$\begin{aligned} k_{\alpha(p), (\alpha(p_1), \alpha(q_1))} &= \frac{H_{\alpha(p)} + k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)}}{t_{\alpha(p)} + t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)}} = \\ &= \frac{H_{\alpha(p)} + \frac{H_{\alpha(p_1)} + H_{\alpha(q_1)}}{t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)}} (t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)})}{t_{\alpha(p)} + t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)}} = \frac{H_{\alpha(p)} + H_{\alpha(p_1)} + H_{\alpha(q_1)}}{t_{\alpha(p)} + t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)}}. \end{aligned}$$

В силу того, что $k_{\alpha(p)} \geq k_{\alpha(p_1)}$, то будет выполняться неравенство

$$D(\dots, \alpha(p_1), \alpha(p), \alpha(q_1), \dots) \geq D(\dots, \alpha(p), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если в задаче 1 имеются два условия предшествования вида $p_1 q_1$ и $p_1 q$, для которых выполняется условие (5), $k_{\alpha(q)} \geq k_{\alpha(q_1)}$ и $k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} \geq k_{\alpha(q)}$, тогда перестановка, отсортированная по убыванию $k_{\alpha(i)}$, $i = \overline{1, N} \setminus (p_1, q, q_1)$ и $k_{\alpha(p_1), \alpha(q), \alpha(q_1)}$, будет оптимальной, где

$$k_{\alpha(p_1), \alpha(q), \alpha(q_1)} = \frac{H_{\alpha(p_1)} + H_{\alpha(q)} + H_{\alpha(q_1)}}{t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q)} + t_{\alpha(q_1)}}.$$

Доказательство. Если пару элементов $(\alpha(q_1), \alpha(p_1))$ считать одним элементом в новой перестановке, то по Теореме 1 [6] минимум функционала (2) будет достигнут при упорядочении $k_{\alpha(i)}$ ($i \neq q, p_1, q_1$) и

$$k_{(\alpha(p_1), \alpha(q_1)), \alpha(q)}, \text{ где } k_{(\alpha(p_1), \alpha(q_1)), \alpha(q)} = \frac{k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} + H_{\alpha(q)}}{t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} + t_{\alpha(q)}}.$$

Т.к. демонтаж элементов энергоблока проходит поочередно, то

$$\begin{aligned}
 k_{(\alpha(p_1), \alpha(q_1)), \alpha(p)} &= \frac{k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} + H_{\alpha(q)}}{t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} + t_{\alpha(q)}} = \\
 &= \frac{\frac{H_{\alpha(p_1)} + H_{\alpha(q_1)}}{t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)}} (t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)}) + H_{\alpha(q)}}{t_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} + t_{\alpha(q)}} = \frac{H_{\alpha(p_1)} + H_{\alpha(q_1)} + H_{\alpha(q)}}{t_{\alpha(p_1)} + t_{\alpha(q_1)} + t_{\alpha(q)}}.
 \end{aligned}$$

Т.к. $k_{\alpha(q)} \geq k_{\alpha(q_1)}$, то

$$D(\dots, \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q), \dots) \geq D(\dots, \alpha(p_1), \alpha(q), \alpha(q_1), \dots).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим случаи, когда к оптимальной перестановке (4) применены два непересекающихся условия предшествования в виде пар p_1q_1 и p_2q_2 такие, что:

$$\begin{aligned}
 k_{\alpha(p_1)} &< k_{\alpha(q_1)} \\
 k_{\alpha(p_2)} &< k_{\alpha(q_2)} \\
 k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)} &\geq k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)},
 \end{aligned} \tag{6}$$

тогда оптимальная перестановка $\bar{\alpha}$ будет иметь вид

$$\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(q_1), \alpha(p_1), \dots, \alpha(q_2), \alpha(p_2), \dots). \tag{7}$$

Теорема 3. Пусть в задаче 1 имеются условия предшествования p_1q_1 , p_2q_2 и p_2p_1 , удовлетворяющие условиям (6) и $k_{\alpha(q_2)} \geq k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)}$. Тогда оптимальная перестановка в этой задаче будет иметь вид $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots)$.

Доказательство. В данных условиях возможны только перестановки трех типов:

$$\begin{aligned}
 &(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots), \\
 &(\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots), \\
 &(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots).
 \end{aligned}$$

В первом случае из условия (6) известно, что $k_{\alpha(p_1)} < k_{\alpha(q_1)}$. Если $k_{\alpha(p_1)} > k_{\alpha(q_2)}$, то $k_{\alpha(q_1)} > k_{\alpha(q_2)}$, тогда согласно Лемме 1 [4]

$$\begin{aligned}
 &D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots) < \\
 &< D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots).
 \end{aligned}$$

Если $k_{\alpha(q_1)} < k_{\alpha(q_2)}$, то $k_{\alpha(p_1)} < k_{\alpha(q_2)}$, тогда

$$\begin{aligned} D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \alpha(p_1), \dots) < \\ < D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots). \end{aligned}$$

Из этого следует, что всегда есть перестановка меньшая $(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots)$.

Отличия двух оставшихся перестановок заключается в положении пары $(\alpha(p_1), \alpha(q_1))$ относительно элемента $\alpha(q_2)$. Т.к. по условию теоремы $k_{\alpha(q_2)} \geq k_{\alpha(p_1), \alpha(q_1)}$, то оптимальной перестановкой является $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots)$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть в задаче 1 имеются условия предшествования $p_1 q_1$, $p_2 q_2$ и $q_2 q_1$, удовлетворяющие условиям (б) и $k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} \geq k_{\alpha(p_1)}$. Тогда оптимальная перестановка в заданных условиях будет иметь вид $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots)$.

Доказательство. Для данных условий существует три варианта перестановки:

$$\begin{aligned} (\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots), \\ (\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots), \\ (\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots). \end{aligned}$$

В первом случае из условия известно, что $k_{\alpha(p_2)} < k_{\alpha(q_2)}$. Если $k_{\alpha(p_1)} \geq k_{\alpha(q_2)}$, то $k_{\alpha(p_1)} > k_{\alpha(p_2)}$, тогда согласно Лемме 1 [4]

$$\begin{aligned} D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots) < \\ < D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots). \end{aligned}$$

Если $k_{\alpha(p_1)} \leq k_{\alpha(p_2)}$, то $k_{\alpha(p_1)} < k_{\alpha(q_2)}$, тогда

$$\begin{aligned} D(\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots) < \\ < D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots). \end{aligned}$$

Из этого следует, что всегда есть перестановка меньшая $(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots)$.

Различия двух оставшихся перестановок состоит в том, что пара $(\alpha(p_2), \alpha(q_2))$ и элемент $\alpha(p_1)$ поменяны местами. Т.к. по условию

теоремы $k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} \geq k_{\alpha(p_1)}$, то оптимальной перестановкой является $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots)$. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть в задаче 1 имеются условия предшествования p_1q_1 , p_2q_2 и p_2q_1 , удовлетворяющие (б), $k_{\alpha(q_1)} \geq k_{\alpha(q_2)}$ и $k_{\alpha(p_1)} \geq k_{\alpha(p_2)}$ (или $k_{\alpha(p_1)} < k_{\alpha(p_2)}$). Если $k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} - k_{\alpha(p_1)} \leq \frac{(k_{\alpha(q_1)} - k_{\alpha(q_2)})t_{q_2}t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}}$, тогда оптимальная перестановка будет иметь вид $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots)$ при $k_{\alpha(p_1)} \geq k_{\alpha(p_2)}$ и $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots)$ при $k_{\alpha(p_1)} < k_{\alpha(p_2)}$, иначе $\bar{\alpha} = (\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots)$.

Доказательство. Учитывая условия предшествования, возможны пять различных перестановок:

$$\begin{aligned} & (\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots), \\ & (\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots), \\ & (\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots), \\ & (\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots), \\ & (\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots). \end{aligned}$$

Из условия известно, что $k_{\alpha(q_1)} \geq k_{\alpha(q_2)}$, то первый и второй варианты не актуальны, т.к. если $\alpha(q_2)$ и $\alpha(q_1)$ согласно Лемме 1 [4] поменять местами, тогда

$$\begin{aligned} & D(\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots) \leq \\ & \leq D(\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots) \\ & \text{и } D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots) \leq \\ & \leq D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_2), \alpha(q_1), \dots). \end{aligned}$$

Третья и четвертая перестановки отличаются двумя элементами $\alpha(p_2)$ и $\alpha(p_1)$. По Лемме 1 [4] функционал (2) будет меньше у третьей перестановки, если $k_{\alpha(p_1)} > k_{\alpha(p_2)}$, и наоборот.

Сравним третью и пятую перестановки, расписав функционал (2):

$$\begin{aligned}
 & D(\dots, \alpha(l), \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \alpha(m), \dots) \leq \\
 & \leq D(\dots, \alpha(l), \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(m), \dots) \\
 & t_1 \sum_{i=1}^n H_i + \dots + t_l \sum_{i=l}^n H_i + t_{p_1} \left(H_{p_1} + H_{p_2} + H_{q_1} + H_{q_2} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + \\
 & + t_{p_2} \left(H_{p_2} + H_{q_1} + H_{q_2} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + t_{q_1} \left(H_{q_1} + H_{q_2} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + \\
 & + t_{q_2} \left(H_{q_2} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + t_m \sum_{i=m}^n H_i + \dots + t_n H_n \leq \\
 & \leq t_1 \sum_{i=1}^n H_i + \dots + t_l \sum_{i=l}^n H_i + t_{p_2} \left(H_{p_2} + H_{q_2} + H_{p_1} + H_{q_1} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + \\
 & + t_{q_2} \left(H_{q_2} + H_{p_1} + H_{q_1} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + t_{p_1} \left(H_{p_1} + H_{q_1} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + \\
 & + t_{q_1} \left(H_{q_1} + t_l \sum_{i=m}^n H_i \right) + t_m \sum_{i=m}^n H_i + \dots + t_n H_n.
 \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим:

$$\begin{aligned}
 & t_{p_1} H_{p_1} + t_{p_1} H_{p_2} + t_{p_1} H_{q_1} + t_{p_1} H_{q_2} + t_{p_2} H_{p_2} + t_{p_2} H_{q_1} + t_{p_2} H_{q_2} + \\
 & + t_{q_1} H_{q_1} + t_{q_1} H_{q_2} + t_{q_2} H_{q_2} \leq t_{p_2} H_{p_2} + t_{p_2} H_{q_2} + t_{p_2} H_{p_1} + t_{p_2} H_{q_1} + \\
 & + t_{q_2} H_{q_2} + t_{q_2} H_{p_1} + t_{q_2} H_{q_1} + t_{p_1} H_{p_1} + t_{p_1} H_{q_1} + t_{q_1} H_{q_1}.
 \end{aligned}$$

После приведения подобных получим:

$$t_{p_1} H_{p_2} + t_{p_1} H_{q_2} + t_{q_1} H_{q_2} \leq t_{p_2} H_{p_1} + t_{q_2} H_{p_1} + t_{q_2} H_{q_1}.$$

Упростив, имеем:

$$t_{p_1} (H_{p_2} + H_{q_2}) + t_{q_1} H_{q_2} \leq (t_{p_2} + t_{q_2}) H_{p_1} + t_{q_2} H_{q_1}.$$

Время заведомо является положительным, тогда разделим обе части на $(t_{p_2} + t_{q_2}) t_{p_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{H_{p_2} + H_{q_2}}{t_{p_2} + t_{q_2}} + \frac{t_{q_1} H_{q_2}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} &\leq \frac{H_{p_1}}{t_{p_1}} + \frac{t_{q_2} H_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} \\ k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} + \frac{t_{q_1} H_{q_2}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} &\leq k_{\alpha(p_1)} + \frac{t_{q_2} H_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} \\ k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} + \frac{k_{\alpha(q_2)} t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} &\leq k_{\alpha(p_1)} + \frac{k_{\alpha(q_1)} t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} \\ k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} - k_{\alpha(p_1)} &\leq \frac{k_{\alpha(q_1)} t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} - \frac{k_{\alpha(q_2)} t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}} \\ k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} - k_{\alpha(p_1)} &\leq \frac{(k_{\alpha(q_1)} - k_{\alpha(q_2)}) t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2})t_{p_1}}. \end{aligned}$$

Аналогично, если

$$\begin{aligned} D(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots) &\leq \\ \leq D(\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots), \end{aligned}$$

получаем

$$k_{\alpha(p_1), \alpha(q_2)} - k_{\alpha(p_2)} \leq \frac{(k_{\alpha(q_1)} - k_{\alpha(q_2)}) t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_1} + t_{q_2})t_{p_2}}.$$

Теорема доказана.

3. Алгоритм

Рассмотрим алгоритм для поиска оптимальной перестановки с условиями предшествования:

1. Выстроим перестановку по убыванию $k_{\alpha(i)}$, $k_{\alpha(i)} = \frac{H_{\alpha(i)}}{t_{\alpha(i)}} \quad (3)$. Без ус-

ловия предшествования данная перестановка является оптимальной [4].

2. Рассматриваем последний элемент полученной перестановки. Ищем пару, где данный элемент выступает в качестве "p" пары pq. Если такой пары нет, то данный (последний) элемент откидываем и переходим к шагу 2 с новой перестановкой, в которой на один элемент меньше. Оптимальность оставшейся перестановки не нарушится.

Если пар несколько, где данный элемент выступает в качестве "p" пары pq, то берем элемент "q" тот, который стоит ближе к "p", т.е. k_q – меньшее.

3. Если элементы "p" и "q" не участвовали в других парах, описанных ранее, то считаем $k_{pq} = \frac{H_p + H_q}{t_p + t_q}$ (Теорема 1 [6]) и переходим к шагу 1, учитывая k_{pq} вместо k_p и k_q .

4. Если элемент "p" уже был задействован ранее в качестве "p₁" пары (p₁q₁), то "q" встает перед "q₁", т.к. $k_q \geq k_{q_1}$ (из шага 2). Считаем $k_{pq_1} = \frac{H_p + H_q + H_{q_1}}{t_p + t_q + t_{q_1}}$ и переходим к шагу 1, учитывая k_{pq_1} вместо k_p , k_q и k_{q_1} . (Теорема 1.)

5. Если элемент "p" уже был задействован ранее в качестве "q₁" пары (p₁q₁), то "q" встает после "q₁", т.к. $k_q \geq k_{q_1}$ (из шага 2). Считаем $k_{p_1q_1q} = \frac{H_{p_1} + H_{q_1} + H_q}{t_{p_1} + t_{q_1} + t_q}$ и переходим к шагу 1, учитывая $k_{p_1q_1q}$ вместо k_{p_1} , k_{q_1} и k_q . (Теорема 2 [6].)

6. Если элемент "q" уже был задействован ранее в качестве "p₁" пары (p₁q₁), то "q" в виде (p₁q₁) встает после "p". Считаем $k_{pp_1q_1} = \frac{H_p + H_{p_1} + H_{q_1}}{t_p + t_{p_1} + t_{q_1}}$ и переходим к шагу 1, учитывая $k_{pp_1q_1}$ вместо k_p , k_{p_1} и k_{q_1} . (Теорема 2 [6].)

7. Если элемент "q" уже был задействован ранее в качестве "q₁" пары (p₁q₁), то "q" в виде (p₁q₁) встает после "p", т.к. $k_p \geq k_{p_1}$. Считаем $k_{pp_1q_1} = \frac{H_p + H_{p_1} + H_{q_1}}{t_p + t_{p_1} + t_{q_1}}$ и переходим к шагу 1, учитывая $k_{pp_1q_1}$ вместо k_p , k_{p_1} и k_{q_1} . (Теорема 2.)

8. Если элемент "q" уже был задействован ранее в качестве "p₁" пары (p₁q₁) и элемент "p" уже был задействован ранее в качестве "q₂" пары (p₂q₂), то "q" в виде (p₁q₁) встает после "q₂". Считаем $k_{p_2q_2p_1q_1} = \frac{H_{p_2} + H_{q_2} + H_{p_1} + H_{q_1}}{t_{p_2} + t_{q_2} + t_{p_1} + t_{q_1}}$ и переходим к шагу 1, учитывая $k_{p_2q_2p_1q_1}$ вместо k_{p_2} , k_{q_2} , k_{p_1} и k_{q_1} . (Теорема 2 [6].)

9. Если элемент "q" уже был задействован ранее в качестве "p₁" пары (p₁q₁) и элемент "p" уже был задействован ранее в качестве "p₂" пары (p₂q₂), то "q" в виде (p₁q₁) встает после "p₂". Считаем

$$k_{p_2 p_1 q_1 q_2} = \frac{H_{p_2} + H_{p_1} + H_{q_1} + H_{q_2}}{t_{p_2} + t_{p_1} + t_{q_1} + t_{q_2}} \text{ и переходим к шагу 1, учитывая } k_{p_2 p_1 q_1 q_2}$$

вместо k_{p₂}, k_{p₁}, k_{q₁} и k_{q₂}. (Теорема 3.)

10. Если элемент "q" уже был задействован ранее в качестве "q₁" пары (p₁q₁) и элемент "p" уже был задействован ранее в качестве "q₂" пары (p₂q₂), то "q" в виде (p₁q₁) встает после "q₂". Считаем

$$k_{p_2 q_2 p_1 q_1} = \frac{H_{p_2} + H_{q_2} + H_{p_1} + H_{q_1}}{t_{p_2} + t_{q_2} + t_{p_1} + t_{q_1}} \text{ и переходим к шагу 1, учитывая } k_{p_2 q_2 p_1 q_1}$$

вместо k_{p₂}, k_{q₂}, k_{p₁} и k_{q₁}. (Теорема 4.)

11. Если элемент "q" уже был задействован ранее в качестве "q₁" пары (p₁q₁) и элемент "p" уже был задействован ранее в качестве "p₂" пары (p₂q₂), то оптимальной перестановкой может быть:

$$\text{если } k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} - k_{\alpha(p_1)} \leq \frac{(k_{\alpha(q_1)} - k_{\alpha(q_2)}) t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2}) t_{p_1}} \text{ и } k_{\alpha(p_1)} \geq k_{\alpha(p_2)}, \text{ то}$$

$$(\dots, \alpha(p_1), \alpha(p_2), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots),$$

$$\text{если } k_{\alpha(p_2), \alpha(q_2)} - k_{\alpha(p_1)} \leq \frac{(k_{\alpha(q_1)} - k_{\alpha(q_2)}) t_{q_2} t_{q_1}}{(t_{p_2} + t_{q_2}) t_{p_1}} \text{ и } k_{\alpha(p_1)} < k_{\alpha(p_2)}, \text{ тогда}$$

$$(\dots, \alpha(p_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \alpha(q_2), \dots),$$

$$\text{иначе } (\dots, \alpha(p_2), \alpha(q_2), \alpha(p_1), \alpha(q_1), \dots). \text{ Считаем}$$

$$k_{p_2 q_2 p_1 q_1} = \frac{H_{p_2} + H_{q_2} + H_{p_1} + H_{q_1}}{t_{p_2} + t_{q_2} + t_{p_1} + t_{q_1}} \text{ и переходим к шагу 1, учитывая } k_{p_2 q_2 p_1 q_1}$$

вместо k_{p₂}, k_{q₂}, k_{p₁} и k_{q₁}. (Теорема 5.)

12. Выход.

Заключение

В данной статье предложен алгоритм, который не ограничен количеством объектов, в отличие от метода динамического программирования. Данный алгоритм определяет оптимальную очередность при наличии условий предшествования.

Литература

1. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / А.Г. Ченцов. – Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика». – 2008. – 240 с.
2. Балушкин Ф.А. Об одном варианте задачи коммивояжера / Ф.А. Балушкин, А.Н. Сесекин, Ю.А. Фрейберг, А.Г. Ченцов // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2009. – №12. – С. 40-45.
3. Балушкин Ф.А. Использование метода динамического программирования для оптимизации демонтажа оборудования энергоблоков АЭС, выводимых из эксплуатации, с целью минимизации облучения / Ф.А. Балушкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, И.Б. Чеблоков, С.Е. Щеклеин, А.Г. Ченцов // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2009. – №4. – С. 3-10.
4. Балушкин Ф.А. Задача минимизации дозы облучения персонала при разборке отработавших блоков АЭС / Ф.А. Балушкин // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции, 26-30 января 2009 г. – 2009. – С. 276-279.
5. Сесекин А.Н. Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий / А.Н. Сесекин, А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 2. – С. 68-77.
6. Балушкин Ф.А. Об одной задаче о назначениях, возникающей в атомной энергетике / Ф.А. Балушкин // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – Улан-Удэ, 2010. – Вып. 9. С. 94-100.

Балушкин Филипп Андреевич – аспирант Уральского федерального университета имени первого Президента РФ Б.Н. Ельцина, E-mail: f.a.bal@e1.ru

Balushkin Filipp Andreevich – Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin.

УДК 517.977

© В.И. Гурман

ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ С РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

В статье рассматривается возможность эффективного решения вырожденных задач с помощью семейства функций Кротова на основе достаточных условий с разрешающей системой как альтернатива методу кратных максимумов при исследовании магистральных решений в задачах с линейным ограниченным управлением. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: оптимальное управление, вырожденная задача, магистральное решение, разрешающая система, семейство уравнений Беллмана.

V.I. Gurman

APPLICATION OF OPTIMALITY CONDITIONS WITH RESOLVING SYSTEM PROBLEM FOR THE INVESTIGATION OF DEGENERATE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

It is considered the possibility of effective solving degenerate optimal control problems with the help of Krotov functions family on the base of sufficient conditions with resolving system as an alternative to known multiple maxima method when investigating the turnpike solutions in the problems with bounded linear control. An illustrative example is given.

Keywords: optimal control, degenerate problem turnpike solution, resolving system, Bellman equations family, multiple maxima method.

Введение

Для решения вырожденных задач оптимального управления, характерных для систем с линейными управлениями, в [1] разработаны специальные взаимосвязанные методы преобразований к регулярным задачам меньшего порядка (сингулярных расширений) и метод кратных максимумов (МКМ) задания функции Кротова в одноименных достаточных условиях оптимальности. Для систем с ограниченными линейными управлениями принципиально применим известный метод Беллмана, но соответствующее уравнение становится нерегулярным, с негладким описанием, в то время как МКМ приводит к системе регулярных уравнений в частных производных. Однако с появлением более общих достаточных условий [2], где вместо разрешающей функции Кротова используется разрешающая система, появились новые возможности эффективного решения вырожденных задач, альтернативные методу кратных максимумов. В статье рассматривается такая возможность при исследовании магистральных

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00170-а).

решений, характерных для вырожденных задач с линейным ограниченным управлением.

1. Достаточные условия оптимальности с разрешающей системой

Рассматривается общая задача оптимального управления для непрерывных систем как задача о минимуме функционала $I(m)$ на D :

$$\begin{aligned} D = \{m = x(t), u(t) : \dot{x} &= f(t, x, u), \quad t \in T = [t_1, t_F], \\ (x, u) \in B(t) \subset R^{n+p}, \quad (t_1, x(t_1), t_F, x(t_F)) &\in \Gamma \subset R^{n+p}\} \\ I &= F(t_1, x(t_1), t_F, x(t_F)). \end{aligned}$$

Вводится семейство гладких функций $\varphi_\alpha(t, x)$, $\alpha \in A$, и функционал над этим семейством

$$\begin{aligned} \omega: Z \rightarrow R, \quad Z = \{r: A \rightarrow R\}, \quad \omega(0) &= 0, \\ r(\alpha) \leq 0 &\Rightarrow \omega(r(\alpha)) \leq 0. \end{aligned}$$

Класс таких функционалов обозначим Ω . Строятся конструкции

$$\begin{aligned} R_\alpha(t, x, u) &= \varphi_{\alpha x}^T(t, x) f(t, x, u) + \varphi_{\alpha t}(t, x), \\ G(\gamma) &= F(\gamma) + \omega(\varphi_\alpha(\vartheta, \chi) - \varphi_\alpha(\tau, \xi)), \\ \gamma &= (\tau, \xi, \vartheta, \chi), \quad \tau, \vartheta \in R, \quad \xi, \chi \in R^n. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть имеются последовательность $\{m_s\} \subset D$ и система (ω, φ_α) такие, что

$$\begin{aligned} 1) \quad \sup_{(x, u) \in B(t)} R_\alpha(t, x, u) &= 0, \quad \alpha \in A; \\ 2) \quad \omega\left(\int_{T_s} R_\alpha(t, x_s(t), u_s(t)) dt\right) &\rightarrow 0; \\ 3) \quad G(t_1, x(t_1), t_F, x(t_F))_s &\rightarrow l, \\ l &= \inf\{G(\gamma) : \gamma \in \Gamma \cap \{\gamma : \xi \in X(\tau), x \in X(\vartheta)\}\}. \end{aligned}$$

Тогда $\{m_s\}$ – минимизирующая, и любая минимизирующая последовательность удовлетворяет условиям 2), 3).

2. Приложение к исследованию магистральных решений вырожденных задач

Рассмотрим характерный класс вырожденных задач

$$\dot{x} = g(t, x) + h(t, x)u, \quad t \in T = [t_1, t_F], \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad x(t_1) = x_1, \\ I = F(x(t_F)) \rightarrow \inf.$$

Ограничения на u легко приводятся к виду $|u| \leq b$.

Соотношения Беллмана для этой задачи

$$\varphi_t + |\varphi_x^T h(t, x)|b = 0, \quad \varphi(t_F, x) = -F(x)$$

имеют особенность при $\varphi_x^T h(t, x) = 0$ и не разрешаются непосредственно. Будем искать разрешающую систему (φ_α, ω) в виде

$$\varphi_{1,2}, \quad \omega(r(\alpha)) = \omega(r_1, r_2) = \max(r_1, r_2),$$

где $\varphi_{1,2}$ – решения линейных задач

$$\varphi_t \pm \varphi_x^T \delta(t, x)b = 0, \quad \varphi_{1,2}(t_F, x) = -F(x).$$

Функция G не зависит от χ , т.е. имеет минимум по χ всюду:

$$G = -x^1 + \max_{\alpha} (\varphi_F - \varphi_{1\alpha}) = \begin{cases} -\varphi_{11}, & \varphi_{11} - \varphi_{12} \leq 0 \\ -\varphi_{12}, & \varphi_{11} - \varphi_{12} \geq 0 \end{cases}, \\ u = b \operatorname{sign}(\varphi_x^T h(t, x)), \quad i = 1, 2.$$

Пример.

$$x^1 = (x^2)^2, \quad \dot{x}^2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, 2], \quad x(0) = \xi, \quad I = x^1(2).$$

Здесь $g = ((x^2)^2, 0)$, $h = (0, 1)$ функции $\varphi_{1,2}$ легко находятся:

$$\varphi_{1,2} = -x^1 \pm \frac{1}{3}(x^2)^3 \pm \frac{1}{3}(x^2 \pm t - (\pm 2))^3. \\ u = \operatorname{sign} \varphi_{ix^2}, \quad i = 1, 2, \quad \varphi_{11} - \varphi_{12} = 2/3\xi^2.$$

Таким образом, данным условиям удовлетворяют следующие режимы:

$$u = \begin{cases} -1, & t \in [0, \xi^2], \\ 0, & t \in (\xi^2, 2], \end{cases} \quad u = \begin{cases} 1, & t \in [0, -\xi^2], \\ 0, & t \in (-\xi^2, 2] \end{cases}$$

при $\xi^2 > 0$ и при $\xi^2 < 0$ соответственно.

Заключение

Рассмотренный здесь новый подход к исследованию магистральных решений, характерных для вырожденных задач, приводит, в отличие от традиционного, но нерегулярного уравнения Беллмана, к комбинации из решений семейства регулярных уравнений в частных производных типа Беллмана. В случае единственного скалярного линейного управления (характерного, например, для квантовых управляемых систем [3, 4]) указанное семейство состоит из двух линейных уравнений с одним и тем же начальным условием. Для их решения эффективен, в частности, метод характеристик.

Литература

1. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления / В.И. Гурман. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
2. Гурман В.И. Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений / В.И. Гурман // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3. – С. 61-71.
3. Кротов В.Ф. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами / В.Ф. Кротов, А.В. Булатов, О.В. Батурина // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 64–78.
4. Caneva T. Optimal control at the quantum speed limit / T. Caneva, M. Murphy, T. Calarco, R. Fazio, S. Montangero, V. Giovannetti, G.E. Santoro // Physical Review Lett. 103, 240501 (2009). URL:<http://arxiv.org/abs/0902.4193v2>.

Гурман Владимир Иосифович – главный научный сотрудник Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, тел. (48535)98053. E-mail: head@head.botik.ru

Gurman Vladimir Iosiphovitch – principal researcher of Ailamazyan Program Systems Institute of RAS tel. +7 (48535)98053. E-mail: head@head.botik.ru

© В.И. Гурман, Д.Ц. Будаева

ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ МОДЕЛИ РЕГИОНА*

В статье предлагается методический подход к решению междисциплинарных информационно-статистических проблем устойчивого развития на основе концептуальной социо-эколого-экономической модели с учетом реального опыта моделирования регионов.

Ключевые слова: информационное обеспечение, устойчивое развитие, моделирование, социо-эколого-экономическая модель.

V.I. Gurman, D.Ts. Budaeva

PROBLEMS OF REGION MODEL INFORMATIONAL PROVISION

The article presents a methodical approach to the interdisciplinary information and statistical problems of sustainable development solution, based on the conceptual socio-ecological-economic model in view of the experience of regions modeling.

Keywords: information security, sustainable development, modeling, socio-ecological-economic model.

Введение

В данной работе анализируются с использованием собственного опыта моделирования регионов [1-4] информационные аспекты проблемы, связанные с острым дефицитом в официальной статистике систематических данных о взаимодействии подсистем единой социо-эколого-экономической системы.

Чтобы оценить масштаб данной проблемы, обратимся к одному из результатов качественного анализа концептуальной модели [4] – критерию осуществимости режима устойчивого развития (как обобщение критерия традиционной экономической рентабельности отраслей), куда входят матрицы (массивы) прямых производственных затрат, воздействий отраслей на компоненты природной среды социума и затрат на природо-социовосстановление. Без этих «междисциплинарных» массивов невозможно практически оценить количественно состояние социо-эколого-экономической системы (страны, региона) и реально ею управлять по принципам устойчивого развития, что в подавляющем большинстве отсутствуют в официальной статистике. В особенности остро ощущается дефицит данных, необходимых для отражения инновационных процессов как важнейшего фактора устойчивого развития.

На рис. 1 представлено схематически информационное отображение одной из последних версий социо-эколого-экономической модели [5, 6] .

* Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект № 11-02-00171а), РФФИ (проект № 10-06-00081а)

	Экономика	Природа	Социум	Управление	
Э	ЭЭ	ЭП	ЭС	ЭУ	Э
П	ПЭ	ПП	ПС	ПУ	П
С	СЭ	СП	СС	СУ	С
И	И н н о в а ц и и			ИУ	И
Текущее состояние					Будущее состояние

Рис. 1. Социо-эколого-экономическая модель

На этой схеме выделены основные системные блоки: ПРИРОДА, ЭКОНОМИКА, СОЦИУМ и ИННОВАЦИИ. Однобуквенные блоки слева обозначают необходимые массивы информации о текущем состоянии отдельных подсистем, на которые происходит воздействие, социальной (С), экономической (Э), природной (П), и о состоянии общего научно-технического прогресса (И), сверху добавляется информация об управляющих воздействиях (У), справа – прогнозная информация о будущем состоянии. Двухбуквенные блоки должны содержать информацию о внутренних взаимодействиях в подсистемах и о взаимодействиях подсистем между собой и с управляющим блоком. Информация о воздействии инновационной подсистемы на остальные подсистемы должна содержаться во всех двухбуквенных массивах. Выделены 22 блока (из 24), сравнительно хорошо обеспеченные статистическими данными. Этого явно недостаточно. Недостающую информацию (главным образом по взаимодействиям компонент) необходимо формировать заново. При этом она должна быть выражена в согласованных терминах, понятиях и единицах.

С другой стороны, при выполнении этих жестких требований мы получим значительную свободу в создании механизмов управления на разных уровнях и тем самым в решении собственно проблем устойчивого развития.

Модель, описанную в [4], можно рассматривать и как четкую схему формирования необходимой информации, и как инструмент эффективно ее использования на основе многовариантного анализа, в частности для поиска оптимальных стратегий устойчивого развития. Имеющийся опыт приложений ее предшествующих версий [1-4] подсказывает следующие необходимые шаги по реализации данного подхода:

1) разработать иерархический набор показателей состояния подсистемы окружающей среды и природных ресурсов и аналогичный набор для социальной подсистемы;

2) разработать методики формирования таблиц параметров концептуальной модели, исходя из их содержательного смысла с использованием разнообразных документальных источников, целенаправленных эмпирических исследований и экспертных оценок;

3) реализовать разработанные методики и обеспечить хранение, поддержание и обновление полученных данных.

Уникальность рассматриваемых объектов – регионов различного масштаба исключает возможность получения данных с помощью таких «естественных» процедур, как наблюдение в различных ситуациях или специально организованные эксперименты, обеспечивающие необходимое разнообразие ситуаций. Единственно приемлемый путь здесь – это декомпозировать модель – объект на отдельные взаимодействующие элементы (операторы), не являющиеся уникальными. Тогда появится возможность проводить над ними необходимые эксперименты в тех условиях, которые соответствуют условиям их взаимодействия в системе.

«Эксперимент» здесь следует понимать достаточно широко: это любая процедура, позволяющая восстановить искомым оператор: реальный эксперимент, анализ литературных данных, экспертные оценки и т.п. Такую процедуру, содержащую, по существу, требования к данным, позволяющим восстановить искомым оператор, будем называть **абстрактным экспериментом**.

Наиболее простым представляется абстрактный эксперимент, построенный путем аппроксимации искомого оператора линейной структурой, важнейшим свойством которой является минимальная потребность в информации по сравнению с более сложными представлениями.

Пусть объект описывается на заданном отрезке времени приближенно линейным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Q(x - x_*), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (1)$$

где x – вектор, x_* – его заданное (опорное) значение Q – $(n \times n)$ – матрица.

Цель эксперимента – определение элементов матрицы Q . Диагональные элементы матрицы Q определяются по формуле

$$q_{ii} = \frac{1}{t_F - t_I} \ln \left| \frac{x_{iF} - x_{i*}}{x_{iI} - R_{i*i}} \right|, \quad (2)$$

поэтому для проведения однокомпонентного абстрактного эксперимента требуется:

- задать (определить) продолжительность эксперимента – время t_F ;

- задать (измерить) начальное состояние $x_i(0)$;
- определить невозмущенные значения x_{i*}, x_{j*} ;
- обеспечить поддержание всех других компонентов $x_j, i \neq j$, в состоянии x_{j*} в течение времени t_F . Затем определяются внедиагональные элементы матрицы Q по формуле

$$q_{ij} = \frac{x_{iF} - x_{i*} - (x_{iI} - x_{i*})e^{q_{ii}(t_F - t_I)}}{(\bar{x}_j - x_{j*})(e^{q_{ii}(t_F - t_I)} - 1)} q_{ii}. \quad (3)$$

Многокомпонентный эксперимент представляет собой процедуру по определению матрицы Q в целом в соответствии с известной формулой

$$Q = (t_F - t_I)^{-1} \ln(X(t_I) - X_*)^{-1} (X(t_F) - X_*),$$

где X – квадратная матрица, составленная из векторов x как столбцов, при этом векторы $x(t_I)$ задаются как линейно независимые. Проводится серия из n экспериментов над объектом в целом при различных линейно независимых $x(t_I)$ продолжительностью $t_F - t_I$ и наблюдаются соответствующие значения векторов $x(t_F)$.

Аналогично могут быть построены абстрактные эксперименты для моделей, учитывающих внешние воздействия u , включая управляющие:

$$\dot{x} = Q(x - x_*) + R(u - u_*), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_k),$$

где $R - (n \times k)$ – матрица.

С учетом этих соображений, используемые в [1-5] версии региональной модели как нелинейной в целом динамической системы представлены в квазилинейной форме, аналогичной общепринятой форме для модели динамического межотраслевого баланса:

$$\dot{x} = Q(x, u)(x - x_*) + R(x, u)(u - u_*).$$

Их полная линеаризация получается «объявлением» функций $Q(x, u)$ и $R(x, u)$ константами в определенных областях пространства состояний-воздействий. В целом такой подход можно рассматривать как последовательную кусочно-линейную аппроксимацию нелинейной модели, которую можно использовать, «встраивая» ее в итерационную схему улучшения управленческих решений.

Как показывает имеющийся опыт, невозможно желаемые методики (процедуры) дать во всех деталях априори. В этих условиях работа предметных специалистов по идентификации представляется как творческий процесс, направляемый абстрактными экспериментами как целеполагаю-

щами установками и включающий самые разнообразные подходы. Важную роль должны играть социологические опросы и экспертные процедуры. В этих случаях абстрактный эксперимент интерпретируется как содержательный вопрос респондентам.

Как показывает опыт [2, 3], подобная работа лучше всего выполняется скоординированным междисциплинарным коллективом, состоящим из предметных специалистов и математиков. Последним отводится роль супервизоров и интерпретаторов, входящих в уравнения величин. Остальные специализированные группы получают задания по нахождению параметров и всех необходимых величин, в том числе междисциплинарного характера, которые при распределении заданий номинально отнесены к их компетенции.

Представляется перспективным с точки зрения информационного обеспечения разрабатываемый многоуровневый программно-информационный комплекс (рис. 2), поскольку на нижнем уровне находятся модели в основном монодисциплинарные, сравнительно хорошо обеспеченные информацией, которую можно трансформировать по определенным правилам агрегирования в информацию следующих уровней, в том числе уровня социо-эколого-экономической модели.

Система регионального моделирования



Рис.2. Программно-информационный комплекс

Представленные выше схемы абстрактного эксперимента дают основу для разработки конкретных содержательных методик. Методики, относящиеся к социо-экологическим блокам и подверженные влиянию инноваций, могут ориентироваться на сравнительный анализ различных регионов с различными ожидаемыми значениями указанных соответствующих

индексов, их подсчета на основе серий выборочных измерений, социопсихологического анкетирования и т.п.

Заключение

Таким образом, рассматриваемый подход, основанный на использовании концептуальной модели, предполагает формирование большого количества данных междисциплинарной природы, что требует организации взаимодействия разнородных предметных специалистов. Междисциплинарное исследование в этом отношении должно больше напоминать работу над проектом, роль которого как раз и должна выполнять концептуальная математическая модель.

Литература

1. Модели управления природными ресурсами / под ред. Гурмана В.И. – М.: Наука, 1981.
2. Гурман В.И. Эколого-экономические системы: модели, информация, эксперимент / В.И. Гурман, В.А. Дыхта, Н.Ф. Кашина и др. – Новосибирск: Наука, 1987.
3. Викулов В.Е. Эколого-экономическая стратегия развития региона: математическое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона / В.Е. Викулов, В.И. Гурман, Е.В. Данилина и др. – Новосибирск: Наука, 1990.
4. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / под ред. Гурмана В.И., Рюминой Е.В. – М.: Наука, 2001.
5. Гурман В.И. Эволюция и перспективы моделей регионального развития / В.И. Гурман / Математическое моделирование развивающейся экономики: II Всероссийская научная конференция с молодежной школой, посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Моисеева (ЭКОМОД-2007) // сб. тр. – Киров: Изд-во ВятГУ, 2007.
6. Handbook of National Accounting // UN, ES, IMF, OECD, World Bank; Series F, № 61, Rev. 1 (ST/ESA/STA/SER. F/61/Rev. 1), 2003 (Final Draft, 2004).
7. Гурман В.И. Многоуровневый комплекс социо-эколого-экономических моделей для исследования устойчивого развития региона / В.И. Гурман, Д.Е. Урбанович // Моделирование устойчивого регионального развития: материалы II Междунар. конф. – 2007. – Т.1.

Гурман Владимир Иосифович – д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета; 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: vig70@mail.ru

Будаева Должит Цырендондовна – канд. экон. наук, доцент Бурятской государственной сельскохозяйственной академии им. В.Р. Филиппова; 670024, г. Улан-Удэ, ул. Пушкина, 8, e-mail: dolgit2006@yandex.ru

Gurman Vladimir Iosifovich – doctor of Engineering, professor of applied mathematics department of Buryat State University; 670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24a, e-mail: vig70@mail.ru

Budaeva Dolzhit Tsyrendondokovna – candidate of Economy, associate professor of V.R. Fillippov Buryat State Agricultural Academy; 670024, Ulan-Ude, Pushkin str., 8, e-mail: dolgit2006@yandex.ru

© Г.С. Малтугуева, А.Ю. Юрин

МЕТОД ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В МАЛЫХ ГРУППАХ

Рассматривается задача принятия компромиссных решений в малых группах. Предлагается принцип согласования и основанный на нем метод (М-метод), обеспечивающие разрешение парадоксов Кондорсе и Борда. Приведен пример применения предлагаемого метода, описаны его свойства и осуществлено сравнение с другими методами группового выбора.

Ключевые слова: групповой выбор, малые группы, компромиссное решение, принцип согласования.

G.S. Maltugueva, A.Y. Yurin

METHOD OF DECISION-MAKING IN SMALL GROUPS

The problem of decision-making in small groups is considered. The aggregation principle and the new method (M-method) are proposed, the method provides solution of the Condorcet and Borda paradoxes. An example of application of M-method, description of M-method's properties and its comparison with other methods of a group decision-making are presented.

Keywords: group decision-making, small groups, method, compromise decision, aggregation principle.

Введение. В процессе деятельности малых групп [1] (комиссий, комитетов) возникает необходимость принятия решения, в частности голосования. При этом решение должно отражать мнения всех членов группы, т.е. агрегировать их индивидуальные предпочтения и быть компромиссным. В ряде случаев [2-4] недостаточно выделить лучший вариант решения проблемы, но требуется упорядочить все возможные варианты в порядке убывания их предпочтительности.

При определенных профилях индивидуальных предпочтений (совкупности мнений участников выбора) известные методы формирования отношения группового предпочтения не обеспечивают получения решения или полученное решение противоречит мнению некоторых членов группы (коллектива) [2, 4, 5]. В связи с этим разработка новых методов формирования отношения группового предпочтения является одной из актуальных проблем в области группового принятия решений и голосования [1, 6]. В работе предлагается метод формирования компромиссного решения, разрешающего такие парадоксы голосования, как парадокс Кондорсе и парадокс Борда.

Постановка задачи группового (коллективного) выбора. Обозначим через A – множество альтернатив с числом элементов n : $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, индивидуальные предпочтения участников выбора:

$R^{(j)}$, $j = \overline{1, m}$ заданы качественно – набором бинарных отношений нестрогого предпочтения $Q^j : A_i Q^j A_k : A_i \succ A_k$ или $A_i \approx A_k$, где \succ, \approx – отношения строгого предпочтения и эквивалентности соответственно, т.е. $Q^j = \{\succ, \approx\}$. Информация об индивидуальном предпочтении каждого члена группы представляется в форме обобщенной ранжировки с указанием равноценности $R^{(j)} = A_{i_1} Q_1^j A_{i_2} Q_2^j A_{i_3} Q_3^j \dots Q_{n-1}^j A_{i_n}$, где $Q^j = \{\succ, \approx\}$ $\forall \alpha = \overline{1, n-1}$. Совокупность индивидуальных предпочтений всех членов группы образует профиль индивидуальных предпочтений, который представляет собой m -мерный кортеж ранжировок: $R = (R^{(1)}, \dots, R^{(m)})$.

Способ обработки индивидуальных предпочтений представляет собой оператор, который отображает пару $\langle A, R \rangle$ на отношение группового (коллективного) предпочтения $R_{agg} = F(R^{(1)}, \dots, R^{(m)}) : \langle A, R \rangle \rightarrow R_{agg}$, где законы отображения представляют собой методы формирования отношения группового предпочтения [4, 7].

Принцип согласования и метод решения задачи группового выбора. В основе каждого метода формирования отношения группового предпочтения лежит принцип – некое правило или набор правил, согласно которому происходит определение лучшей альтернативы (порядка предпочтительности альтернатив).

В [8] было предложено использовать в качестве принципа согласования «способ сужения множества Парето, основанный на усилении отношения предпочтения [9]». Данный принцип позволил [8]: «представить задачу группового выбора как игру, в которой каждая из альтернатив (кандидат) приводит сначала наиболее убежденных своих сторонников, затем менее убежденных и т.д., причем на каждое такое предъявление противники должны стараться, как минимум, адекватно ответить. Альтернатива, постоянно уступающая в таком поединке, выбывает. При этом в зависимости от ситуации она либо усиливает позиции победившей ее альтернативы и/или помогает остальным альтернативам в борьбе с ней». Формализованная идея принципа программно реализована [8,10]. При решении тестовых примеров из [2] принцип оказался менее эффективен, чем принцип Кондорсе: в ряде примеров отношение группового предпочтения не было получено, в то время как принцип Кондорсе позволял его получить. В связи с этим был сделан вывод о необходимости модификации принципа для обеспечения возможности решения данных примеров и разрешения парадоксов Кондорсе и Борда.

Модификация принципа согласования. Модификация вышеизложенного принципа согласования состоит в следующем:

1. Представление принципа согласования в виде процедуры попарного сравнения несовпадающих альтернатив. При этом каждой альтернативе ставится в соответствие n -мерный вектор $A_i \leftrightarrow (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, где a_i – количество участников выбора, расположивших рассматриваемую альтернативу A_i на j -е место в ранжировке ($i, j = \overline{1, n}$), n – число альтернатив. Тогда процедура сравнения представляет собой покоординатное (покомпонентное) сравнение векторов $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ и $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, характеризующих несовпадающие альтернативы. Если по всем координатам (компонентам), кроме последней A_i не хуже A_j , и значение последней координаты (компоненты вектора) A_i строго меньше значения соответствующей координаты вектора A_j , то A_i доминирует A_j ($A_i \succ A_j$). Худшие (доминируемые) альтернативы исключаются из дальнейшего рассмотрения, из них формируется множество доминируемых альтернатив L .

В ходе применения принципа все альтернативы делятся на три множества:

- множество доминируемых (худших) альтернатив (L):

$$A_j \in L \Leftrightarrow a_{il} \geq a_{jl} \text{ и } a_{in} < a_{jn} \quad \forall l = \overline{1, n-1} \quad \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n} : i \neq j$$

(альтернатива A_i предпочтительнее альтернативы A_j).

- множество эквивалентных (равноценных) альтернатив (Eq):

$$A_i \approx A_j : A_i, A_j \in Eq \Leftrightarrow a_{il} = a_{jl} \quad \forall l = \overline{1, n}$$

(альтернативы A_i и A_j эквивалентны или равноценны).

- множество несравнимых альтернатив (In) содержит альтернативы, не принадлежащие ни множеству доминируемых, ни множеству эквивалентных альтернатив.

2. Дополнение принципа согласования правилами сохранения преимущества, которые позволяют учитывать преимущество одной альтернативы над другой. Правила позволяют переносить превышение (разницу) значения координаты вектора, описывающего альтернативу, на следующую координату. Т.е. если

- $a_{ik} > a_{jk} \quad \forall k = \overline{1, n-2}$, то $a_{i,k+1} = a_{i,k+1} + (a_{ik} - a_{jk} - 1)$;

- если $a_{i,n-1} > a_{j,n-1}$, то $a_{jn} = a_{jn} + (a_{i,n-1} - a_{j,n-1} - 1)$.

Полученный модифицированный принцип согласования индивидуальных предпочтений отличается от известных учетом всех (не только первой) позиций альтернативы в индивидуальных предпочтениях и наличием правил сохранения преимущества.

М-метод. На основе модифицированного принципа согласования индивидуальных предпочтений разработан метод формирования отношения

группового (коллективного) предпочтения – М-метод. Опишем его в виде последовательности шагов (алгоритма):

Шаг 0. Пусть t – номер итерации, $t = 1$.

Шаг 1. Построение матрицы ранжировок S и матрицы эквивалентности D по исходным данным (индивидуальным предпочтениям):

$S = (s_{ij})$ $i = \overline{1, n+1}$, $j = \overline{1, k}$, $k \leq m$, где n – число альтернатив, m – число участников выбора (экспертов), $(s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in})$ – ранжировка i -го эксперта (Pr_i), $s_{i, n+1}$ – количество ранжировок такого вида:

$$D = (d_{ij}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} g - \text{номер группы эквивалентности для} \\ j\text{-го эксперта, в которую входит } A_i; \\ 0 - \text{если } A_i \text{ не входит ни в одну группу} \\ \text{эквивалентности.} \end{cases}$$

$$S^t = S, D^t = D.$$

Шаг 2. Формирование матрицы приведенных номеров E^t на основании матриц S^t и D^t , где e_{ij}^t – порядковый номер альтернативы A_i в ранжировке Pr_j .

Шаг 3. Построение квадратной матрицы сравнения C^t по матрице E^t , где c_{ij}^t – количество экспертов, поставивших альтернативу A_i на j -е место.

Шаг 4. Анализ матрицы C^t : если в матрице все элементы равны, то переход на шаг 0 с рекомендацией изменения исходных данных: множества альтернатив или ранжировок путем их увеличения или сокращения.

Шаг 5. Применение нового принципа согласования для расширения множества доминируемых альтернатив L^t новыми худшими альтернативами с помощью нового принципа согласования: $A_i \in L^t \Leftrightarrow a_{ij}^t \leq a_{i+1, j}^t$ и $a_{in}^t > a_{i+1, n}^t \cdot \forall i = \overline{1, n-1} \forall j = \overline{1, n}$.

Шаг 6. Анализ множества доминируемых альтернатив L^t : если $|L^t| = n - 1$, то переход на шаг 10, т.к. решение найдено; если $L^t = L^{t-1}$, то переход на шаг 9, т.к. невозможно расширить множество доминируемых альтернатив с помощью нового принципа согласования и необходимо применить к оставшемуся множеству альтернатив другие принципы согласования.

Шаг 7. Удаление из индивидуальных предпочтений (ранжировок) альтернатив, входящих в L^t .

Шаг 8. $t = t + 1$, переход на шаг 1.

Шаг 9. Применение на множестве оставшихся альтернатив методов: Нансона, Кумбса, Фишберна [4] с последующим переходом на шаг 10.

Шаг 10. Окончание работы: отображение результатов.

Пример применения М-метода. Рассмотрим работу алгоритма на примере профиля индивидуальных предпочтений, приводящего к возникновению парадокса Кондорсе [11]. Пусть задано 3 альтернативы $A = (a, b, c)$, профиль индивидуальных предпочтений представлен в таблице 1.

Таблица 1

Исходный профиль индивидуальных предпочтений

Индивидуальные предпочтения	Количество голосующих
$a \rightarrow b \rightarrow c$	8
$b \rightarrow c \rightarrow a$	7
$c \rightarrow a \rightarrow b$	6

Необходимо построить отношение группового предпочтения.

Решение:

Итерация 1:

$$t = 1; \text{ матрица ранжировок } S^1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 8 \\ b & c & a & 7 \\ c & a & b & 6 \end{array} \right);$$

в данном случае все альтернативы строго упорядочены, поэтому матрица эквивалентности является нулевой, опустим ее из рассмотрения;

$$\text{матрица приведенных номеров } E^1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right);$$

$$\text{матрица сравнения } C^1 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix}.$$

В результате сравнения альтернатив $a = (8, 7, 6)$ и $c = (7, 6, 8)$ получаем: a доминирует c ($a \succ c \Rightarrow c \in L^1$).

После удаления альтернативы c из индивидуальных предпочтений получим профиль, представленный в таблице 2.

Таблица 2
Измененный профиль индивидуальных предпочтений

Индивидуальные предпочтения	Количество голосующих
$a \rightarrow b$	8
$b \rightarrow a$	7
$a \rightarrow b$	6

Итерация 2:

$$t = 2, S^2 = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 8 \\ b & a & 7 \\ a & b & 6 \end{array} \right), E^2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{array} \right), C^2 = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a) \\ (b) \end{pmatrix}.$$

Результат сравнения: $a \succ b \Rightarrow b \in L^2 : L^2 = L^1 \cup \{b\}$.

Окончательный результат (отношение группового предпочтения):

$$a \rightarrow b \rightarrow c$$

Принцип Кондорсе в данном примере приводит к получению нетранзитивного отношения группового предпочтения: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. Результат применения метода Борда не однозначен: $a \approx b \rightarrow c$. Решение, полученное с помощью М-метода, транзитивно и однозначно (строго упорядочено).

Свойства М-метода и его сравнение с другими. В качестве основных свойств методов формирования отношения группового предпочтения выделяют [11] следующие:

1. Единогласие – если альтернатива A_i лучше альтернативы A_j для всех членов коллектива, то A_j не может стать лучшей альтернативой в групповом предпочтении. Выполняется для М-метода, т.к. значение текущей координаты, кроме последней, вектора-характеристики альтернативы A_i больше (как минимум, на 1), чем соответствующая координата вектора-характеристики альтернативы A_j . Последняя же координата у A_i равняется 0, а у A_j может быть отлична от 0.

2. Анонимность – если 2 участника выбора поменяются индивидуальными предпочтениями, то результат не изменится. Выполняется для М-метода.

3. Нейтральность – если в индивидуальных предпочтениях поменять местами А и В, то соответствующим образом изменится и результат. Выполняется для М-метода.

4. Монотонность – улучшение позиции лучшей альтернативы в индивидуальных предпочтениях не приведет к ее проигрышу. Выполняется для М-метода, т.к. улучшение позиции альтернативы в индивидуальных

предпочтениях увеличивает значения первых координат вектора характеристики, что, в свою очередь, в соответствии с принципом согласования, усиливает степень предпочтительности данной альтернативы в процессе сравнения с другими альтернативами.

5. Учет мнений всех участников коллектива. Выполняется для М-метода.

6. Неманипулируемость – не выполняется ни одним из известных методов (теорема невозможности Эрроу [2-5]).

Результаты сравнения методов и М-метода приведены в таблице 3.

Таблица 3

Сравнительный анализ методов

Название метода	Свойства					Количество свойств
	единогласие	анонимность	нейтральность	монотонность	учет всех мнений	
Мажоритарные правила						
Правило относительного большинства	+	+		+		3
Правило абсолютного большинства	+	+	+	+		4
Методы, состоятельные по Кондорсе						
Метод Кондорсе	+	+	+	+	+	5
Метод Симпсона	+	+		+	+	4
Метод Коупленда		+	+	+	+	4
Методы подсчета очков						
Метод Борда		+	+		+	4
Модификация метода Борда	+	+	+		+	4
Метод антибольшинства		+	+		+	3
Гибридные методы						
Метод Нансона	+	+	+		+	4
Метод Фишберна	+	+	+	+	+	5
Метод Кумбса	+	+	+	+		4
М-метод	+	+	+	+	+	5

На основе результатов сравнения методов можно утверждать:

1. М-метод по своим свойствам близок принципу Кондорсе, но в большей степени ориентирован на поиск компромисса и учет мнений (ин-

дивидуальных предпочтений) всех участников выбора и позволяет разрешить парадокс Кондорсе (получение нетранзитивного отношения предпочтения).

2. Несмотря на превосходство М-метода над некоторыми методами, существуют профили индивидуальных предпочтений (например, равное количество ранжировок, образующих цикл), для которых он не является решающим. В этих случаях предлагается применять М-метод в комплексе с другими гибридными методами.

Заключение. Эффективное принятие решений в малых группах требует применения специализированного математического обеспечения в виде методов построения отношения группового предпочтения.

В данной работе предложен новый принцип согласования индивидуальных предпочтений и построенный с его помощью метод формирования отношения группового предпочтения (М-метод), приведен модельный пример и сравнение с другими методами.

Применение М-метода позволит разрешить ряд парадоксов, в том числе парадокс Кондорсе (получение нетранзитивного отношения предпочтения) и парадокс Борда (проигрыш альтернативы, самой предпочтительной более чем для половины членов группы). Однако существуют профили индивидуальных предпочтений, при которых М-метод не является решающим. В связи с этим предлагается его использовать только в комплексе с другими методами группового выбора.

В случаях профилей индивидуальных предпочтений с равным количеством ранжировок, образующих цикл, решение не может быть найдено ни одним методом. В таких случаях необходимо изменить постановку задачи – сократить или расширить множество альтернатив/ранжировок.

Литература

1. Вольский В.И. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа / В.И. Вольский, З.М. Лезина. – М.: Наука, 1991. – 192 с.
2. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений / О.И. Ларичев. – М.: Логос, 2000. – 296 с.
3. Микони, С.В. Теории и практика рационального выбора / С.В. Микони. – М.: Маршрут, 2004. – 463 с.
4. Петровский А.Б. Теория принятия решений / А.Б. Петровский. – М.: Академия, 2009. – 400 с.
5. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора / Б.Г. Миркин. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
6. Arrow K.J. Handbook of social choice and welfare / K.J. Arrow., A.K. Sen, K.Suzumura. – North Holland: Gulf Professional Publishing, 2002. – 680 p.
7. Малтугуева Г.С. Алгоритм коллективного выбора на основе обобщенных ранжировок для поддержки принятия решений / Г.С. Малтугуева, А.Ю. Юрин // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – №3. – С. 57-62.

8. Малтугуева Г.С. Алгоритм группового выбора при описании индивидуальных предпочтений в виде ранжировок / Г.С. Малтугуева, Ю.В. Котлов // Вестник ТГУ. – №9 (II). – 2004. – С. 44-47.
9. Васильев С.Н. Методы и алгоритмы многокритериальной оптимизации на основе нестрогих ранжировок альтернатив по частным критериям и опыт компьютерной реализации / С.Н. Васильев, Ю.В. Котлов // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 1-2. – С. 28-38
10. Малтугуева Г.С. Программный комплекс для решения задач группового выбора // Вычислительные технологии. – 2008. – Т.13; Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер.: Математика, механика, информатика. – 2008. – №3(58). – С.365-368.
11. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели / Э. Мулен. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

Малтугуева Галина Станиславовна – программист, Институт динамики систем и теории управления СО РАН; 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, +7 (3952) 45-30-19, gama@icc.ru.

Юрин Александр Юрьевич – канд. техн. наук, соиск. науч. степени, Институт динамики систем и теории управления СО РАН; 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, +7 (3952) 45-30-19, +7 (3952) 37-59-36, iskander@icc.ru.

Maltugueva Galina Stanislavovna – programmer, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Irkutsk, Lermontov st., 134, +7 (3952) 45-30-85, gama@icc.ru.

Yurin Alexander Yurievich – candidate of science (Ph.d.), senior researcher, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Irkutsk, Lermontov st., 134, +7 (3952) 45-30-19, iskander@icc.ru.

УДК 517.977

© **И.В. Расина**

МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье дан краткий обзор приближенных методов оптимального управления и идей, лежащих в их основе. Изложение ведется в терминах постановок задач оптимизации и улучшения управления в стандартной форме для непрерывных управляемых систем. Рассмотрены методы первого и второго порядков, а также методы глобального улучшения.

Ключевые слова: оптимизация, оптимальное управление, улучшение, приближенные методы.

I.V. Rasina

METHODS OF IMPROVEMENT CONTROL PROCESSES

The article gives a brief overview of approximate methods of optimal control and the ideas underlying them. Material is presented in terms of optimization and improvement control problems in the standard form for continuous control systems.

The first and second orders methods and methods of global improvement are considered.

Keywords: optimization, optimal control, improvement, approximate methods.

Введение

Практическое использование современной теории оптимального управления ограничено сложностями реализации теоретических соотношений, описывающих искомое решение. Это послужило мотивом для разработки численных методов, позволяющих искать оптимальное решение напрямую, посредством операций улучшения управления, повторяемых в итерационной процедуре. В числе основоположников Р. Курант [1], Д.Е. Охоцимский и Т.Н. Энеева [2, 3], Л.В. Канторович [4], Л.И. Шатровский [5], Дж. Келли [6], в работах которых нашли развитие градиентные методы. Т.к. эти методы широко представлены в научной и учебной литературе, подробно их рассматривать не будем, сославшись, например, на книгу Ф.П. Васильева [7]. Они относятся к категории методов первого порядка, которые, как правило, демонстрируют снижение эффективности по мере приближения к оптимуму, что заставило обратиться к более сложным схемам, в частности к методам второго порядка [8–11].

Цель данной статьи – дать краткий обзор и сравнительный анализ методов улучшения второго порядка, а также нелокальных методов, основанных на достаточных условиях оптимальности Кротова [12], и родственных методов, использующих основы принципа максимума Понтрягина [13] и его обобщений, не затрагивая многих других приближенных методов, составляющих обширную, ставшую самостоятельной, область исследований. С ними можно познакомиться подробно по специальным обзорам. Для краткого ознакомления можно рекомендовать обзор, содержащийся в [14].

Изложение ведется в терминах следующей постановки задачи оптимизации и улучшения управления в стандартной форме для непрерывной системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in T = [t_1, t_F], \quad (1)$$

$$x \in R^n, \quad u \in U(t, x) \subset R^p. \quad (2)$$

Предполагается, что t_1 , $x(t_1) = x_1$, t_F фиксированы. Задан функционал как функция конечного состояния $I = F(x(t_F))$.

Задача оптимизации состоит в поиске последовательности $\{m_s\} \in D$, минимизирующей функционал, где D – множество процессов $m = (x(t), u(t))$, удовлетворяющих (1) и (2). Построение минимизирующей последовательности может вестись через решение задачи улучшения, в которой задан некоторый элемент $m^l \in D$. Требуется найти элемент

$m'' \in D$ на котором I меньше: $I(m'') < I(m')$. Решая эту задачу итерационно, можно построить улучшающую, в частности минимизирующую, последовательность $\{m_s\}$. Задача рассматривается при естественных для практики предположениях: непрерывность функций $f(t, x, u)$, $F(x)$ и многозначного отображения $U(t, x)$, кусочная непрерывность $u(t)$, кусочная гладкость $x(t)$.

1. Методы на основе достаточных условий оптимальности

Идея этих методов состоит в сведении задачи улучшения к задаче приближенной оптимизации в окрестности заданного элемента $m' \in D$ путем аппроксимации функции Кротова и условий Кротова – Беллмана [15] в указанной окрестности. При этом требуется, чтобы улучшенное решение находилось в той же окрестности. Для этого применяется принцип локализации [9, 16], который состоит в следующем.

Вводится вспомогательный функционал:

$$I_\alpha = \alpha I + \frac{1}{2}(1 - \alpha) \left(\int_{t_i}^{t_f} [\beta |\Delta x|^2 + (1 - \beta) |\Delta u|^2] dt + \frac{1}{2} |\Delta x(t_f)|^2 \right),$$

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \Delta x = x - x^l(t), \quad \Delta u = u - u^l(t).$$

В этой конструкции содержатся «штрафы» за отклонение от m' по состоянию и управлению с коэффициентами α и β соответственно. Выбор весовых коэффициентов позволяет регулировать близость соседних приближений. Показано, что минимизация этого функционала при определенном выборе весовых коэффициентов приводит к уменьшению исходного функционала по сравнению с его значением на элементе m' , т.е. к улучшению этого элемента. Если при этом положить $\beta = 1$, то получается сильное улучшение, а при β достаточно малом – слабое улучшение. Соотношения Кротова-Беллмана и их аппроксимации рассматриваются применительно к вспомогательному функционалу.

При применении тейлоровской аппроксимации с точностью до малых второго порядка включительно получают методы улучшения второго порядка со следующими уравнениями:

$$\dot{\psi} = -\mathcal{H}_x^l - \sigma(\mathcal{H}_p^l - H_p^l), \quad \psi(t_f) = -\alpha F_x(x^l(t_f)) - \sigma(1 - \alpha)E, \quad (3)$$

$$\dot{\sigma} = -\mathcal{H}_{xx}^l - \mathcal{H}\sigma_{px}^l + \mathcal{H}_{xp}^l \sigma + \sigma \mathcal{H}_{pp}^l \sigma, \quad \sigma(t_f) = -\alpha F_{xx}(x^l(t_f)), \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(t, x) &= \bar{u}(t, x, (\psi(t) + \sigma(x - x^l(t)))) , \\
 \bar{u}(t, x, p) &= \operatorname{argmax}_{u \in U(t, x)} H(t, x, p, u) , \\
 \mathcal{H}(t, x, p) &= \max_{u \in U(t, x)} H(t, x, p, u) , \\
 H(t, x, p, u) &= p'f(t, x, u) - \frac{1}{2}(1 - \alpha)(\beta |\Delta x|^2 + (1 - \beta) |\Delta u|^2) .
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ψ и σ соответственно градиент и матрица вторых производных функции Кротова по компонентам x на опорной траектории, \mathcal{H}_x^l , \mathcal{H}_p^l , H_p^l , \mathcal{H}_{xx}^l , \mathcal{H}_{px}^l , \mathcal{H}_{pp}^l , F_x , F_{xx} – матрицы первых и вторых производных соответствующих функций по x и p , подсчитанные на траектории $x^l(t)$. Предполагается, что это кусочно-непрерывные функции времени.

Уравнения (3) – (5) пригодны как для сильного, так и для слабого улучшения. Однако при достаточно малом β , соответствующем слабому улучшению, операцию максимума в (5) можно выполнять приближенно, по аналитической формуле максимума вогнутой линейно-квадратической функции, аппроксимирующей зависимость H от u , учитывая малость Δu .

Матричное уравнение Риккати (4) может иметь особую точку внутри отрезка T при $\alpha=1$, что соответствует неоптимальной экстремали Понтрягина. В этом случае предложена специальная процедура улучшения такой экстремали путем сдвига особой точки в начало отрезка за счет изменения α [10, 16].

Если положить $\sigma=0$ в уравнениях (3), (4), то получаются методы первого порядка, отличные от градиентного.

В [10, 17, 18] по тем же принципам построены аналоги этих методов улучшения для дискретных и дискретно-непрерывных процессов и соответствующие итерационные алгоритмы. Предложены также их модификации, ориентированные на высокопроизводительные параллельные вычисления и основанные не на локальной, а на среднеквадратической аппроксимации соотношений Кротова-Беллмана на выбранной сетке узлов [19].

2. Метод нелокального улучшения Кротова

В рамках теории В.Ф. Кротова [11, 20] также был сформулирован подход к нелокальному улучшению на основе достаточных условий оптимальности и улучшения. В них используется обобщенный лагранжиан, который строится с помощью неопределенной функции $\varphi(t, x)$ следующим образом:

$$L = G(x(t_F)) - \int_{t_I}^{t_F} R(t, x, u) dt ,$$

$$R(t, x, u) = \varphi'_x f(t, x, u) + \varphi_t, \quad G(x) = F(x) + \varphi(t_F, x) - \varphi(t_I, x_I) .$$

Функция φ задается так, что функционал L на заданном элементе m^I имеет максимум без учета дифференциальной связи. Тем самым получается бесчисленное множество элементов, уменьшающих L , из которого затем выбирается нужный элемент $m^{II} \in D$. Из этого следует, что $I(x^I(t), u^I(t)) \geq I(x^{II}(t), u^{II}(t))$. Равенство получается, когда m^I – экстремаль Понтрягина.

В работе [11] функция φ выбирается в классе линейно-квадратических $\varphi(t, x) = \psi'(t)x + \frac{1}{2}x'\sigma(t)x$ так, чтобы соответствующие линейно-квадратические аппроксимации функций R и G имели достаточно острые экстремумы. Улучшающее управление находится из условия максимума заданной таким образом функции R , т.е. по формулам метода сильного улучшения (5), но σ получается из линейного матричного уравнения вместо уравнения Риккати в методе сильного улучшения, что несомненно упрощает реализацию, но не дает возможности улучшить неоптимальную экстремаль Понтрягина.

Достаточно простые и эффективные алгоритмы улучшения получаются для класса систем, линейных по состоянию, если выбирать функцию φ также в классе линейных: $\varphi(t, x) = \psi'(t)x$ [20]. Такие алгоритмы успешно применяются в задачах управления квантовыми системами [20, 21].

Другой подход, развиваемый интенсивно в настоящее время [22], состоит в том, чтобы задавать функцию φ из условий

$$R(t, x(t), u^I(t)) = 0, \quad t \in [t_I, t_F], \quad G(x) = -\varphi(t_I, x_I) .$$

т.е. как решение задачи Коши для линейного уравнения в частных производных $\frac{\partial \varphi'}{\partial x}(t, x) f(t, x, u^I(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = 0$, $F(x) + \varphi(t_F, x) = 0$.

Для специальных классов задач, таких, например, как линейные или линейно-квадратические по состоянию, эта задача сводится к задаче Коши для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов функции φ .

3. Связь с другими методами нелокального улучшения

В работе [23] предлагается подход к задаче улучшения, основанный на формулах приращения минимизируемого функционала без остаточных членов. Он приводит к серии методов первого-второго порядка для систем линейных и квадратичных по состоянию. Эти методы обладают свойством нелокального улучшения без варьируемых параметров. Основные уравнения метода второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -H_x(\psi, x(t, u), u(t), t), \\ \dot{\sigma} &= -f'_x(t, u)\sigma - \sigma f_x(t, u) - H_{xx}(\psi, x(t, u), u(t), t), \\ \psi(t_F) &= -F_x(x(t_F, u)), \quad \sigma(t_F) = -F_{xx}(x(t_F, u))\end{aligned}$$

формально совпадают с уравнениями метода Кротова – Фельдмана [11], где линейное матричное уравнение представляет собой вторую сопряженную систему, предложенную в свое время в [24], а улучшающее управление определяется также в результате нелокальной операции (5).

Для нелинейных задач аналогичные процедуры улучшения организуются посредством линеаризации с введением параметров, определяющих наиболее эффективный отрезок нелокального варьирования управления либо шаг локального варьирования на всем временном отрезке.

Непосредственным продолжением работы [23] являются работы [25, 26]. Если в [23] для представления приращения функционала используется векторно-матричная сопряженная система, то в [25] строятся сопряженные системы произвольного, k -го порядка. Это приводит к нелокальному методу улучшения полиномиальных по состоянию функционалов без настроечных параметров. Для нелинейных систем общего вида такие параметры, как и в [23], необходимы.

Заключение

Во всех рассмотренных методах эффективное улучшение некоторого заданного процесса достигается за счет аппроксимации точного представления изменения функционала в окрестности этого процесса упрощенной моделью, допускающей достаточно простые, в частности аналитические, решения. Различные реализации этой идеи приводят естественно к различным методам улучшения и их модификациям со своими преимуществами и недостатками. Достоинством методов нелокального улучшения является отсутствие настроечных параметров для достаточно широкого класса задач (линейных, линейно-квадратических, линейно-полиномиальных по состоянию) ценой использования специальных сопряженных систем той или иной сложно-

сти. Линейное уравнение в частных производных в глобальном методе Кротова можно рассматривать как «предельный случай» такой сопряженной системы, обеспечивающей нелокальное улучшение без настроек управления произвольной нелинейной системой. В качестве недостатка можно отметить отсутствие в общем случае гарантии сходимости хотя бы к локальному минимуму. В этом отношении преимущество имеют как раз методы, основанные на аппроксимации уравнения Беллмана, гарантирующие при естественных предположениях сходимость к локальной минимали и обеспечивающие приближенно-оптимальный синтез управления в ее окрестности, а их недостатки – наличие настроечных параметров и большая сложность реализации на итерациях (например, необходимость решения нелинейного уравнения Риккати вместо линейного матричного уравнения).

При решении практических задач имеет смысл разумно комбинировать указанные методы и их модификации. На начальных итерациях целесообразно применять более простые и эффективные методы нелокального улучшения, прежде всего – методы первого порядка, а на завершающем этапе использовать методы сильного или слабого улучшения и их среднеквадратические аналоги.

Литература

1. Courant R. Variational Methods for Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. 49. – № 1. – P.43-51.
2. Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет // Прикладная математика и механика. – 1946. 10. – № 2. – С. 87-96.
3. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физических наук. – 1957. 15. № 1а. – С.56-62.
4. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика // УМН. – 1948. 3. – № 6. – С. 89-185.
5. Шатровский Л.И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1962. Т 2. – № 3. – С. 488-491.
6. Келли Г.Дж. Метод градиентов // Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета / под ред. Дж. Лейтмана. – М.: Наука, 1965. – С. 101-116.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
8. Jacobson D.H. New second-order and first-order algorithms for determining optimal control. A differential programming approach // J. Optimiz. Theory and Applications. – 1968. – V. 2. – № 4. – P. 411-440.
9. Гурман В.И., Расина И.В. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 10. – С. 12-18.
10. Гурман В.И., Батурич В.А., Расина И.В. Приближенные методы оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983.

11. Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 160-168.
12. Кротов В.Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума // Автоматика и телемеханика. 1962. Т 23. №12. С. 1571-1583; 1963. Е 24. №15. – С. 581-598; 1963. е 24. №7. – С. 826-843; 1965. – Т 26. – №11. – С.24-41.
13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961.
14. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. – Новосибирск: Наука, 1997.
15. Кротов В.Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
16. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985.
17. Расина И.В. Метод улучшения второго порядка для сложных процессов. Деп. ВИНТИ 23.07.91. № 3137 – В 91.
18. Расина И.В. Две формы достаточных условий оптимальности и метод улучшения второго порядка для сложных процессов: юбил. сб. научн. тр. к 10-летию СИПЭУ. Иркутск: Изд-во Макаров, 2004. – С. 180-192.
19. Гурман В.И., Трушкова Е.А., Блинов А.О. Приближенная оптимизация управления в параллельных вычислениях // Вестник БГУ. Математика, информатика. – 2010. – № 9. – С. 18-28.
20. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York, Marcel Dekker, 1996.
21. Кротов В.Ф. Управление квантовыми системами и некоторые идеи теории оптимального управления // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 3. – С. 15-23.
22. Трушкова Е.А. Алгоритмы глобального улучшения управления // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6.
23. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М.: Физматлит, 2000.
24. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973.
25. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008.
26. Булдаев А.С. Проекционные процедуры нелокального улучшения линейно управляемых процессов // Известия вузов. Математика. – 2004. – № 1. – С. 18-24.

Расина Ирина Викторовна, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин Сибирской академии права, экономики и управления (САПЭУ); г. Иркутск, тел. (3952)422869, e-mail: irinarasina@gmail.com.

Rasina Irina Victorovna, candidate of physical and mathematical sciences, head of department of mathematical and natural sciences, Syberian Academy of Law, Economics and Management, e-mail: irinarasina@gmail.com

УДК 517.977

© И.В. Расина, А.О. Блинов

УЛУЧШЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ*

В статье предлагается интерпретация импульсных процессов в виде модели дискретно-непрерывного процесса. Для такого представления на основе аналога достаточных условий оптимальности Кротова строится метод улучшения. В качестве примера для апробации метода рассматриваются улучшения магистрали в задаче об оптимальной стратегии развития региона.

Ключевые слова: импульсный процесс, дискретно-непрерывный процесс, метод улучшения, магистраль.

I.V. Rasina, A.O. Blinov

IMPROVEMENT OF IMPULSE PROCESS ON THE BASE OF DISCRETE-CONTINUOUS MODEL

In the article it is proposed an interpretation of impulse process in the form of model discrete-continuous process. For that conception a method of improvement is constructed on the base of analogue of Krotov sufficient conditions. The turnpike improvement in the problem of region development is considered as an example for approbation of the method proposed.

Keywords: impulse process, discrete-continuous process, method of improvement, turnpike.

Введение

В ряде работ [1-8] были предложены модели и условия оптимальности сложных (дискретно-непрерывных) процессов и рассмотрены некоторые их приложения. Эти модели представляют собой конкретизацию весьма общей модели многошаговых процессов, записанной в терминах произвольных множеств и отображений (операторов), где управление на каждом шаге трактуется как комбинация некоторой абстрактной переменной и некоторого непрерывного процесса, описываемого дифференциальной системой с дополнительными ограничениями. Такая трактовка представляет собой удобный аппарат для описания и исследования различных сложных систем и процессов, в том числе импульсных процессов, которые являются по существу дискретно-непрерывными.

Цель данной работы – явное представление импульсных магистральных решений в задачах управления [9] как дискретно-непрерывных, построение для них алгоритма последовательного улучшения, который ге-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект №11.02.00171), РФФИ (проект №09-01-00170-а).

нерирует улучшающую, в частности минимизирующую, последовательность функционала. Этот подход является альтернативным подходу, где используется аппарат дифференциальных систем, управляемых мерами (см., например, обзор в [10]).

1. Модель дискретно-непрерывной (гибридной) системы

В качестве исходной принимается абстрактная модель дискретной управляемой системы [1,5]:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \quad \{k \in \mathbf{K} = k_I, k_I + 1, \dots, k_F\}, \quad (1)$$

$$x(k) \in \mathbf{X}(k), \quad u(k) \in \mathbf{U}(k, x(k)),$$

$$\gamma = (k_I, x(k_I), k_F, x(k_F)) \in \Gamma, \quad (2)$$

где k – номер шага (этапа), не обязательно физическое время; x, u – переменные произвольной природы (возможно, различной) для различных k ; $\mathbf{X}(k), \mathbf{U}(k, x), \Gamma$ – заданные множества.

В качестве общей модели гибридной системы предлагается следующая конкретизация указанной абстрактной дискретной модели. Пусть на некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_I, k_F \notin \mathbf{K}'$, $u = (u^d, u^c)$, u^c – некоторый непрерывный управляемый процесс, так что сечение множества $\mathbf{U}(k, x)$ при фиксированных x, u^d есть допустимое множество $\mathbf{D}^c(k, x, u^d)$ с соответствующей дифференциальной системой

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(z, t, y, w), \quad t \in \mathbf{T}(z), \quad (3)$$

$$y \in \mathbf{Y}(z, t) \subset R^{n(k)}, \quad w \in \mathbf{W}(z, t, y) \subset R^{p(k)}, \quad z = (k, x, u^d).$$

Оператор правой части (1) имеет вид

$$f(t, x, u) = \theta(z, \gamma^c), \quad \gamma^c = (t_I, y_I, t_F, y_F) \in \Gamma^c(z).$$

Решением этой комбинированной системы будем считать набор $m = (\mathbf{K}, x(t), u(t)) \in \mathbf{D}$, где при $t \in \mathbf{K}'$:

$$u(k) = (u^d(k), m^c(k)), \quad m^c(k) \in \mathbf{D}^c(k, x(k), u^d(k)),$$

который назовем *сложным (гибридным) процессом*.

Эту модель можно рассматривать как двухуровневую управляемую систему. Нижний уровень представляет собой описание непрерывных управляемых процессов на отдельных этапах. Верхний уровень связывает эти описания в единый процесс. В задачах оптимизации оба уровня рассматриваются во взаимодействии. Будем рассматривать для нее задачу

оптимального управления в стандартной форме как задачу о минимуме на **D** функционала $I = F(x(t_F))$ при фиксированных $k_I = 0, k_F = K, x(k_I)$. Достаточные условия оптимальности для такой модели получены в [1,5,16]. Задача улучшения формулируется следующим образом. Задан допустимый элемент m^I и требуется найти допустимый элемент m^II такой, что $I(m^II) < I(m^I)$.

2. Представление импульсного процесса

Построим дискретно-непрерывную модель для некоторого импульсного процесса, траектория которого представлена кусочно-непрерывной функцией. Примером такой функции может служить магистраль, полученная в результате решения производной задачи [9]. Разобьем заданный отрезок на K этапов – переходов между значениями дискретного аргумента ($k = 0, 1, 2, \dots, K$), где k соответствует очередной точке разрыва траектории. Рассмотрим содержание этапов.

1 этап. Выход на магистраль ($k = 0, 1$).

2 – $K - 1$ этапы. Движение по магистрали в силу непрерывной системы с точками переключения переменных.

4 этап. Сход с магистрали ($k = K - 1, K$).

Обозначим переменные верхнего уровня как x^1, x^2, \dots, x^n . Здесь переменные $x^1(k), x^2(k), \dots, x^{n-1}(k)$ соответствуют правым пределам непрерывных переменных нижнего уровня $x^1(k-1), x^2(k-1), \dots, x^{n-1}(k-1)$, а $x^n(k)$ – начальным значениям времени на непрерывных интервалах, т.е. точкам переключения непрерывных управлений; $u^{1d}(k), u^{2d}(k)$ – дискретные управления (импульсы для выхода на магистраль и схода с нее и смещения точек переключения относительно друг друга). Тогда справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} x^i(k+1) &= x^i(k) + u^{1d}(k), \\ x^n(k+1) &= x^n(k) + u^{2d}(k), \\ u^d &= (u^{1d}, u^{2d}), \quad k = 0, \dots, K-1. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Алгоритм улучшения

Построим алгоритм улучшения для импульсного процесса как модификацию алгоритма улучшения первого порядка [5], дополненную процедурой уточнения точек разрыва переменных управления, предложенную в работе [11].

Алгоритм.

1. Задаются начальные условия

$$x^i(0) = x^{ic}(t_I), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad x^n(0) = 0$$

и управляющие воздействия $(u^d(k), u^c(k, t))^I$.

2. Слева направо решается система дискретно-непрерывных уравнений (4), (1) тем самым определяется элемент m^I и вычисляется значение функционала I^I .

3. Справа налево решается дискретно-непрерывная система для сопряженных переменных

$$\psi^i(K) = F_{x^i}(K), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\psi^i(k) = \psi^{ic}(k, t_I(k)), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\psi^n(k) = 1, \quad k = 1, \dots, K-1,$$

$$\dot{\psi}^{ic}(k) = -\mathcal{H}_{x^i}^c(k, \psi^c x^c),$$

$$\psi^{ic}(k, t_F(k)) = \psi^i(k+1), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

4. Вычисляются новые непрерывные управления, как

$$(u^c)^{II} = \arg \max_{u^c \in U} H^c,$$

и новые дискретные управления по формулам

$$(u^{1d}(k))^{II} = (u^{1d}(k))^I + l_1 H_{u^{1d}}^d(k), \quad k = 0, K-1,$$

$$(u^{2d}(k))^{II} = (u^{2d}(k))^I + l_2 Q(k), \quad k = 0, K-1.$$

Здесь $\mathcal{H}^c = \sup_{u^c} H^c$, $H^c(k, t, x^c, u^c) = (\psi^c)^T f^c(k, t, x^c, u^c)$, где

$x^c = (x^{1c}, \dots, x^{n-1c})$, u^c – вектор управлений непрерывного процесса, U^c – множество допустимых непрерывных управлений.

$$Q(n) = \psi^n(k+1) + \mathcal{H}^c(k, \dots, t_F(k)),$$

$$H^d = \sum_i \psi^i(k+1) f(k, x(k), u^{1d}(k), u^{2d}(k)).$$

5. Пункт 2 повторяется для различных значений l_1 , l_2 , и определяется минимум функционала по этим параметрам и соответствующий им улучшенный элемент.

Критерием окончания итерационного процесса служит выполнение условия $|I^{II} - I^I| \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычислений.

4. Приложение к улучшению магистрального решения в социо-эколого-экономической модели

Применим изложенный алгоритм к улучшению магистрали в терминах производной задачи, полученной путем двойного перехода в полной системе уравнений [12]: функционал $I = -\zeta(t_r)$, система состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \kappa(\theta)y - pB\delta k - p(A^v(\theta)\gamma^v + B^v\delta^v) - S(r) + \\ &+ \eta^z(\theta)(\dot{\bar{r}} + N(r - \bar{r}) + im^r - ex^r) - \eta_\theta^z(\theta)r([\gamma^v k^v] + H)(\theta - \bar{\theta}), \\ \dot{\theta} &= -([\gamma^v k^v] + H)(\theta - \bar{\theta}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta^z &= p(A^z\gamma^z + B^z\delta^z)(C^z\gamma^z)^{-1}, \quad \kappa = p(E - A(\theta)) - \eta^z C(\theta), \\ \zeta &= \dot{I} + p(Bk + B^z k^z + B^v k^v) - \sum_j \mu^{vj} \ln \gamma^{vj}(\theta^j - \bar{\theta}^j) + \eta^z r, \\ \mu^v &= p(A^v\gamma^v + B^v\delta^v). \end{aligned}$$

Здесь y, z, v – векторы выпусков продукции по отраслям, активного природо-социо-восстановления, активных инноваций; (k, k^z, k^v) , (u, u^z, u^v) , $(\delta, \delta^z, \delta^v)$ – основные фонды, инвестиции (векторы) и темпы амортизации в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах (диагональные матрицы); p – матрица-строка цен (ценовых поправок); r – вектор индексов состояния природной среды и социума; θ – вектор инновационных индексов (агрегированное описание изменения за счет инноваций элементов матриц A, A^z, B, B^z, C, C^z и других параметров); $\bar{\theta}$ – предельно допустимая величина вектора инновационных индексов; $\bar{r}(t)$ – заданная функция (опорная); например, получаемая из статистического прогноза; im^r, ex^r – миграционные потоки загрязнений и ресурсов; A, A^z, A^v – матрицы прямых затрат в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах; B, B^z, B^v – матрицы фондообразующих затрат в указанных секторах; N – матрица коэффициентов взаимовлияния компонентов природной и социальной подсистем; C – матрица коэффициентов прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем, H – матрица, отражающая влияние инвестиций и диффузии инноваций; $[X]$ – диагональные матрицы, построенные из компонент вектора X ; Π –

«благополучие» – накопленный доход за вычетом штрафа за нарушение условий устойчивого развития, функционал исходной задачи.

В отличие от работы [12] матрицы прямых затрат A^z , A^v зависят от θ , т.е. претерпевают инновационные изменения аналогично матрице A . В рассматриваемой системе уравнение для переменной производной задачи ζ дополнено уравнением инноваций. Переменные ζ , θ являются переменными состояния, а роль управлений играют переменные y , k , k^v , r .

За начальное приближение берется магистраль из [12], которая формально получается при исследовании только уравнения относительно ζ .

Заметим, что ее проекция на плоскость (t, θ) не проходит через точку (t_1, θ_1) , т.е. разрывна в этой точке. Кроме того, есть точка переключения переменных (k, y) . Представим поведение исследуемой системы в виде дискретно-непрерывного процесса по схеме, изложенной выше.

В данном случае заданный отрезок разбивается на четыре этапа.

1 этап – выход на магистраль ($n = 0, 1$).

2 и 3 этапы – движение по магистрали в силу непрерывной системы с точкой переключения переменных ($n = 1, 2; 2, 3$).

4 этап – сход с магистрали ($n = 3, 4$).

Обозначим переменные верхнего уровня как x^1 , x^2 , x^3 . Здесь переменные x^1 , x^2 соответствуют правым пределам переменных ζ , θ , а x^3 – начальным значениям времени на непрерывных интервалах; т.е. точкам переключения непрерывных управлений; u^{2d} , u^{3d} – дискретные управления (импульс для выхода на магистраль и смещения точки переключения). Тогда справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} x^i(n+1) &= x^i(n) + u^d(n), \quad u^{1d}(n) = 0, \quad n = 0, \dots, 3, \\ u^{2d}(n) &= 0, \quad n = 0, 4, \quad u^{3d}(n) = 0, \quad n = 0, \dots, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

$$x^1(0) = \zeta(0, t_1(0)) = 0, \quad x^2(0) = \theta(t_1(0)) = 0, \quad x^3(0) = t_1(0) = 0.$$

В новых терминах функционал $I = -x^1(4)$.

Расчеты проводились с помощью вышеизложенного алгоритма. Система сопряженных переменных имела следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi^1(n) &= 1, \quad \psi^2(4) = 0, \quad \psi^3(4) = 0, \quad \psi^2(n) = \psi^{2c}(n, t_1(n)), \\ \psi^3(n) &= 1, \quad \dot{\psi}^{2c} = \mathcal{H}^c(\theta, u^c, \psi^{2c}), \quad \psi^{2c}(n, x^3(n)) = \psi^2(n+1). \end{aligned}$$

Новые непрерывные управления получаются по формулам

$$\widehat{y}^i(t) = \begin{cases} y_u^i, & \text{при } \kappa^i \geq 0, \\ y_l^i, & \text{при } \kappa^i < 0, \end{cases}$$

$$\widehat{k}^i(\theta, t) = \begin{cases} k_l^i, & \text{при } \kappa^i < 0, \\ \text{решение уравнения } \frac{\partial R}{\partial k^i}, & \text{при } \kappa^i \geq 0, \end{cases} \quad \text{и}$$

$$r^H = (2s) - 1(\eta^z(\theta))N - \eta_\theta^z H(\theta - \bar{\theta}), \quad k^v(n, t) = 0,$$

а новые дискретные управления – по формулам

$$(u^{2d})^H = (u^{2d})^I + l_2 H_{u^{2d}}^d, \quad n = 0, 3,$$

$$(u^{3d})^H = (u^{3d})^I + l_3 Q, \quad n = 0, 3,$$

Здесь $\mathcal{H}^c = \sup_{u^c} H^c$, $H^c = \psi^{1c} \{\dot{\zeta}\} + \psi^{2c} \{\dot{\theta}\}$, $\{\dot{\zeta}\}, \{\dot{\theta}\}$ – правые части соответствующих дифференциальных уравнений,

$$Q(n) = \psi^3(n+1) + \mathcal{H}^c(n, \dots, t_F(n)),$$

$$H^d = \sum_i \psi^i(n) (x^i(n) + u^i(n)).$$

Расчеты проводились при следующих исходных данных:

$$t_F = 20, \quad p = 1, \quad \delta = \delta^z = \delta^v = 0.05, \quad A_0 = 0.5, \quad A(\theta) = (1 + \theta)A_0,$$

$$C_0 = 0.000406, \quad C(\theta) = (1 + \theta)C_0, \quad B = 1, \quad A^z(\theta) = 1 + \theta, \quad B^z = 1,$$

$$A^v(\theta) = 1 + \theta, \quad B^v = 1, \quad C^z = 1, \quad k_0 = 400, \quad k_F = 800, \quad k_0^z = 10, \quad k_0^v = 6, \quad \theta_0 = 0,$$

$$\bar{\theta} = -0.8, \quad r_0 = 0.8, \quad r_F = 0.9, \quad \bar{r} = 1, \quad N = -0.001, \quad im^r = 0.1, \quad ex^r = 0.1,$$

$$S(r) = s(r - \bar{r})^2, \quad s = 5000, \quad y_l = 0, \quad k_l = 0, \quad y_u = \gamma\sqrt{k}, \quad \gamma = 10, \quad \gamma^z = 0.0002,$$

$$H = 0.03 \quad \gamma^v = 0.0015.$$

Результаты представлены в таблице и на графиках

№ итерации	θ_F	t^*	П	$u^{2d}(0)$	$u^{3d}(1)$
1	-0.7565	9.978	-3.779	-0.723	-9.065
2	-0.771	0.913	41.694	-0.749	-0.205
3	-0.7855	0.708	194.683	-0.774	-0.097
4	-0.8	0.611	468.25	-	-

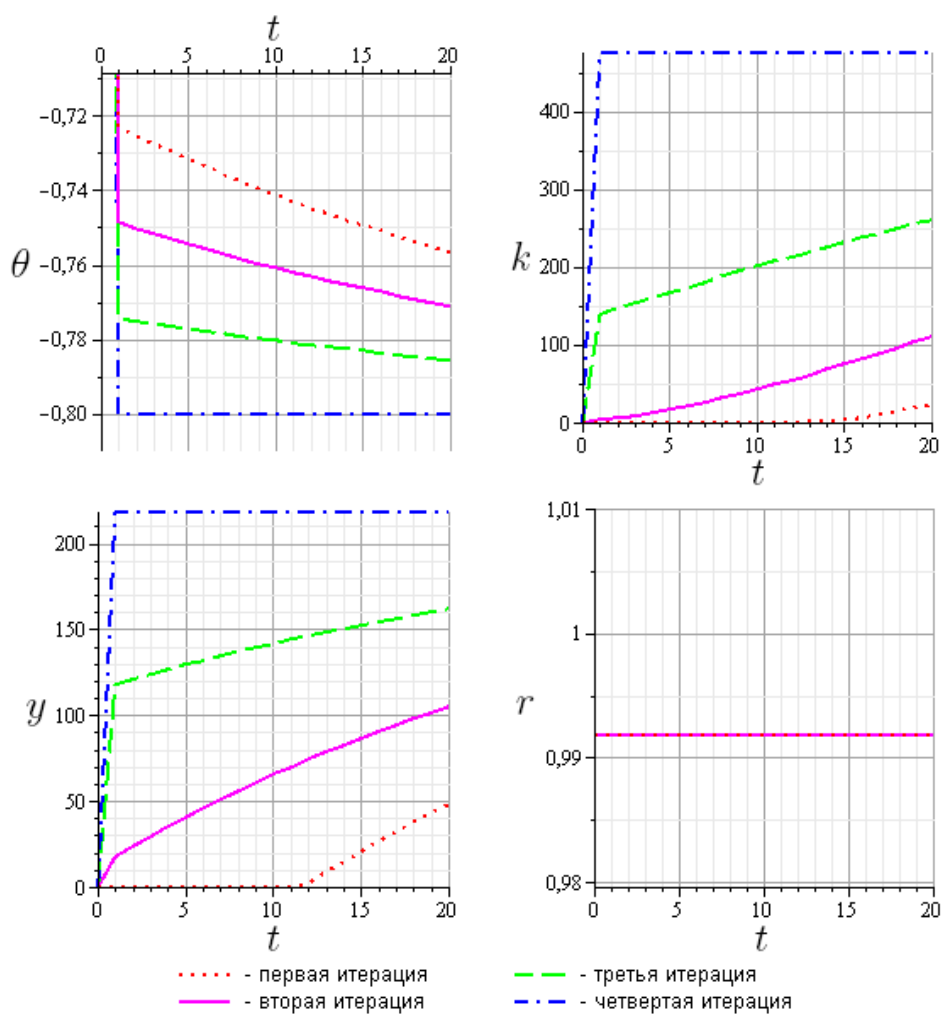


Рис. 1. Итерации улучшения

Очевидно, что функционал достиг минимума, так как переменная θ подошла к своей нижней границе $\bar{\theta}$.

Заключение

Концепция дискретно-непрерывной модели [1–8] как конкретизация общей модели многошаговых процессов применима для практического представления импульсных процессов, которые по существу дискретно-непрерывны. Для их оптимизации могут быть использованы ранее разра-

ботанные в этой концепции условия оптимальности и итерационные алгоритмы улучшения. На этапе итерационной аппроксимации известных импульсных решений допустимыми непрерывными процессами переход к дискретно-непрерывной модели дает возможность варьировать точки переключения на каждой итерации, что и ведет к повышению эффективности численных процедур. Приведенный пример хорошо иллюстрирует общую картину.

При практической реализации каждый скачок реализуется последовательностью кусочно-гладких траекторий при неограниченно возрастающих управлениях в окрестностях точек разрыва, а реально – при достаточно больших управляющих воздействиях.

Литература

1. Гурман В.И. К теории оптимальных дискретных процессов. *АиТ.* – 1973. – №6. – С. 53-58.
2. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // *АиТ.* 1974. – № 12. – 1974. – С. 72-80.
3. Орлов А.Г., Расина И.В. Достаточные условия оптимальности сложных процессов: тез. докл. III Всесоюз. Четаевской конф. – Иркутск, 1977. – С. 51-52.
4. Орлов А.Г., Расина И.В. Сложные процессы и достаточные условия относительной оптимальности // *Управляемые системы.* ИМ СО АН СССР. – Новосибирск, 1979. – Вып. 18.
5. Гурман В.И., Батурин В.А., Расина И.В. Приближенные методы оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983.
6. Гурман В.И., Расина И.В. Сложные процессы / Методы решения задач оптимального управления на основе принципа расширения. – Новосибирск: Наука, 1990. – С. 84-94.
7. Расина И.В. Две формы достаточных условий оптимальности и метод улучшения второго порядка для сложных процессов: юбил. сб. науч. тр. к 10-летию СИПЭУ. – Иркутск: Изд-во Макаров, 2004. – С. 180-192.
8. Гурман В.И. Модели и условия оптимальности для гибридных управляемых систем // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* – 2004. – № 4. – С. 70-75.
9. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. – М.: Наука, 2005.
10. Гурман В.И. Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений // *Авт-ка и телемех-ка.* 2003. – № 3. – С. 61-71.
11. Гурман В.И., Ни Минь Кань. Реализация скользящих режимов как обобщенных решений задач оптимального управления // *АиТ.* 2008. – № 3. – С. 51-59.
12. Расина И.В., Блинов А.О., Гусева И.С. Магистраль в задаче оптимизации стратегии развития региона на многокомпонентной модели // *Вестник Бурятского государственного университета.* – 2011. – №6. – С. 36-42.

Расина И.В., Блинов А.О. Улучшение импульсных процессов на основе дискретно-непрерывной модели

Расина Ирина Викторовна – кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин Сибирской академии права, экономики и управления; тел. (3952)422869, e-mail: irinarasina@gmail.com

Блинов Александр Олегович – инженер-исследователь Института программных систем им. А.К. Айламазяна РАН; тел. (48535)98094, E-mail: sarmat@pereslavl.ru

Rasina Irina Victorovna – candidate of physical and mathematical sciences, head of department of mathematical and natural sciences, Syberian Academy of Law, Economics and Management.

Blinov Alexander Olegovich – research engineer of Ailamazyan Program Systems Institute of RAS.

2. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

© А.В. Танхасаев

ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ПОМОЩИ БИБЛИОТЕКИ MPICH2

Статья состоит из двух частей:

В первой рассматриваются фракталы и методы конструирования фрактальных объектов. Описаны виды фракталов и алгоритмы реализации; во второй освещены проблемы параллельного программирования и программный пакет MPICH2. Дан пример построения фрактала кривая Коха с применением методов параллельного программирования.

Ключевые слова: теория фракталов, параллельное программирование, MPI, MPICH2.

A.V. Tankhasaev

CONSTRUCTION OF FRACTAL OBJECTS BY MEANS OF LIBRARY MPICH2

In the first part it is told about fractal objects and methods of their construction. Kinds of fractals and algorithms for their modeling are described.

In the second part it is told about problems of parallel programming and the software for their realization. The example of construction of a fractal – Kokh's curve by means of methods of parallel programming is considered.

Keywords: fractal theory, parallel programming, MPI, MPICH2.

Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х гг., с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово «фрактал» образовано от латинского *fractus*, в переводе означает: состоящий из фрагментов. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 г. для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 г. книги Мандельброта 'The Fractal Geometry of Nature'

Виды фракталов

Геометрические. В двумерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих

ломаную, заменяется на ломаную-генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры и получается геометрический фрактал.

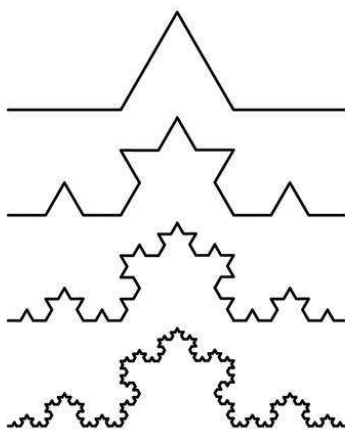


Рис.1

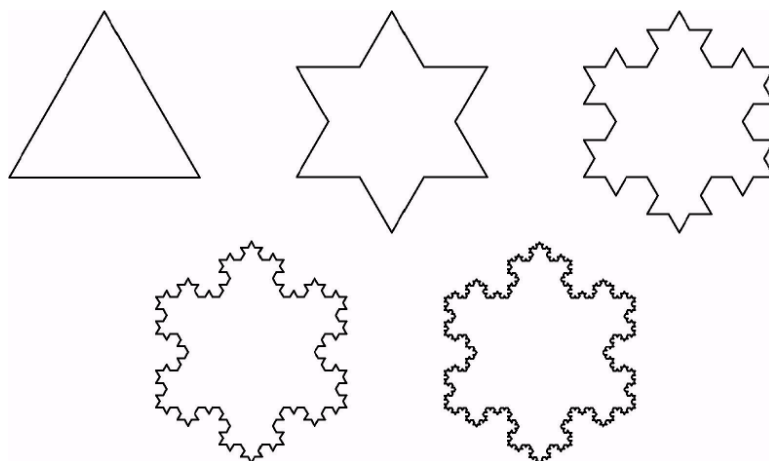


Рис. 2

Алгебраические. Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы. Интерпретируя нелинейный итерационный процесс, как дискретную динамическую систему, можно пользоваться терминологией теории этих систем: фазовый портрет, установившийся процесс, аттрактор и т.д.

Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее на-

чального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (или, как говорят, – аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым является двухмерное пространство, то окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса).

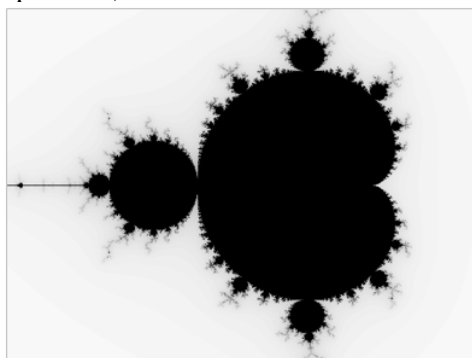


Рис. 3



Рис. 4

Стохастические. Получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные: несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

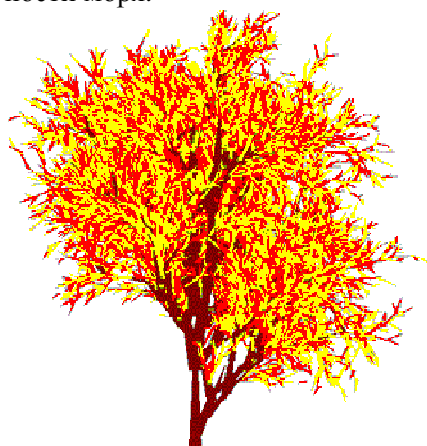


Рис. 5

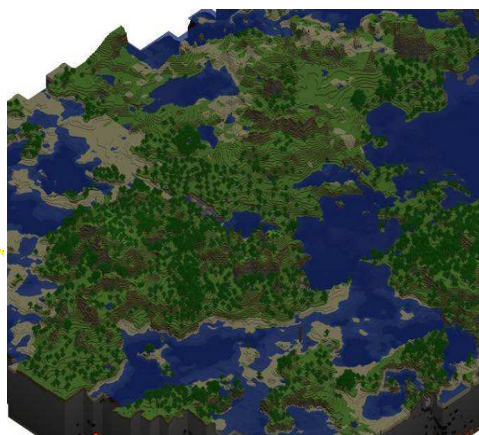


Рис. 6

Методы построения фрактальных объектов.

L-systems. Понятие L-систем ввел Аристрид Линденмайер, в основном, для изучения формальных языков. В дальнейшем выяснилось, что с помощью них можно строить самоподобные фракталы. Алгоритм, реализующий L-системы в графическом виде, получил название turtle-графика (по-английски turtle – черепаха). Подробнее о L-системах можно посмотреть в книге: P.Prusinkiewicz & J. Hanan, Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants, Lecture Notes in Biomathematics, N79, Springer-Verlag, New-York, 1989.

«Черепашковый» алгоритм представляет собой интерпретатор кодового слова, являющегося результатом выполнения L-системы, которое анализируется слева направо и может содержать следующие символы:

F – указывает, что «черепаха» должна сделать один шаг вперед с прорисовкой;

b – шаг вперед без прорисовки;

«+» – увеличить угол;

«-» – уменьшить угол;

«[» – открыть ветвь;

«]» – закрыть ветвь.

Пример исходных данных для фрактала кривая Коха:

Аксиома: F ;

Правило: $F \rightarrow F - F + +F - F$;

Угол: $\frac{\pi}{3}$.

Системы итерирующих функций(IFS). Метод «Систем Итерируемых Функций» (Iterated Functions System – IFS) появился в середине 80-х гг. как простое средство получения фрактальных структур. IFS представляет собой систему функций из некоторого фиксированного класса функций, отображающих одно многомерное множество на другое. Наиболее простая IFS состоит из аффинных преобразований плоскости:

$$X' = A * X + B * Y + C$$

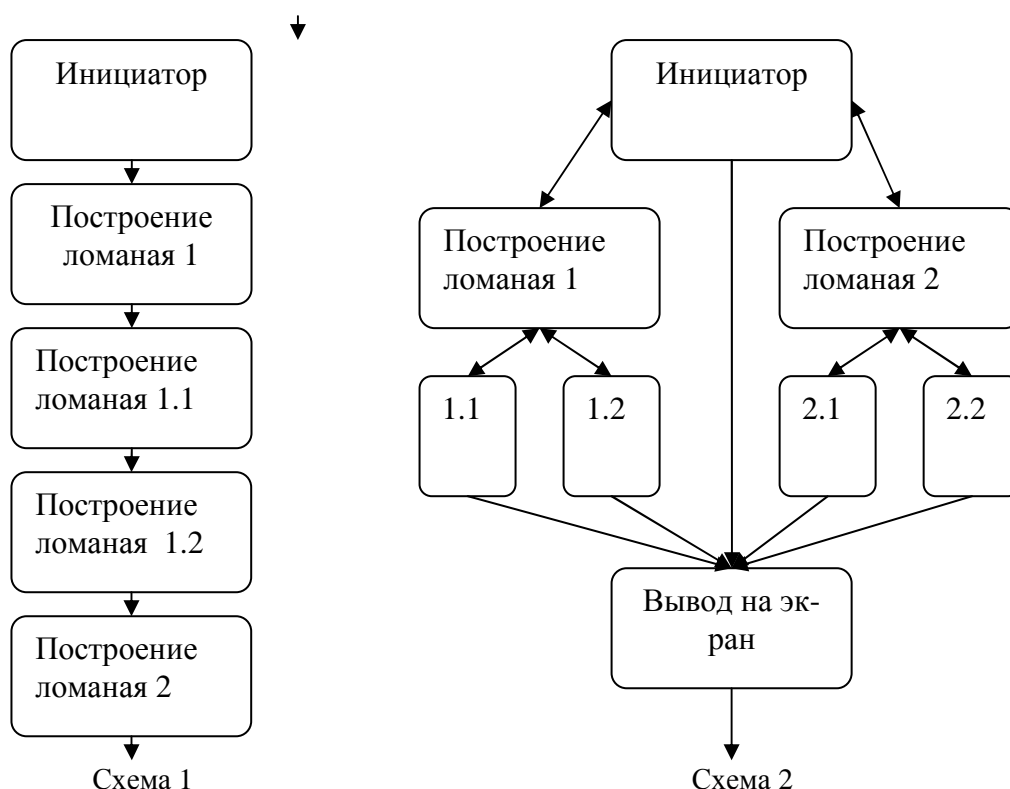
$$Y' = D * X + E * Y + F$$

Пример исходных данных для фрактала кривая Коха:

Koch{

0.3333	0.0000	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000
0.3333	0.0000	0.0000	0.3333	0.6666	0.0000
0.1667	-0.2887	0.2887	0.1667	0.3333	0.0000
-0.1667	0.2887	0.2887	0.1667	0.6666	0.0000

Опыт построения фрактальных объектов. Для визуализации фрактальных объектов и подсчета фрактальной размерности была разработана программа Планиметр-стереометр. В ней были реализованы методы: IFS, L-systems, координатный и построение с помощью turtle графики. Изначально код был адаптирован для систем с последовательной обработкой данных.



Организация параллельности вычислений, когда в один и тот же момент выполняется одновременно несколько операций обработки данных, осуществляется, в основном, за счет введения избыточности функциональных устройств (*многопроцессорности*) [1]. В этом случае можно достичь ускорения процесса решения вычислительной задачи, если осуществить разделение применяемого алгоритма на информационно независимые части и организовать выполнение каждой части вычислений на разных процессорах. Подобный подход позволяет выполнять необходимые вычисления с меньшими затратами времени, и возможность получения максимально-возможного ускорения ограничивается только числом имеющихся процессоров и количеством «независимых» частей в выполняемых вычислениях.

Параллельная модель программирования:

- 1) параллелизм данных;
- 2) параллелизм задач.

Подход, основанный на параллелизме данных, характеризуется тем, что:

- одна операция применяется сразу к нескольким элементам массива данных. Различные фрагменты такого массива обрабатываются на век-

торном процессоре или на разных процессорах (ядрах) параллельной вычислительной системы;

- обработкой данных управляет одна программа;
- пространство имен является глобальным;
- параллельные операции над элементами массива выполняются одновременно на всех доступных данной программе процессорах.

Подход, основанный на параллелизме задач, характеризуется тем, что:

- вычислительная задача разбивается на несколько относительно самостоятельных подзадач. Каждая подзадача выполняется на своем процессоре;
- для каждой подзадачи пишется своя собственная программа на обычном языке программирования (C++, Fortran и т.д.);
- подзадачи должны обмениваться результатами своей работы, получать исходные данные. Практически такой обмен осуществляется вызовом процедур специализированной библиотеки. Программист при этом может контролировать распределение данных между различными процессорами и различными подзадачами, а также обмен данными.

Программная реализация

MPICH2 – это быстродействующая и широко портируемая реализация стандарта MPI (реализованы оба стандарта MPI-1 и MPI-2). Цели создания MPICH2 следующие:

1. Предоставить реализацию MPI, которая эффективно поддерживает различные вычислительные и коммуникационные платформы, включая общедоступные кластеры (настольные системы, системы с общей памятью, многоядерные архитектуры), высокоскоростные сети (Ethernet 10 Гбит/с, InfiniBand, Myrinet, Quadrics) и эксклюзивные вычислительные системы (Blue Gene, Cray, SiCortex).

2. Сделать возможными передовые исследования технологии MPI с помощью легко расширяемой модульной структуры для создания производных реализаций.

При построении фрактала – кривая Коха был использован подход, основанный на параллелизме данных. Процедура формирования генератора фрактального объекта требует 3 параметра (координата начала, угол наклона «черепашки», масштаб), а алгоритм построения генератора остается прежним.



Рис. 7. 1 процесс



Рис. 8. Порождены 4 параллельных потока



Рис. 9. Порождены 16 параллельных потоков

Реализация данного алгоритма проводилась с компьютерами на базе процессоров Intel Celeron E3300(2 ядра) и Intel Core 2 Quad(4 ядра). Повышение скорости алгоритма на базе 2-х ядерного процессора составила 1,87 раза относительно однопоточного приложения, а на базе 4-х ядерного процессора – 3,68 раза.

Литература

1. Немнюгин С., Стесик О. Параллельное программирование для много-процессорных вычислительных систем. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
2. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. Интернет – университет информационных технологий – ИНТУИТ. ру, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

Хандаров Ф.В., Дондоков З.Б.-Д. Прогнозирование налога на доходы физических лиц с использованием искусственных нейронных сетей

3. Озеров С. Параллельное программирование. [Электронный ресурс] – 2005. – Режим доступа к журн.: <http://www.computerra.ru/242551/>, свободный.
4. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. – М.: Мир, 1989.
5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.
6. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.

Танхасаев Аюр Васильевич – г. Улан-Удэ, Бурятский государственный университет, martin@bsu.ru, 68-40-47.

Tankhasaev Ayur Vasilievich – Ulan-Ude, Buryat State University, martin@bsu.ru, 68-40-47.

УДК 004+336.221

© **Ф.В. Хандаров, З.Б.-Д. Дондоков**

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАЛОГА НА ДОХОДЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЛИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ*

В статье излагается методика прогнозирования налога на доходы физических лиц с использованием аппарата искусственных нейронных сетей. Приводятся полученные результаты.

Ключевые слова: временные ряды, налоговое прогнозирование, отбор признаков.

F.V. Handarov, Z.B.-D. Dondokov

PERSONAL INCOME TAX FORECASTING USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

The paper deals with methods of personal income tax forecasting using artificial neural networks. The results are described.

Keywords: time series, tax forecasting, feature selection.

Введение

Одной из важных проблем в региональном экономическом планировании является прогнозирование налоговых поступлений; в частности, основного вида прямых налогов – налога на доходы физических лиц. Данный вид налога является третьим по величине отчислений в бюджет и отличается следующими важными особенностями:

- объектом обложения данным налогом служит именно доход, реально полученный налогоплательщиком;
- его плательщиками является практически все трудоспособное население страны;

* Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ. Проект №10-02-62206а/Т.

- при прочих равных условиях он легче других налогов контролируется налоговыми органами, от его уплаты сложнее уклониться недобросовестным налогоплательщикам.

При этом специфика и сложность прогнозирования НДСФЛ обусловлена влиянием множества трудно формализуемых факторов, неполнотой и противоречивостью исторических данных. Трактовка полученных результатов также затруднена в силу чисто экономических причин, вроде: сокрытия доходов, неуплаты налогов, теневого оборота и т.п.

В работе описывается методика прогнозирования рассматриваемого вида налога на основе применения аппарата искусственных нейронных сетей, производится её сравнение с другими методами прогнозирования, приводится интерпретация полученных результатов: оценка качества полученных прогнозов.

Вычислительные эксперименты в работе производятся по данным налоговых поступлений по Республике Бурятия. Временной интервал исторических данных, используемых для построения системы прогнозирования, составляет 3 года с разбивкой по месяцам.

Описание методики

В ходе эксперимента рассматривались 10 экономических показателей, по одному из которых («Поступление НДСФЛ в бюджет города Улан-Удэ») требовалось построить прогноз (табл. 1), остальные 9 показателей предположительно считаются влияющими. Кроме того, требовалось определить степень подобного влияния и построить модель прогнозирования «Поступлений НДСФЛ».

Таблица 1

Экономические показатели

№	Показатель
1	Индексы промышленного производства
2	Добыча полезных ископаемых
3	Обрабатывающие производства
4	Производство и распределение электроэнергии, газа и воды
5	Продукция сельского хозяйства в хозяйствах всех категорий
6	Грузооборот всех видов транспорта на основе коммерческого грузооборота
7	Объем работ по виду деятельности «строительство» (в фактических ценах соответствующих лет)
8	Численность занятого в экономике населения
9	Среднемесячная номинальная начисленная заработная плата одного работника
10	Поступление НДСФЛ в бюджет города Улан-Удэ

Методика заключалась в переборе k-сочетаний показателей, для получаемого всякий раз k-мерного временного ряда строилась модель прогнозирования. В качестве аппарата прогнозирования использовались искусственные нейронные сети с применением метода «взвешенного скользящего окна» [1]. Стоит отметить, что в качестве непосредственного механизма прогнозирования, вообще говоря, возможно использование любого другого подходящего аппарата, однако такие преимущества искусственных нейронных сетей, как возможность обучения, решение задач при неизвестных закономерностях, устойчивость к шумам, адаптация к окружающим условиям и др., вполне определяют выбор авторов.

В качестве механизма настройки весов и подбора структуры нейронных сетей использовался эволюционный алгоритм. Особью для эволюционного алгоритма является искусственная нейронная сеть, в качестве хромосомы рассматривается вектор вещественных чисел – множество весов связей ИНС, содержащий также информацию о входном и выходном нейронах для каждой связи.

При скрещивании два графа ИНС сортировались топологически обходом в ширину, начиная с входных нейронов, с сохранением фиксированного количества и нумерации входных и выходных нейронов. Таким образом, для любых двух ИНС возможно было установить «одинаковые» и «различающиеся» элементы вектора представления – хромосомы. Так, например, рассмотрим две ИНС с одинаковым количеством и нумерацией входных и выходных нейронов (рис. 1).

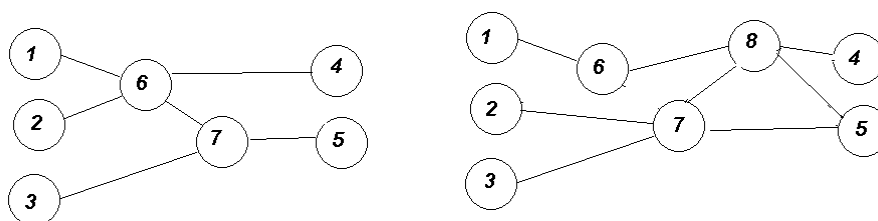


Рис. 1. Пример двух различных ИНС

Полученные в результате поиска в ширину векторы связей будут иметь следующие «совпадающие» связи ИНС (выделены подчеркиванием).

<u>1</u>	2	<u>3</u>	6	6	<u>7</u>
<u>6</u>	6	<u>7</u>	4	7	<u>5</u>

<u>1</u>	2	<u>3</u>	6	7	<u>7</u>	8	8
<u>6</u>	7	<u>7</u>	8	8	<u>5</u>	4	5

Рис. 2. «Совпадающие» связи ИНС

Для особей были определены операции инициализации, оценивания, отбора для скрещивания, скрещивания, мутации, редукции и селекции.

Критерием остановки процесса настройки нейронной сети является достижение максимального количества итераций или сходимость популяции к заданной величине ε . Таким образом, в описываемой методике критерием оценки качества отбора показателей и одновременно критерием качества полученной сетевой структуры и настройки весов сети является качество прогноза, совершаемого нейронной сетью.

Полученные результаты и сравнение со статистическими методами

В качестве альтернативных методов прогнозирования рассматривалось построение уравнения регрессии с предварительным проведением факторного анализа для отбора влияющих на величину НДСФЛ показателей и без него.

В таблице представлены реальные величины НДСФЛ в 2011 году («Реальн.»), а также результаты, полученные с использованием описанного подхода («ИНС-1» – «ИНС-5») и статистических методов («ФА+лин. регр.» и «Лин. регр.»). В последней строке приведено значение среднеквадратической ошибки для каждого метода.

Таблица 2

Результаты прогнозирования

2011	Реальн.	Лин. регр.	ИНС-1	ИНС-2	ИНС-3	ИНС-4	ФА + лин. регр.	ИНС-5
январь.	80577,20	112408,17	62525,17	40799,76	84809,40	81870,70	105556,90	96864,45
фев.	134832,40	111914,02	190875,90	89956,75	141647,00	112591,00	113981,60	126348,70
мар.	141470,00	114581,22	28081,45	129005,50	148484,00	124892,00	111620,80	135448,20
апр.	137836,80	121028,18	106789,00	161947,20	156253,00	122315,00	117643,30	128649,60
май	133658,00	132445,69	136365,80	157509,50	161746,00	138494,00	117248,70	126345,50
июнь	140703,20	154515,17	169467,00	92763,04	161391,00	130602,00	141762,70	139456,10
июль	156179,20	160718,64	161393,60	77093,30	167851,00	125700,00	151421,50	152364,80
авг.	131707,20	153104,81	211523,90	154403,60	182898,00	146288,00	150584,70	149893,40
сентяб.	139998,40	175646,29	173326,50	137648,70	195255,00	171934,00	166908,70	151856,60
октябрь.	144439,60	169007,13	107076,60	148189,50	214217,00	195322,00	169008,60	156236,80
ноябрь.	140646,80	159922,04	85579,55	93093,49	232936,00	221782,00	160184,60	165864,40
декабрь.	265161,20	179164,74	85584,18	86919,60	252171,00	249613,00	183804,30	221872,30
	ср.-кв. ошибка	32731,18	72057,46	63259,10	41867,42	32548,27	30734,53	17435,30

На рисунках 3а – 3в представлены графики, иллюстрирующие данные таблицы 2. Рис. 3а – лучшие (по ср.-кв. ошибке) прогнозы от нейронных сетей при $k > 4$, т.е. ИНС, построенные на 5 и более сочетаниях показателей, – налицо неадекватность поведения и большая ср.-кв. ошибка. Рис.3б – лучшие результаты прогнозов ИНС, построенных на 4-х сочетаниях – при сокращении размерности k -мерного временного ряда лучше угадывается тренд, однако по величине ср.-кв. ошибки ИНС все еще уступают статистическим методам (для представленных ИНС использовались следующие наборы показателей: 7-8-9, 6-7-9, 7-8-9 по табл.1). Рис.3в – лучшая ИНС, построенная на 3-х сочетаниях (7-9 по табл.1), а также регрессионные модели с предварительным снижением размерности и без него.

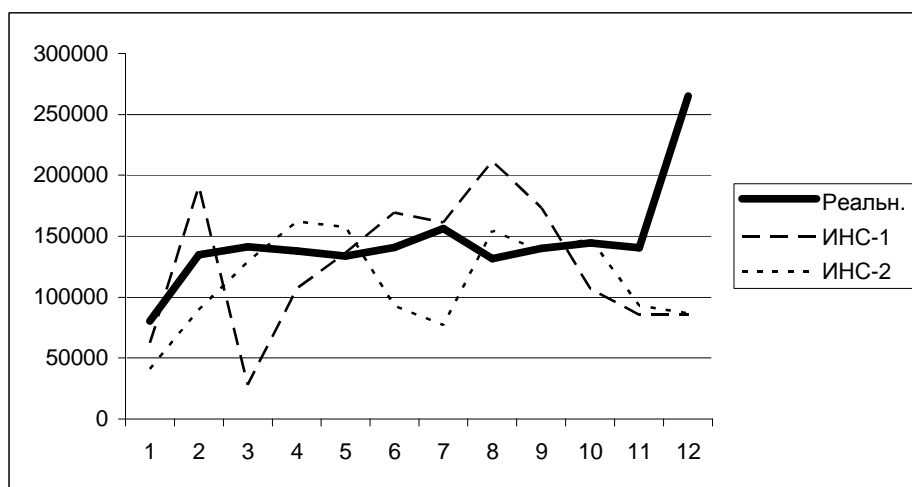


Рис. 3а. Результаты прогнозирования

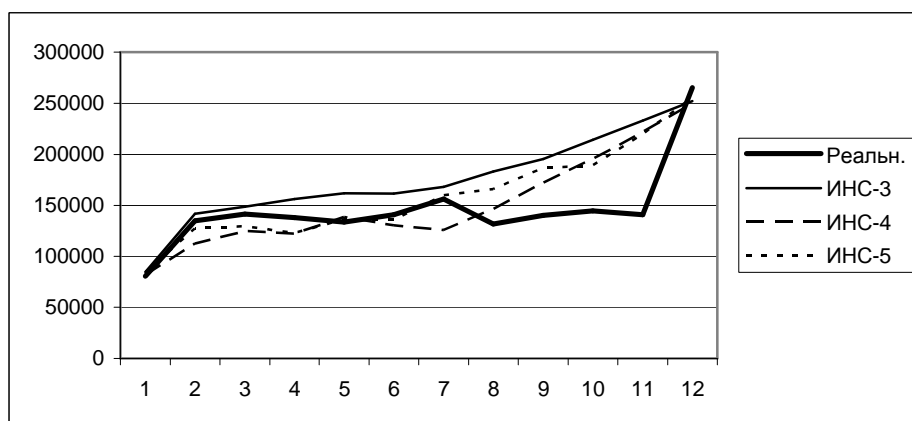


Рис. 3б. Результаты прогнозирования

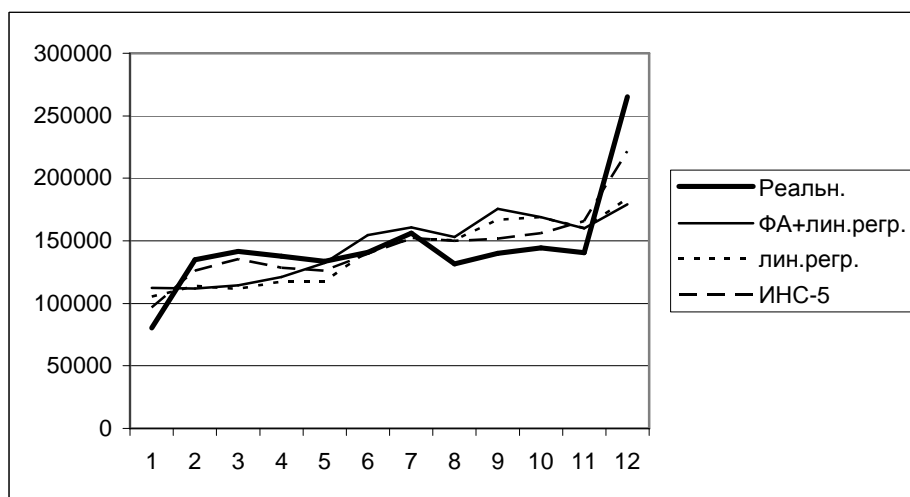


Рис. 3в. Результаты прогнозирования

По результатам проведенных экспериментов можно сделать выводы о том, что применение искусственных нейронных сетей для прогнозирования НДФЛ позволяет добиваться прогноза как минимум не хуже результатов, получаемых статистическими методами, а также о том, что предварительное снижение размерности позволяет повысить качество прогноза.

Заключение

Таким образом, применение рассмотренной методики позволяет получать адекватный прогноз, который может быть использован в качестве одного из контрольных инструментов при построении прогноза, поскольку в качестве оснований для прогнозирования используются лишь исторические данные, что, впрочем, при сохранении трендов вполне уместно. Предсказание же изменения трендов остается привилегией макроэкономических методов.

Налицо такие преимущества методики, как способность к выявлению скрытых связей, универсальность подхода, широкие возможности повторного использования (reusability), естественные возможности распараллеливания.

Литература

1. Morantz В.Н., Whalen Т., Zhang P.G. A Weighted Window Approach to Neural Network Time Series Forecasting // Chapter 13 in P. Zhang (ed.) Neural Networks in Business Forecasting, IRM Press, 2004. – P.251-265.
2. Eshelman L.J., Schaffer J.D. Real-coded genetic algorithms and interval-schemata // Foundation of Genetic Algorithms 2. – 1993. – P. 187-202.
3. Deb K., Kumar A. Realcoded genetic algorithms with simulated binary crossover: Studies on multimodal and multiobjective problems // Complex Systems. 9(6). – 1995. – P. 431-451.

-
4. Herrera F., Lozano M. Adaptation of genetic algorithm parameters based on fuzzy logic controllers // Genetic Algorithms and Soft Computing. – 1996. – P. 95-125.

Хандаров Федор Владимирович – научный сотрудник Научно-образовательного инновационного центра системных исследований и автоматизации Бурятского госуниверситета, 670000, г. Улан-Удэ, Смолина, 24а, тел. (3012) 221215, fhandar@rambler.ru

Дондоков Зорикто Бато-Дугарович – доктор экономических наук, доцент Восточно-Сибирского государственного технологического университета, dzorikto@mail.ru

Handarov Fedor Vladimirovich – Researcher of the Scientific and Educational Innovation Centre for System Studies and Automation in Buryat State University, 670000, г. Улан-Удэ, Смолина, 24а, тел. (3012) 221215, gzandan2002@mail.ru

Dondokov Zorikto BatoDugarovich – Doctor of economic sciences, associate professor of East Siberian State University of Technology, dzorikto@mail.ru

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.946

© В.В. Кибирев

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Применение комплексно-аналитических методов делает естественным рассмотрение уравнений с частными производными в комплексном пространстве. Класс эллиптических уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами является наиболее подходящим для исследования этим методом.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение Лапласа, голоморфные функции, сходимость рядов.

V.V. Kibirev

CAUCHY PROBLEM FOR THE LAPLACE'S EQUATION WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

The application of complex-analytical methods does natural consideration of the equations with partial derivatives in complex space. The class of the elliptic equations in private derivatives with analytical factors is the most suitable method for this research.

Keywords: Cauchy problem, Laplace's equation, polomorphic functions, convergence of sets.

Введение

Классическая теорема Коши-Ковалевской дает существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения в частных производных с аналитическими коэффициентами. Однако существование решения гарантируется только в малом. Здесь будет изучаться задача Коши для одного узкого класса уравнений, но решение будет получено в целом. Решение в целом получается за счет того, что уравнение рассматривается в комплексном пространстве.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где x, y и z – независимые комплексные переменные. В (1) произведем следующую замену переменных:

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy, \quad \zeta = z \tag{2}$$

Уравнение (1) примет вид

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = 0. \tag{1^*}$$

Будем искать решение f уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$f|_{\zeta=0} = u(\xi, \eta), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = v(\xi, \eta), \tag{3}$$

где u и v – функции, голоморфные в некоторой области голоморфности $B \subset C^2$.

Функцию f можно представить в виде $f = g + h$, где g и h – решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям.

$$g|_{\zeta=0} = u, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0; \quad h|_{\zeta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = v.$$

Легко проверить, что функции g и h представляются следующим образом:

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \frac{\xi^{2n}}{2n!} \cdot \frac{\partial^{2n} u}{\partial \xi^n \partial \eta^n}; \tag{4a}$$

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{\partial^{2n} v}{\partial \xi^n \partial \eta^n}. \tag{4б}$$

Исследуем область сходимости этих рядов. Будем рассматривать ряд (4а). Ряд (4б) изучается аналогично.

Лемма. Если функция u голоморфна в бицилиндре $D: \{|\xi - \xi_0| \leq r, |\eta - \eta_0| \leq r\}$, $r > 0$, то ряд (4а) для g сходится абсолютно и равномерно в круге $K_0: \{|\xi| < r, \xi = \xi_0, \eta = \eta_0\}$.

Доказательство. Воспользовавшись оценкой

$$\left| \frac{\partial^{2n} u}{\partial \xi^n \partial \eta^n} \right|_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0} \leq M \frac{(n!)^2}{r^{2n}}, \tag{5}$$

получим

$$|g| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \frac{\xi^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{\partial^{2n} u}{\partial \xi^n \partial \eta^n} \right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{|\xi|}{r} \right)^{2n}.$$

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{|\xi|}{r}\right)^{2n}$ сходится при $|\xi| < r$, то ряд (4а) сходится абсолютно и равномерно в круге K_0 .

Заставим точку (ξ_0, η_0) пробегать всю область голоморфности функций u и v . Рассмотрим бицилиндр $D_{0i} : \{|\xi| - \xi_{0i} \leq r_i, |\eta - \eta_{0i}| \leq r_i\}$, $r_i > 0$, содержащийся целиком в области B , но такой, что всякий больший бицилиндр такого вида содержит точки, не принадлежащие области B . Согласно лемме, ряд

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{(2n)!} \left\{ \frac{\partial^{2n} u}{\partial \xi^n \partial \eta^n} + \frac{\xi}{2n+1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial \xi^n \partial \eta^n} \right\}$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $K_{0i} : \{|\xi| < r_i, \xi = \xi_{0i}, \eta = \eta_{0i}\}$. образуем объединение $K(B) = \bigcup_{(\xi_{0i}, \eta_{0i}) \in B} K_{0i}$

всех кругов K_{0i} . $K(B)$ содержит некоторую открытую в трехмерном комплексном пространстве C^3 окрестность $V(B)$ области B [2].

Если переменные x, y и z вещественны, то из леммы следует утверждение: если функции u и v вещественно-аналитические и разлагаются по функциям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[(x-x_0) + i(y-y_0)]^l [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^h \\ \operatorname{Im}[(x-x_0) + i(y-y_0)]^l [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^h \end{aligned} \quad (*)$$

в ряды, сходящиеся абсолютно и равномерно в круге $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2$, то ряды (4а) и (4б) сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $I_0 : \{|z| < r, x = x_0, y = y_0\}$.

Теорема 1. Если функции u и v разлагаются в ряды по функциям (*), сходящимся абсолютно и равномерно в круге $K : \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \left\{ \Delta^n u + \frac{z}{2n+1} \Delta^n v \right\} \quad (6)$$

сходится абсолютно и равномерно в области

$$Q : \{|z| < r - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\}.$$

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что для любой точки (x_i, y_i) , лежащей в круге K , круг с центром в этой точке радиуса $r - \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$ лежит целиком в круге K .

Пусть M – поверхность, задаваемая аналитическим уравнением $z=f(x, y)$. Пусть B – точка поверхности M , а $U(B)$ – некоторая окрестность точки B и u – регулярная в $U(B)$ гармоническая функция. В силу аналитичности функций u и $\xi = z - f(x, y)$ существует открытая окрестность $V(B) \subset U(B)$ точки B , такая, что в $V(B)$ имеет место представление [3]

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n u_n(x, y) \tag{7}$$

для функции u , причем функции u_n связаны рекуррентным соотношением

$$n(n-1)(1 + f_x^2 + f_y^2)u_n = (n-1)u_{n-1}\Delta f + \\ + 2(n-1)(f_x \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + f_y \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}) - \Delta u_{n-2}.$$

Из этого соотношения следует, что если $u_k \equiv u_{k+1} \equiv 0$, то $u_n \equiv 0$ при всех $n \geq k$. Следовательно, два соседних коэффициента ряда (7) не могут одновременно обращаться в нуль тождественно без того, чтобы ряд (7) не обрывался. При $k=0$ это утверждение превращается в теорему единственности решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Теорема 2. *Если ряд (7) представляет регулярную гармоническую функцию, то разность между показателями степени ξ в двух соседних членах не превосходит двух.*

Утверждение этой теоремы остается верным и для более общих рядов

$u = \sum_{n=0}^{\infty} [\phi(x, y, z)]^n u_n(x, y, z)$, представляющих регулярные гармонические

функции. А в случае, когда поверхность M является плоскостью, т.е. рас-

сматриваются ряды вида $u = \sum_{n=0}^{\infty} z^n u_n(x, y)$, утверждение теоремы остается

справедливым и при наличии в уравнении младших членов специального вида.

Заключение

В статье доказываются 2 теоремы задачи Коши для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными в комплексной области.

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
2. Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т. Задача Коши. М.: Мир, 1967. – 152 с.
3. Фукс Б.А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1962. – 420 с.

Плаксина И.М. Условия разрешимости одной переопределенной сингулярной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения первого порядка

4. Янушаускас А.И. К теории вырождающихся эллиптических уравнений // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т.15. – № 6. – С. 1394-1405.
5. Янушаускас А.И. К теории эллиптических уравнений коэффициенты, которых при младших производных имеют особенности высокого порядка // Сиб. матем. журн. – 1976. – Т.17. – № 5. – С. 1177-1187.

Кибирев Владимир Васильевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел. (8301-2)217573, dekanat_imi@bsu.ru

Kibirev Vladimir Vasilievich – candidate of physical and mathematical sciences, the professor of the applied mathematics department of the Buryat State University.

УДК 517.929

© И.М. Плаксина

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе рассматриваются линейные функционально-дифференциальные уравнения, определенные на конечном отрезке и являющиеся сингулярными по независимой переменной. Сингулярность сосредоточена на концах отрезка и в конечном числе внутренних точек. Для таких уравнений получены условия нетеровости и фредгольмовости. Также получены эффективные условия разрешимости и однозначной разрешимости.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, сингулярные уравнения, фредгольмовость, нетеровость, разрешимость.

I.M. Plaksina

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF ONE OVERDETERMINED SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FIRST ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

This article discusses some problems for functional-differential equations with singularity of special type. Equation defined on the segment and singularity concentrated at the $n+1$ points in the segment. There are conditions of Fredholm property and effective conditions of solvability and unique solvability.

Keywords: Functional differential equation, singular equation, Fredholm property, solvability.

1. Предварительные определения

Пусть L^p , $1 < p < \infty$ – пространство суммируемых с p -й степенью

функций $z:[0;b] \rightarrow R$ с нормой $\|z\|_{L^p} = \left(\int_0^b |z(t)|^p dt \right)^{1/p}$; D^p – пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0;b] \rightarrow R$, производная которых является элементом пространства L^p , с нормой $\|x\|_{D^p} = \|\dot{x}\|_{L^p} + |x(0)|$.

Пусть, далее, функция $a:[0;b] \rightarrow R$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\lim_{t \rightarrow b_0+} ta(t) = k_0$, $\lim_{t \rightarrow b_j} ta(t) = k_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, $\lim_{t \rightarrow b_n-0} ta(t) = k_n$; 2)

функция $\tilde{a}(t) = a(t) - \sum_{j=0}^n \frac{k_j}{t - b_j}$ суммируема на отрезке $[0, b]$; 3) функция

$\tilde{a}(t)$ суммируема со степенью p на каждом отрезке $[b_j + \varepsilon_j, b_{j+1} - \varepsilon_{j+1}]$, $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = b$, $\varepsilon_j > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Таким образом, функция $a(t)$ не суммируема на отрезке $[0, b]$ и терпит разрыв второго рода в точках b_0, b_1, \dots, b_n . В качестве примера можно рассмотреть функцию $a(t) = ctgt$, $t \in [0, \pi m]$, m – некоторое фиксированное натуральное число. Здесь $b_j = \pi j$, $k_j = 1$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Пусть, наконец, оператор $T:D^p \rightarrow L^p$ вполне непрерывен. В качестве оператора T могут, например, рассматриваться операторы, определяющие сосредоточенное отклонение $(T_q x)(t) = q(t)x_g(t)$ или распре-

деленное отклонение аргумента $(T_r x)(t) = \int_0^b x(s)d_s r(t; s)$. Здесь $q \in L^p$,

функция $g(t)$ измерима на отрезке $[0; b]$, $x_g(t) = \begin{cases} x(g(t)), & g(t) \in [0; b]; \\ 0, & g(t) \notin [0; b]; \end{cases}$

функция $r(t; s)$ измерима в квадрате $[0; b] \times [0; b]$ и $r(\cdot; s) \in L^p$,

$\text{var}_{s=0}^b r(\cdot; s) \in L^p$, $r(t; b) = 0$. Эти условия гарантируют [1, стр. 56] полную

непрерывность операторов T_q и T_r соответственно. Отметим, что приведенные условия обеспечивают произвольное отклонение аргумента. Частными случаями операторов T_q и T_r являются операторы, определяющиеся запаздывание: $g(t) \leq t$ для оператора T_q и оператора T_r вида

$$(T_r x)(t) = \int_0^t x(s)d_s r(t; s).$$

2. Постановка задачи

Основным объектом исследования является полуоднородная краевая задача для сингулярного по независимой переменной функционально-дифференциального уравнения первого порядка

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + a(t)x(t) + (Tx)(t) = f(t) \quad t \in [0, b] \quad (1)$$

$$lx \equiv \text{col}\{x(b_0), x(b_1), \dots, x(b_n)\} = 0 \quad (2)$$

Краевую задачу (1)-(2) будем рассматривать как операторное уравнение $[\mathcal{L}, l](x) = \{f, 0\}$, где $[\mathcal{L}, l]: D^p \rightarrow L^p \times R^{n+1}$, $[\mathcal{L}, l](x) = \text{col}\{\mathcal{L}x, lx\}$. Так как коэффициент $a(t)$ не суммируем на отрезке $[0, b]$, то уравнение (1) является сингулярным по независимой переменной. Сингулярность сосредоточена в точках b_0, b_1, \dots, b_n . Так как уравнение (1) является уравнением первого порядка, а вектор-функционал $l: D^p \rightarrow R^{n+1}$ определяет $n+1$ краевое условие, то задача (1)-(2) является переопределенной.

Необходимо подчеркнуть тот факт, что задача (1)-(2) рассматривается только при нулевых краевых условиях. Поэтому определим банахово подпространство D_0^p пространства D^p функций, удовлетворяющих однородному условию (2). Теперь задачу (1)-(2) можно рассматривать как уравнение (1) в пространстве D_0^p .

Уравнения вида (1) в пространстве D_0^p встречаются при изучении периодических химических реакций. Практические задачи, при моделировании которых возникают сингулярные уравнения, приведены в монографии [2]. Уравнение (1) является обобщением некоторых из рассматриваемых [2] ситуаций.

В монографии [2] также приведен подробный библиографический список работ с начала XX века, в которых изучались сингулярные уравнения. Более поздняя библиография приведена в книге [1].

Основная идея исследования основана на результатах статьи [3], в которой рассматривалось уравнение с сингулярностью, сосредоточенной в точке $t=0$. В этой статье показано, что при $T \equiv 0$ условия разрешимости сингулярного уравнения определяются асимптотикой коэффициента $a(t)$ в точке $t=0$ (числом k_0). В статье [4] отмеченный результат обобщается на случай уравнения вида (1) при $n=1$, $0=b_0 < b_1=b$. В предлагаемой работе уравнение (1) рассматривается при любом конечном значении n .

3. Вспомогательные результаты

Положим $u_j = k_j + \frac{1}{p'}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Следуя [5], уравнение (1) будем называть нетеровым, если оператор $\mathcal{L}: D_0^p \rightarrow L^p$ нормально разрешим и размерности ядра и коядра этого оператора конечны. Уравнение (1) фредгольмово, если оно нетерово и размерность ядра оператора \mathcal{L} совпадает с размерностью коядра. Свойства нетеровости и фредгольмовости важны для получения условий разрешимости уравнения (1). В работе [4] показано, что наличие (отсутствие) свойств нетеровости и фредгольмовости уравнения (1) при $n = 1$ определяется соотношением между числами k_0, k_1 и числом $-\frac{1}{p'}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$, а именно доказаны следующие утверждения:

Утверждение 1. Пусть $n = 1$. Уравнение (1) в пространстве D_0^p нетерово тогда и только тогда, когда $u_0 \neq 0$ и $u_1 \neq 0$. Индекс уравнения (1) равен 1 при $u_0 < 0, u_1 < 0$. Уравнение (1) фредгольмово при $u_0 < 0, u_1 > 0$ и при $u_0 > 0, u_1 < 0$. Индекс уравнения (1) равен -1 при $u_0 > 0, u_1 > 0$.

Утверждение 2. Пусть $n = 1, T \equiv 0, u_0 < 0, u_1 > 0$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части $f \in L^p$, определяемое равенством $x(t) = -\int_t^b \left(\frac{t}{s}\right)^{-k_0} \left(\frac{b-t}{b-s}\right)^{-k_1} \exp\left\{-\int_s^t \tilde{a}(\eta) d\eta\right\} f(s) ds$. При $n = 1, T \equiv 0, u_0 > 0, u_1 < 0$ уравнение (1) также однозначно разрешимо при любой правой части $f \in L^p$ и его решение имеет вид $x(t) = \int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{-k_0} \left(\frac{b-t}{b-s}\right)^{-k_1} \exp\left\{-\int_s^t \tilde{a}(\eta) d\eta\right\} f(s) ds$.

4. Основной результат

Пусть $n > 1$. Рассмотрим последовательность u_0, u_1, \dots, u_n . Определим ν^+ как количество пар (u_j, u_{j+1}) , таких, что $u_j < 0, u_{j+1} < 0$, и ν^- как количество пар (u_j, u_{j+1}) , таких, что $u_j > 0, u_{j+1} > 0, j = 0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 1. Если $\prod_{j=0}^n u_j \neq 0$, то оператор \mathcal{L} нетеров индекса $\nu^+ - \nu^-$.

Если $\prod_{j=0}^n u_j = 0$, то оператор \mathcal{L} не является нормально разрешимым.

Доказательство. Пусть $\prod_{j=0}^n u_j \neq 0$. Определим вспомогательный оператор $\delta: D_0^p \rightarrow L^p$ вида

$$(\delta x)(t) = \dot{x}(t) + \left(\sum_{j=0}^n \frac{k_j}{t-b_j} + \tilde{a}(t) \right) x(t) \quad t \in [0, b]$$

и рассмотрим уравнение

$$(\delta x)(t) = f(t) \quad t \in [0, b]$$

Очевидно, что ядро оператора δ состоит из функций $X_0(t), X_1(t), \dots, X_{n-1}(t)$, где каждая функция $X_j(t)$ при $t \in [0, b] \setminus [b_j, b_{j+1})$ тождественно равна нулю, $j = 0, 1, \dots, n-1$, а при $t \in [b_j, b_{j+1})$ является решением уравнения

$$(\delta_j x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \left(\frac{k_j}{t-b_j} + \frac{-k_{j+1}}{b_{j+1}-t} + \tilde{a}_j(t) \right) x(t) = 0.$$

Если при некотором значении $j = 0, 1, \dots, n-1$ функция $X_j(t)$ не является элементом пространства D_0^p , то положим $X_j(t) \equiv 0$ на всем отрезке $[0, b]$.

Здесь $\tilde{a}_0(t) = \sum_{i=2}^n \frac{k_i}{t-b_i} + \tilde{a}(t)$, $\tilde{a}_j(t) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{k_i}{t-b_i} + \sum_{i=j+2}^n \frac{k_i}{t-b_i} + \tilde{a}(t)$ при $j = 1, 2, \dots, n-2$, $\tilde{a}_{n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{k_i}{t-b_i} + \tilde{a}(t)$. Очевидно, что каждая функции $\tilde{a}_j(t)$ суммируема со степенью p на соответствующем отрезке $[b_j, b_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Размерность ядра (коядра) оператора δ равна сумме размерностей ядер (коядер) операторов δ_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$. Поэтому $ind \delta = \sum_{j=0}^{n-1} ind \delta_j$.

Индексы операторов δ_j определяются в соответствии с утверждением 1, а именно при $u_j > 0$ и $u_{j+1} > 0$ индекс оператора δ_j равен -1 ; при $u_j < 0$ и $u_{j+1} < 0$ индекс оператора δ_j равен 1 , если u_j и u_{j+1} разных знаков, то индекс оператора δ_j равен нулю. Таким образом, индекс оператора δ равен $\nu^+ - \nu^-$.

В силу теоремы С.Г. Крейна [1, с. 13] свойство нетеровости оператора δ устойчиво по отношению к вполне непрерывному возмущению T и при таком возмущении индекс оператора не меняется. Поэтому $ind \mathcal{L} = \nu^+ - \nu^-$.

Отметим, что в случае, когда хотя бы одно из чисел u_j равно нулю, то соответствующий оператор δ_j не является нормально разрешимым, следовательно, также не являются нормально разрешимыми оператор δ и оператор \mathcal{L} .

Теорема 2. Пусть $\nu^+ = \nu^-$ и однородное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) = 0 \quad t \in [0, b]$$

имеет только тривиальное решение. Тогда уравнение (1) однозначно разрешимо при любой правой части.

Доказательство следует из теоремы 1.

5. Пример применения теоремы 1

Пусть $a(t) = \frac{k}{|\sin t|}$, $b = \pi n$, n – некоторое фиксированное натуральное число. Положим $b_0 = 0, b_1 = \pi, \dots, b_n = b = \pi n$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{k}{|\sin t|} x(t) + (Tx)(t) = f(t) \quad t \in [0, \pi n] \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в пространстве D_0^p функций $x \in D^p$, удовлетворяющих дополнительным условиям $x(b_m) = 0, m = 0, 1, \dots, n$.

Теорема 4. Уравнение (3) нормально разрешимо тогда и только тогда, когда $|k| \neq \frac{1}{p}$. Если $|k| < \frac{1}{p}$, то уравнение (3) нетерово и его индекс равен $-n$. Если $|k| > \frac{1}{p}$, то уравнение (3) фредгольмово.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный оператор $\delta_1: D_0^p \rightarrow L^p$, определяемый равенством $(\delta_1 x)(t) = \dot{x}(t) + \frac{k}{|\sin t|} x(t)$. Запишем функцию $a(t)$ в следующем виде:

$$a(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{k}{t - \pi m} + \frac{-k}{t - \pi(m+1)} + \tilde{a}_m(t) \right) \chi_m(t) \quad (4)$$

Плаксина И.М. Условия разрешимости одной переопределенной сингулярной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения первого порядка

Здесь $\tilde{a}_m(t) = \frac{k}{|\sin t|} - \frac{k}{t - \pi m} - \frac{-k}{t - \pi(m+1)}$ при $t \in [b_m, b_{m+1}]$, и $\tilde{a}_m(t) = 0$ при $t \in [0, b] \setminus [b_m, b_{m+1}]$, $m = 0, 1, \dots, n$. Нетрудно видеть, что функции $\tilde{a}_m(t)$ ограничены в существенном на отрезке $[0, b]$.

Из равенства (4) видно, что асимптотика функции $a(t)$ вблизи точек сингулярности определяется чередующимися константами k и $-k$. Неравенство $|k| > \frac{1}{p'}$ гарантирует, что последовательность u_0, u_1, \dots, u_n окажется знакопеременной, и тогда $\nu^+ = \nu^- = 0$. Неравенство $|k| < \frac{1}{p'}$ влечет положительность чисел u_0, u_1, \dots, u_n , и тогда $\nu^+ = 0$, $\nu^- = n$. Если $|k| = \frac{1}{p'}$, то хотя бы одно из чисел u_0, u_1, \dots, u_n обращается в нуль. Ссылка на теорему 1 завершает доказательство.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 384 с.
2. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1987. – Т. 30. – С. 105-201.
3. Абдуллаев А.Р. О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае // Труды института прикладной математики им. И.М. Векуа. – 1990. – № 37. – С. 5-12.
4. Плаксина И.М. Условия однозначной разрешимости некоторых линейных сингулярных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Бурятского государственного университета. – 2011. – Вып. 9. – С. 149-155.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. – 816 с.
6. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

Плаксина Ирина Михайловна – аспирант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет. 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, тел. (8-902) 8320964, impl@list.ru

Plaksina Irina Mikhailovna – postgraduate student, Perm National Researching Polytechnical University. 29, Komsomolsky prospect, Perm, 614990, phone (8-902) 8320964, impl@list.ru

УДК 517.968

© С.В. Солодуша

**ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ЗАДАЧЕ
МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ***

В статье рассматривается задача автоматического регулирования нелинейной динамической системы с обратной связью, описанная с помощью полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода. Приведены теоремы существования и единственности решений одного класса полиномиальных уравнений Вольтерра I рода.

Ключевые слова: уравнения Вольтерра I рода, нелинейные интегральные неравенства, задача Коши.

S.V. Solodusha

**POLYNOMIAL VOLTERRA EQUATIONS OF THE FIRST KIND FOR
MODELING NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH FEEDBACK**

We consider the problem of automatic control of nonlinear dynamic systems with feedback. This problem is described by polynomial Volterra integral equations of the first kind. Shows the existence and uniqueness of solutions of some class of polynomial Volterra integral equations of the first kind.

Keywords: Volterra equations of the first kind, nonlinear integral inequalities, Cauchy problem.

Введение

В теории моделирования систем управления традиционно используется аппарат дифференциальных уравнений. Тем не менее разработка альтернативных методов моделирования, связанных с применением интегральных уравнений типа Вольтерра, является актуальной прикладной задачей (например, [1, 2]).

Как известно, одним из наиболее универсальных методов математического моделирования нелинейных динамических систем типа черного ящика является представление отклика системы $y(t)$ на входной сигнал $x(t)$ в виде полинома Вольтерра. Полином Вольтерра N -й степени, отображающий $x(t)$ в $y(t)$, имеет вид

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq p} f_{i_1, \dots, i_n}(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00377.

где

$$f_{i_1, \dots, i_n}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1, \dots, i_n}(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{j=1}^n x_{i_j}(s_j) ds_j, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

t имеет физический смысл времени, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ есть p -мерная вектор-функция времени, $y(t)$ – скалярная функция времени, причем $y(0) = 0$, $y'(t) \in C_{[0, T]}$. Ядра Вольтерра K_{i_1, \dots, i_n} в (2) симметричны лишь по тем переменным, которые соответствуют совпадающим индексам. При построении модели (1), (2) в теории динамических систем надо уметь находить ядра Вольтерра. Для решения этой задачи можно использовать метод [3, 4], основанный на задании специальных тестовых входных сигналов.

Предположим далее, что задача идентификации ядер Вольтерра K_{i_1, \dots, i_n} в (2) решена. Будем считать также, что возмущения $x_i(t)$, $i = \overline{2, p}$ в (2) известны. Помимо нужной гладкости исходных данных в (1), (2) будем предполагать, что $K_1(t, t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$. Рассмотрим наиболее интересный для приложений случай $N = 2$ в (1). В случае стационарной динамической системы вместо (1), (2) имеем

$$\sum_{i=1}^p V_{1,i} x_i + \sum_{i=1}^p V_{2,i} x_i^2 + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{i-1} V_{2,ji}(x_j, x_i) = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$V_{1,i} x_i \equiv \int_0^t K_i(t-s) x_i(s) ds,$$

$$V_{2,i} x_i^2 \equiv \int_0^t \int_0^t K_{ii}(t-s_1, t-s_2) x_i(s_1) x_i(s_2) ds_1 ds_2,$$

$$V_{2,ji}(x_j, x_i) \equiv \int_0^t \int_0^t K_{ji}(t-s_1, t-s_2) x_j(s_1) x_i(s_2) ds_1 ds_2, \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, p}.$$

Рассмотрим задачу стабилизации (регулирования), связанную с поиском управляющего воздействия $x_1(t)$, поддерживающего выходной сигнал $y(t)$ на заданном уровне y^* . Такая постановка возникает в связи с задачами автоматического управления техническими объектами. В этом случае уравнение (3) является полиномиальным уравнением Вольтерра I рода, непрерывное решение которого, вообще говоря, носит локальный характер. В работах [5-8] приведены результаты в области теории и численных методов построения непрерывных решений полиномиальных уравнений (при $N = 2, 3$ в (1)) для случая, когда $x(t)$ – скалярная функция времени.

1. Постановка задачи

В работе [9] рассмотрена численная схема решения полиномиального уравнения (3) для $p = 2$ при условии отсутствия обратной связи. Развивая исследование, начатое в [9], рассмотрим алгоритм получения управляющего воздействия $x_1(t)$ с учетом апостериорных данных об отклонении выходной переменной $y(t)$ от желаемого значения y^* , так что $x_1(t) = u(t - h)$, $u(\xi) = 0$, $\xi \in [-h, 0]$, h – известное постоянное запаздывание. В этом случае задача регулирования нелинейного динамического объекта сводится к поиску непрерывного решения $u^*(t)$ полиномиального уравнения Вольтерра I рода

$$V_{1,1}u + \sum_{i=2}^p V_{1,i}x_i + \sum_{i=2}^p V_{2,1i}(u, x_i) + V_{2,1}u^2 + \sum_{i=2}^p V_{2,i}x_i^2 + \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^{i-1} V_{2,ji}(x_j, x_i) = f(t), \tag{4}$$

где $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - h)$, $t \in [0, T]$. Сигнал $\varepsilon(t) = y^* - y(t)$, $\varepsilon(\xi) = 0$, $\xi \in [-h, 0]$ считаем рассогласованием или ошибкой управления.

2. Полиномиальные уравнения Вольтерра I рода

Чтобы понять специфику полиномиального уравнения (3), рассмотрим случай постоянных ядер: $K_i = k_i$, $k_1 > 0$, $K_{ji} = k_{ji}$, $1 \leq j \leq i \leq p$. Все функциональные пространства считаем вещественными.

Не уменьшая общности, зададим $k_1 = 1$, так что (3) принимает вид

$$\left[1 + \sum_{i=2}^p k_{1i} \int_0^t x_i(s) ds \right] \int_0^t x_1(s) ds + k_{11} \left(\int_0^t x_1(s) ds \right)^2 = \tilde{f}(t), \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

где

$$\tilde{f}(t) = y(t) - \sum_{i=2}^p k_i \int_0^t x_i(s) ds - \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^i k_{ji} \left(\int_0^t x_i(s) ds \right) \left(\int_0^t x_j(s) ds \right). \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть

$$\tilde{f}(t) \in C_{[0,T]}^{(1)}, \quad \tilde{f}(0) = 0. \tag{7}$$

Тогда решение (5), (6) определяется формулой

$$x_1^*(t) = \frac{\tilde{f}'(t)}{\alpha(t)} + \frac{1}{2k_{11}} \beta'(t) \left(\frac{1}{\alpha(t)} (1 + \beta(t)) - 1 \right), \tag{8}$$

где

$$\theta_i(t) = \int_0^t x_i(s) ds, \quad i = \overline{2, p}, \quad (9)$$

$$\beta(t) = \sum_{i=2}^p k_{1i} \theta_i(t), \quad (10)$$

$$\alpha(t) = \sqrt{(1 + \beta(t))^2 + 4k_{11} \tilde{f}(t)}. \quad (11)$$

Доказательство. Убедимся, что подстановка (8)-(11) в (5) обращает его в тождество. Имеем:

$$I = \int_0^t x_1^*(s) ds = \frac{1}{2k_{11}} \int_1^{-\beta(t)+\alpha(t)} du = \frac{1}{2k_{11}} (-\beta(t) + \alpha(t) - 1), \quad (12)$$

отсюда, с учетом (9)-(11),

$$\left[1 + \sum_{i=2}^p k_{1i} \int_0^t x_i(s) ds \right] I + k_{11} I^2 \equiv \tilde{f}(t).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Условие $\tilde{f}(0) = 0$ использовалось для вычисления в (12) нижнего предела интегрирования, соответствующего замене $u = -\beta(s) + \alpha(s)$.

Для установления принадлежности решения к классу $C_{[0, T]}$ нужны дополнительные предположения, обеспечивающие строгую положительность подкоренного выражения в (11).

Убедимся, что в некоторых случаях непрерывное решение уравнения (5), (6) носит глобальный характер. Следуя [6], рассмотрим следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\tilde{f}(t)$ знакопостоянна на $[0, T]$. Если при этом

$$\text{sign } k_{11} = \text{sign } \tilde{f}(t),$$

то

$$x_1^*(t) \in C_{[0, T]} \quad \forall T < \infty.$$

Доказательство немедленно следует из (8) – (11).

Теорема 2 доказана.

Заметим, что в линейном случае условие $y(0) = 0$ гарантирует отсутствие решений в классе обобщенных функций. Следующая теорема показывает, что при переходе к (5), (6) это заведомо не так.

Теорема 3. Если $x_1^*(t)$ – решение уравнения (5), (6), то

$$x_1^{**}(t) = - \left(x_1^*(t) + \frac{1}{k_{11}} \delta(t) + \frac{1}{k_{11}} \sum_{i=2}^p k_{1i} x_i(t) \right) \quad (13)$$

также решение (5), (6). Здесь $\delta(t)$ есть δ -функция Дирака.

Доказательство. Покажем, что подстановка (13) в (5) обращает его в тождество. Действительно, в силу (13)

$$I = \int_0^t x_1^{**}(s)ds = -\int_0^t x_1^*(s)ds - \frac{1}{k_{11}} - \frac{1}{k_{11}} \sum_{i=2}^p k_{1i} \int_0^t x_i(s)ds,$$

следовательно

$$\begin{aligned} & \left[1 + \sum_{i=2}^p k_{1i} \int_0^t x_i(s)ds \right] I + k_{11} I^2 = \\ & = \left[1 + \sum_{i=2}^p k_{1i} \int_0^t x_i(s)ds \right] \int_0^t x_1^*(s)ds + k_{11} \left(\int_0^t x_1^*(s)ds \right)^2 \equiv \tilde{f}(t), \end{aligned}$$

поскольку $x_1^*(t)$ – решение (5), (6).

Теорема 3 доказана.

Единственность решения (5), (6) в классе $C_{[0,T]}$ обеспечивает следующая теорема.

Теорема 4. Если решение (5), (6) в $C_{[0,T]}$ существует, то оно единственно.

Доказательство. Сделаем противоположное предположение, что существуют два решения $x_1^*(t)$, $x_1^{**}(t) \neq x_1^*(t)$, принадлежащие $C_{[0,T]}$. Тогда разность $x_1^*(t) - x_1^{**}(t)$ удовлетворяет тождеству

$$v(t) \int_0^t (x_1^*(s) - x_1^{**}(s))ds \equiv 0, \quad t \in [0, T],$$

где

$$v(t) = 1 + \beta(t) + k_{11} \int_0^t (x_1^*(s) + x_1^{**}(s))ds. \quad (14)$$

В силу непрерывности $x_1^*(t)$ и $x_1^{**}(t)$ значение $v(t)$ в (14) не может тождественно равняться нулю, так как $v(0) = 1$. Следовательно,

$$\int_0^t (x_1^*(s) - x_1^{**}(s))ds \equiv 0, \quad t \in [0, T],$$

а значит, $x_1^*(t) \equiv x_1^{**}(t)$, что противоречит предположению.

Теорема 4 доказана.

3. Мажорантные уравнения

Предположим далее, что допустимые входные возмущения есть

$$x_i(t) \in X_i = \{\lambda_i e(t), \lambda_i \in R, t \in [0, T]\}, \quad i = \overline{2, p},$$

здесь $e(t)$ – функция Хевисайда.

По аналогии с [5-8], рассмотрим мажорантное интегральное уравнение для (5), (6) в виде

$$\left(1 - t \sum_{i=2}^p M_{1i} L_i\right) \int_0^t \varphi(s) ds - M_{11} \left(\int_0^t \varphi(s) ds\right)^2 = \tilde{F}t + t^2 \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^i M_{ji} L_j L_i, \quad (15)$$

где

$$M_i = |k_i| > 0, \quad L_i = |\lambda_i| > 0, \quad M_{ji} = |k_{ji}| > 0, \quad 1 \leq j \leq i \leq p,$$

$$\tilde{F} = F + \sum_{i=2}^p M_i L_i, \quad F = \max_{0 \leq t \leq T} |y'(t)| > 0.$$

Заменой вида (9) решение уравнения (15) может быть сведено к нахождению решения задачи Коши

$$\theta'(t) = \frac{\tilde{F} + 2t \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^i M_{ji} L_j L_i + \theta(t) \sum_{i=2}^p M_{1i} L_i}{1 - 2M_{11} \theta(t) - t \sum_{i=2}^p M_{1i} L_i}, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (16)$$

и его дифференцированию. Так как замена вида (9) сводит (15) к квадратному относительно $\theta(t)$ уравнению

$$\left(1 - t \sum_{i=2}^p M_{1i} L_i\right) \theta(t) - M_{11} \theta(t)^2 = \tilde{F}t + t^2 \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^i M_{ji} L_j L_i,$$

то его решение, удовлетворяющее условию $\theta(0) = 0$, имеет вид

$$\theta^*(t) = \frac{1}{2M_{11}} \left(1 - t \sum_{i=2}^p M_{1i} L_i - \chi(t)\right), \quad (17)$$

где

$$\chi(t) = \sqrt{\left(t \sum_{i=2}^p M_{1i} L_i - 1\right)^2 - 4tM_{11} \left(\tilde{F} + t \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^i M_{ji} L_j L_i\right)}. \quad (18)$$

Ясно, что (17), (18) и является точным решением мажорантной задачи Коши (16).

Таким образом, если исходным данным в (5), (6) отвечает набор (F, M_i, M_{ji}, L_i) , $1 \leq j \leq i \leq p$, то непрерывное решение уравнения (5), (6)

$x_1^*(t)$ заведомо существует и единственно на $[0, T]$, где

$$\begin{aligned}
 T < T^* &= \frac{1}{\eta} \left(\sum_{i=2}^p M_{1i} L_i + 2M_{11} \tilde{F} - 2\gamma \right), \\
 \gamma &= \sqrt{M_{11} \tilde{F} \left(\sum_{i=2}^p M_{1i} L_i + M_{11} \tilde{F} \right) + M_{11} \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^i M_{ji} L_j L_i}, \\
 \eta &= \left(\sum_{i=2}^p M_{1i} L_i \right)^2 - 4M_{11} \sum_{i=2}^p \sum_{j=2}^i M_{ji} L_j L_i, \tag{19}
 \end{aligned}$$

причем справедливо неравенство

$$|x_1^*(t)| \leq \phi^*(t), \quad t \in [0, T^*),$$

где, с учетом (18), (19),

$$\phi^*(t) = \frac{1}{2M_{11}\chi(t)} \left(\sum_{i=2}^p M_{1i} L_i - t\eta + 2\tilde{F}M_{11} \right) - \frac{1}{2M_{11}} \sum_{i=2}^p M_{1i} L_i.$$

4. Численный алгоритм учета обратной связи

Допустим, что численное решение полиномиального уравнения (4) существует. Найдем его кубатурным методом средних прямоугольников.

Введем сетку узлов $t_i = ih$, $t_{i-\frac{1}{2}} = \left(i - \frac{1}{2}\right)h$, $i = \overline{1, n}$, $nh = T$. Аппроксими-

руем интегралы в (4) суммами. Для нахождения аппроксимации $u^*(t)$ в

$\left(i - \frac{1}{2}\right)$ -м узле получим квадратное уравнение относительно $u_{i-\frac{1}{2}}^h$:

$$\begin{aligned}
 &h^2 K_{11\frac{11}{22}} \left(u_{i-\frac{1}{2}}^h \right)^2 + h \left(K_{1\frac{1}{2}} + 2h \sum_{j=2}^i K_{11\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} u_{i-j+\frac{1}{2}}^h + h \sum_{\mu=2}^p \sum_{k=1}^i K_{1\mu\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} x_{\mu_{i-k+\frac{1}{2}}}^h \right) u_{i-\frac{1}{2}}^h = \\
 &= f(ih) - z(ih) - h \sum_{j=2}^i \left(K_{1j-\frac{1}{2}} + h \sum_{k=2}^i K_{11\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} u_{i-k+\frac{1}{2}}^h + h \sum_{\mu=2}^p \sum_{k=1}^i K_{1\mu\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} x_{\mu_{i-k+\frac{1}{2}}}^h \right) u_{i-j+\frac{1}{2}}^h, \tag{20}
 \end{aligned}$$

где

$$z(ih) = h \sum_{\mu=2}^p \sum_{j=1}^i \left(K_{\mu j-\frac{1}{2}} + h \sum_{k=1}^i K_{\mu\mu\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} x_{\mu_{i-k+\frac{1}{2}}}^h + h \sum_{\nu=2}^{\mu-1} \sum_{k=1}^i K_{\nu\mu\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} x_{\nu_{i-k+\frac{1}{2}}}^h \right) x_{\mu_{i-j+\frac{1}{2}}}^h,$$

$$y(lh) = h \sum_{j=2}^i \left(K_{1j-\frac{1}{2}} + h \sum_{k=2}^i K_{11\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} u_{i-k+\frac{1}{2}}^h + h \sum_{\mu=2}^p \sum_{k=1}^i K_{1\mu\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} x_{\mu_{i-k+\frac{1}{2}}}^h \right) u_{i-j+\frac{1}{2}}^h - z(lh),$$

$$y(h) = z(h), \quad f(h) = \varepsilon(h), \quad f(lh) = \varepsilon(lh) - \varepsilon((l-1)h), \quad \varepsilon(ih) = y^* - y(ih), \quad l = \overline{2, n}.$$

Выбор нужного корня в (20) определяется условием

$$u_{\frac{1}{2}}^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u(0) = \frac{y'(0)}{K_1(0)}.$$

Дальнейшее развитие работы связано с исследованием нелинейных процессов теплообмена. В качестве эталонной динамической системы будет рассмотрена математическая модель переходного процесса в элементе теплообменного аппарата, предложенная в [10].

Заключение

В работе исследуется один класс нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода, связанный с задачей моделирования нелинейной динамики в векторном случае. Разработан адаптивный алгоритм учета обратной связи для применения полиномов Вольтерра в задачах автоматического управления нелинейными динамическими системами типа черного ящика. Для установления области существования непрерывного решения применена техника получения неулучшаемых оценок решений нелинейных интегральных неравенств, разработанная в [5–8]. Также показано, что, несмотря на условие $y(0) = 0$, данные полиномиальные уравнения Вольтерра I рода заведомо имеют решение в классе обобщенных функций.

Литература

1. Верлань А.Ф., Миргород В.Ф., Контрерас Д.Э. Моделирование систем автоматического управления с реальной обратной связью на основе интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Труды Одесского политехнического университета. – 2000. – № 3. – С. 120–123.
2. Velbas S.A., Bulka Yu. Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – Vol. 217. – P. 4791–4804.
3. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: теория и численные методы. – Новосибирск: Наука, 1999. – 193 с.
4. Апарцин А.С., Солодуша С.В. К идентификации несимметричных ядер Вольтерра в интегральных моделях нелинейной динамики // Тр. Сиб. конф. по прикладной и индустриальной математике. – Новосибирск, 1997. Т. 1. – С. 1–13.
5. Апарцин А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 118–125.
6. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Известия ИГУ. Серия: Математика. – 2007. – Т. 1. – № 1. – С. 13–42.
7. Апарцин А.С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. – 2007. – № 8. – С. 1380–1388.

8. Апарцин А.С. Полилинейные уравнения Вольтерра I рода и некоторые задачи управления // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 3–16.
9. Солодуша С.В. Приложение нелинейных уравнений Вольтерра I рода к задаче управления динамикой теплообмена // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 6. – С. 133–140.
10. Таиров Э.А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Изв. АН СССР: Энергетика и транспорт. – 1989. – № 1. – С. 150–156.

Солодуша Светлана Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. лабораторией «Неустойчивые задачи вычислительной математики» Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН; тел. (3952) 428440, e-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru

Solodusha Svetlana Vitalievna – candidate of sciences in physics and mathematics, assistant professor, head of the laboratory of «Ill-posed problems of computational mathematics» of Melentiev Energy Systems Institute SB RAS.

4. АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

УДК 513.7

© Б.В. Зятуев

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ КЕЛЕРОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Статья посвящена построению почти эрмитовой структуры инвариантного типа [6] на касательном расслоении над эрмитовой кривой. Найдены необходимые и достаточные условия келеровости этой почти эрмитовой структуры.

Ключевые слова: касательное расслоение, многообразие, келерова структура, почти эрмитова структура.

B.V. Zayatyuev

ONE EXAMPLE KÄHLERIAN SURFACE

Article is devoted to construction almost Hermitian structure invariant type [6] on the tangent bundle over the Hermitian curve. The necessary and sufficient conditions Kählerian the almost Hermitian structure.

Keywords: tangent bundle, manifold, Kähler's structure, almost Hermitian structure.

Напомним, что почти эрмитово многообразие (M^n, J, g) называется *локально-конформно келеровым* (короче – л.к.к.), если существует его открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ и гладкие функции $\sigma_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\{J, g_\alpha = e^{-\sigma_\alpha} g\}$ келерова структура на U_α . В случае, когда покрытие состоит из одного элемента $\{M^n\}$, структура называется *глобально-конформно келеровой*.

Вайсманом [1] были получены следующие две характеристики таких многообразий:

1. Необходимым и достаточным условием локально-конформной келеровости многообразия (M^n, J, g) , $(n > 4)$ является справедливость тождества

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega, \quad (1)$$

где Ω – фундаментальная 2-форма структуры, $\omega = \frac{1}{\frac{n}{2}-1} \mathfrak{L}\Omega \circ J$ –

1-форма, называемая *формой Ли*. Можно показать, что при $n > 4$ форма Ли замкнута вследствие (1) и невырожденности 2-формы Ω .

В случае $n = 4$, к (1) добавляется еще одно условие: $d\omega = 0$.

2. Другой эквивалентной характеристикой таких многообразий при $n > 4$ является условие почти комплексности так называемой *связности Вейля*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\omega(X)Y - \frac{1}{2}\omega(Y)X + \frac{1}{2}g(X, Y)\xi, \quad (2)$$

где ∇ – риманова связность метрики g , ξ – вектор, двойственный форме Ли, называемый вектором Ли. При $n = 4$ также добавляется условие $d\omega = 0$.

Если форма Ли точна, то есть $\omega = d\sigma$, то структура $\{J, g\}$ является глобально-конформно келеровой и $\{J, e^{-\sigma}g\}$ – келерова структура на M^n .

Вычислив ковариантную производную структурного оператора J в связности Вейля, получим

$$\tilde{\nabla}_X (J)Y = \nabla_X (J)Y + \frac{1}{2}(\omega(Y)JX - \omega(JY)X + \Omega(X, Y)\xi - g(X, Y)J\xi). \quad (3)$$

Легко проверить, что условие $\tilde{\nabla}_X J = 0$, с учетом (3), можно записать в следующем эквивалентном виде

$$g(\nabla_X (J)Y, Z) = \frac{-1}{2(n-1)}(g(X, Y)\delta F(Z) - g(X, Z)\delta F(Y) - g(X, JY)\delta F(JZ) + g(X, JZ)\delta F(JY)),$$

где $F(X, Y) = g(JX, Y) = -\Omega(X, Y)$.

Как известно [2], данное условие является определяющим условием принадлежности многообразия (M^n, J, g) к классу W_4 , в классификации Грея-Хервеллы. Таким образом, мы замечаем, что в случае $n > 4$, класс локально-конформно келеровых многообразий совпадает с классом W_4 . Это факт, исходя из совершенно других соображений, был также получен в работе [8]. В случае $n = 4$, как известно ([2]), класс W_4 совпадает с классом эрмитовых поверхностей.

Пусть $(T(M^n), \bar{J}, \bar{g})$ – касательное расслоение над почти эрмитовым многообразием (M^n, J, g) , снабженное почти эрмитовой структурой инвариантного типа [3], где

$$\begin{aligned} \bar{J}(X^H) &= (JX)^H; \\ \bar{J}(X^V) &= (JX)^V; \end{aligned}$$

$X \in \chi(M); (\dots)^H, (\dots)^V$ – горизонтальный и вертикальный лифты [4].

$$\begin{aligned} \bar{g}(X^H, Y^H) &= \lambda g(X, Y); \\ \bar{g}(X^H, Y^V) &= 0; \\ \bar{g}(X^V, Y^V) &= g(X, Y); \end{aligned}$$

где λg – риманова метрика, полученная конформным преобразованием метрики g .

Относительно римановой связности $\bar{\nabla}$ метрики \bar{g} имеют место следующие формулы [5]

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H)_Z &= (\nabla'_X Y)^H - \frac{1}{2}(R(X, Y)Z)^V; \\(\bar{\nabla}_{X^H} Y^V)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, Y)X)^H + (\nabla_X Y)^V; \\(\bar{\nabla}_{X^V} Y^H)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, X)Y)^H; \\ \bar{\nabla}_{X^V} Y^V &= 0;\end{aligned}\tag{4}$$

где $X, Y \in \mathcal{X}(M)$; $Z \in T(M^n)$; ∇, ∇' – соответственно, римановы связности метрик g и λg ; R – тензор кривизны связности ∇ .

Кроме того,

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{X^H} (\bar{J})Y^H)_Z &= (\nabla'_X (J)Y)^H + \frac{1}{2}(JR(X, Y)Z - R(X, JY)Z)^V; \\(\bar{\nabla}_{X^H} (\bar{J})Y^V)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, JY)X - JR(Z, Y)X)^H + (\nabla_X (J)Y)^V; \\(\bar{\nabla}_{X^V} Y^H)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, X)JY - JR(Z, X)Y)^H; \\ \bar{\nabla}_{X^V} (\bar{J})Y^V &= 0;\end{aligned}\tag{5}$$

С учетом (5) имеем

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{D}}\bar{\Omega}(X^H) &= \mathfrak{D}\Omega'(X), \\(\bar{\mathfrak{D}}\bar{\Omega}(X^V))_Z &= \frac{1}{2\lambda}tr(JR(Z, X)),\end{aligned}$$

где $\bar{\mathfrak{D}}\bar{\Omega}$ – кодифференциал фундаментальной формы структуры $\{\bar{J}, \bar{g}\}$; $\mathfrak{D}\Omega'$ – кодифференциал фундаментальной формы структуры $\{J, \lambda g\}$.

Отсюда

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(X^H) &= \frac{n-2}{2(n-1)}\omega'(X); \\(\bar{\omega}(X^V))_Z &= \frac{1}{2(n-1)\lambda}tr(JR(Z, JX)).\end{aligned}\tag{6}$$

где $\bar{\omega}$ – форма Ли структуры $\{\bar{J}, \bar{g}\}$; ω' – форма Ли структуры $\{J, \lambda g\}$.

Теорема 1. Касательное расслоение $(T(M^n), \bar{J}, \bar{g})$ ($n > 2$) является локально-конформно келеровым многообразием тогда и только тогда, когда (M^n, J, g) – плоское келерово многообразие и $\lambda = const$.

Доказательство. С учетом (5) и (6) формула (3) относительно структуры $\{\bar{J}, \bar{g}\}$ на касательном расслоении $T(M^n)$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{X^H} (\bar{J})Y^H)_Z &= (\nabla''_X (J)Y)^H + \frac{1}{2}(JR(X, Y)Z - JR(X, JY)Z)^V + \\ &+ \lambda(g(X, Y)J\xi_v - \Omega(X, Y)\xi_v);\end{aligned}$$

$$(\tilde{\nabla}_{X^H}(\bar{J})Y^V)_Z = \frac{1}{2\lambda}(R(Z, JY)X - JR(Z, Y)X)^H + \omega_V(JY)X^H - \omega_V(Y)(JX)^H + (\nabla_X(J)Y)^V; \tag{7}$$

$$3) (\tilde{\nabla}_{X^V}(\bar{J})Y^H)_Z = \frac{1}{2\lambda}(R(Z, X)JY - JR(Z, Y)X)^H + \omega_H(JY)X^V - \omega_H(Y)(JX)^V;$$

$$4) \tilde{\nabla}_{X^V}(\bar{J})Y^V = \Omega(X, Y)\xi_H - g(X, Y)J\xi_H + \omega_V(JY)X^V - \Omega(X, Y)\xi_V + g(X, Y)J\xi_V - \omega_V(Y)(JX)^V;$$

где ∇'' – связность Вейля структуры $\{J, \lambda g\}$; $\omega_H(X) = \frac{n-2}{2(n-1)}\omega'(X)$, $\omega_V(X)_Z = \frac{1}{2(n-1)\lambda}tr(JR(Z, JX))$.

Пусть связность Вейля $\tilde{\nabla}$ почти комплексна относительно \bar{J} , то есть $\tilde{\nabla}_{\bar{X}}\bar{J} = 0, \bar{X} \in \mathcal{X}(TM)$. Тогда из (7)₃, в частности, получаем

$$\omega_H(JY)X^V - \omega_H(Y)(JY)^V = 0.$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторных полей X^V и $\bar{J}(X^V) = (JX)^V$, следует $\omega_H = 0$. С учетом этого и (7)₄ получаем

$$\omega_V(JY)X^V - \Omega(X, Y)\xi_V + g(X, Y)J\xi_V - \omega_V(Y)(JX)^V = 0.$$

Произведя в этом выражении свертку по первому нижнему и верхнему аргументам, имеем

$$(n-1)\omega_V(JY) + g(J\xi_V, Y) = 0.$$

Затем, заменяя $Y \rightarrow JY$,

$$(n-2)\omega_V(Y) = 0.$$

Таким образом, если $n > 2$, то $\omega_V = 0$.

Итак, если $n > 2$, то форма Ли $\bar{\omega} = 0$. Тем самым условие $\tilde{\nabla}_{\bar{X}}\bar{J} = 0$ при $n > 2$ равносильно $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{J} = 0$, то есть келеровости структуры $\{\bar{J}, \bar{g}\}$. Как известно [3], келеровость структуры $\{\bar{J}, \bar{g}\}$ равносильна $R = 0$ и $\lambda = const$. Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть (M^2, J, g) – келерово многообразие со знакоопределенной гауссовой кривизной κ . Тогда эрмитова поверхность $(T(M^2), \bar{J}, e^{-\sigma}\bar{g})$, где $\sigma = -\frac{\kappa}{2\lambda}g_{ij}y^i y^j$, является келеровой поверхностью тогда и только тогда, когда $\lambda = A\kappa$, где $A = const$ и $sign(A) = sign(\kappa)$.

Доказательство. Пусть (M^2, J, g) – двумерное (связное) келерово многообразие. Тогда, как известно [6], $(T(M^2), \bar{J}, \bar{g})$ – эрмитово многообразие, названное нами *тангенциальной эрмитовой поверхностью*. Из двумерности риманова многообразия (M^2, g) имеем

$$R(X, Y)Z = \kappa(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X),$$

где κ – гауссова кривизна. Следовательно, соотношения (6) примут вид

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(X^H) &= 0; \\ (\bar{\omega}(X^V))_Z &= -\frac{\kappa}{\lambda}g(Z, X). \end{aligned} \quad (8)$$

Как известно [7], для эрмитовых поверхностей условие $\tilde{\nabla}_{\bar{X}}\bar{J} = 0$ имеет место тождественно. В нашем случае это также легко проверить, используя формулы (7) и (8).

Вычислив ковариантную производную формы Ли $\bar{\omega}$, получим

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X^H}(\bar{\omega})Y^H &= 0, \\ (\bar{\nabla}_{X^H}(\bar{\omega})Y^V)_Z &= \partial_X(-\frac{\kappa}{\lambda})g(Z, Y), \\ \bar{\nabla}_{X^V}(\bar{\omega})Y^H &= 0, \\ \bar{\nabla}_{X^V}(\bar{\omega})Y^V &= -\frac{\kappa}{2\lambda}g(X, Y), \end{aligned}$$

где $\partial_X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}(X^H, Y^H) &= 0, \\ (d\bar{\omega}(X^H, Y^V))_Z &= \partial_X(-\frac{\kappa}{2\lambda})g(Z, Y), \\ d\bar{\omega}(X^V, Y^V) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $d\bar{\omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial_X(\frac{\kappa}{\lambda}) = 0$. С учетом связности многообразия M^2 , $\partial_X(\frac{\kappa}{\lambda}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\kappa}{\lambda} = const$. Кроме того, в силу положительности функции λ , это равенство имеет смысл только тогда, когда гауссова кривизна κ знакоопределена. Покажем теперь, что замкнутость формы Ли $\bar{\omega}$ влечет ее точность. Действительно, в адаптированном кобазисе $\{(dx)^V, (dx)^H\}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= (-\frac{\kappa}{\lambda})g_{is}y^s(dx^i)^H = (-\frac{\kappa}{\lambda})(g_{is}dy^i y^s + g_{is}\Gamma_{ij}^i y^l y^s dx^j) = \\ &= (-\frac{\kappa}{\lambda})(g_{is}dy^i y^s + \frac{1}{2}dg_{is}y^l y^s) = d(-\frac{\kappa}{2\lambda}g_{ij}y^i y^j), \end{aligned}$$

где (x^i, y^i) – стандартная локальная система координат на $T(M^2)$, $\{g_{ij}\}$ – компоненты римановой метрики g в этой системе координат. Таким образом, форма Ли $\bar{\omega} = d\sigma$, где $\sigma = -\frac{\kappa}{2\lambda} g_{ij} y^i y^j$. Легко проверить, что σ – глобально определенная функция на $T(M)$. Тем самым доказано, что $(T(M^2), \bar{J}, \bar{g})$ – глобально-конформно келерово многообразие тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. (M^2, g) – риманово многообразие со знакоопределенной гауссовой кривизной κ ;
2. $\lambda = A\kappa$, где $A = const$ и $sign(A) = sign(\kappa)$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть (M^2, J, g) многообразие постоянной гауссовой кривизны κ . Тогда эрмитова поверхность $(T(M^2), \bar{J}, e^{-\sigma} \bar{g})$ является келеровой поверхностью тогда и только тогда, когда $\lambda = const$.

Заключение

В настоящей работе, в отличие от большинства других работ по данной тематике, рассматривается касательное расслоение над эрмитовым многообразием. Показано, что на ней естественным образом индуцируется почти эрмитова структура инвариантного типа и получены необходимые и достаточные условия келеровости этой структуры. Основные результаты работы получены вычислением в формализме Кошуля.

Литература

1. Vaisman I. Locally conformal Kahler manifolds with parallel Lee form // Rend. Mat. Rome, 1979. – V.12. – P. 263-284.
2. Gray A., Hervella L. The sixteen classes of almost manifolds and their linear invariants// Ann. Math. Pura ed. Appl., 1980. – V.123. – № 4. – P. 35-38.
3. Зятуев Б.В. О некоторых классах АН-структур на касательном расслоении // Труды международной конференции, посвященной А.З. Петрову. – 2000. – С. 53-54.
4. Yano K. and S. Ishihara. Tangent and Cotangent Bundles// New York, Marcel Dekker, INC., 1973, XII.
5. Zayatuev B.V. On some classes of almost Hermitian structures on the tangent bundle// Webs and Quasigroups, T.S.U., 2002. – P. 103-106.
6. Кириченко В.Ф., Зятуев Б.В. Дифференциальная геометрия тангенциальных эрмитовых поверхностей // Успехи мат. наук. – 1996. – №4. – С. 209-211.
7. Vaisman I., Tricerri F. On some 2-dimensional Hermitian manifolds // Math. Z. – V.192, 1986. – P. 205-216.

8. Игнаточкина Л.А. Конформно-инвариантные свойства приближенно келеровых многообразии // Математические заметки. – Т. 65. – №5. – 1999.

Заятуев Батор Владимирович – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры геометрии Бурятского государственного университета. Тел. 8(914)832-91-95. E-mail: zayatyuev@yandex.ru

Zayatyuev Bator Vladimirovich – candidate of physical and mathematical sciences, senior teacher of department of Buryat State University. Tel. 8(914)832-91-95. E-mail: zayatyuev@yandex.ru

УДК 519.716

© С.Ю. Халтанова

О КЛОНАХ УЛЬТРАФУНКЦИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ НУЛЬ И ЕДИНИЦУ

В решетке клонов ультрафункций рассматривается интервал между клоном функций, сохраняющим нуль и единицу, и клоном всех ультрафункций. Показано, что такой интервал содержит 8 клонов.

Ключевые слова: клон, решетка, суперпозиция, замкнутое множество, ультрафункция.

S.J. Haltanova

ABOUT ONE INTERVAL IN THE LATTIC OF CLONES OF ULTRAFUNCTIONS

The interval between the clone of function, saving 0 and 1, and the clone of ultrafunction are considered in the lattice of clones of ultrafunctions. It's showing that such interval contain 8 clones.

Keywords: clone, lattice, superposition, closed set, ultrafunction.

Введение

Пусть $E = \{0, 1\}$, $F = \{0, 1, \{0, 1\}\}$. Функции $f : E^n \rightarrow E$ называются всюду определенными булевыми функциями (P_2 – множество всех всюду определенных булевых функций); $f : E^n \rightarrow F$ – ультрафункциями (P_2^- – множество всех ультрафункций).

Пусть даны $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^-$, $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) \in P_2^-$, тогда суперпозиция $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ определяет функцию $g(x_1, \dots, x_m)$, принадлежащую P_2^- , следующим образом [2]:

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если это пересечение не равно } \emptyset; \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n): f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \{\alpha_i\}$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, называется селекторной.

Клон – множество функций, замкнутое относительно суперпозиции и содержащее все селекторные функции.

Интервалом $I(A, B)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон A и являющихся подмножествами клона B .

Интервалы представляются в виде диаграмм, где клоны изображаются точками и точка, представляющая клон A , расположена выше и соединена отрезком с точкой, представляющей клон B , если множество A непосредственно содержит B .

Если A – множество, то через $[A]$ обозначим пересечение всех клонов, содержащих A . Множество A называется полным, если $[A] = P_2^-$.

Пусть K – клон, K_1 – его подклон, тогда K_1 называется максимальным подклоном в K тогда и только тогда, когда $[K_1 \cup \{f\}] = K$ для любой $f \in K \setminus K_1$.

Определим множества:

$$T_{0,0} = \{f \in P_2 \mid f(0, \dots, 0) = 0\}, \quad T_{0,0}^- = \{f \in P_2^- \mid f(0, \dots, 0) = 0\},$$

$$T_{1,1} = \{f \in P_2 \mid f(1, \dots, 1) = 1\}, \quad T_{1,1}^- = \{f \in P_2^- \mid f(1, \dots, 1) = 1\},$$

$$T_{01} = T_{0,0} \cap T_{1,1}, \quad T_{01}^- = T_{0,0}^- \cap T_{1,1}^-.$$

Нетрудно проверить, что эти множества ультрафункций являются клонами.

В работе описан интервал $I(T_{01}, P_2^-)$ и показано, что он содержит ровно 8 клонов из P_2^- (включая сам этот клон).

В дальнейшем для удобства изложения будем использовать кодировку $\{0,1\} \rightarrow \sim$, а функции задавать в виде векторов-значений ультрафункций на всех наборах, расположенных в натуральном порядке.

1. Некоторые полные множества

Приведем некоторые примеры полных множеств ультрафункций, на которые мы сошлемся при доказательстве теорем.

Пусть

$$\begin{aligned} h_1(x) = (\sim 0), h_2(x) = (0 \sim), h_3(x) = (1 \sim), h_4(x) = (\sim 1), h_5(x) = (\sim \sim), h_6(x) = (01), \\ h_7(x) = (10), h_8(x) = (00), h_9(x) = (11), h_{10}(x_1, x_2) = (0001), h_{11}(x_1, x_2) = (0111), \\ h_{12}(x_1, x_2) = (\sim \sim 11), h_{13}(x_1, x_2) = (\sim 1 \sim 1), h_{14}(x_1, x_2) = (\sim 111), h_{15}(x_1, x_2) = (00 \sim \sim), \\ h_{16}(x_1, x_2) = (0 \sim 0 \sim), h_{17}(x_1, x_2) = (000 \sim), h_{18}(x_1, x_2, x_3) = (01000011). \end{aligned}$$

Замечание. Функции $h_6, h_{10}, h_{11}, h_{18}$ принадлежат множеству T_{01} , функции h_{12}, h_{13} (h_{15}, h_{16}) можно получить суперпозициями из h_4 (h_2) и селекторных функций и $[\{h_{10}, h_7\}] = P_2$, $[P_2 \cup \{h_5\}] = P_2^-$.

Лемма 1. Множество функций $T_{01} \cup \{h_1\}$ является полным в P_2^- .

Доказательство. Построим последовательность суперпозиций, задающую ультрафункцию из $[T_{01} \cup \{h_1\}]$ и содержащую ультрафункцию h_5 и h_7 :

$$\begin{aligned} h_{10}(h_1, h_6) = h_8, \quad h_1(h_8) = h_5, \quad h_{11}(h_1, h_6) = h_4, \quad h_{11}(h_{12}, h_{13}) = h_{14}, \\ h_{14}(h_5, h_5) = h_9, \quad h_{18}(h_8, h_6, h_9) = h_7. \end{aligned}$$

Лемма 2. Множество функций $T_{01} \cup \{h_3\}$ является полным в P_2^- .

Доказательство. Цепочка суперпозиций

$$\begin{aligned} h_{10}(h_3, h_6) = h_2, \quad h_{11}(h_3, h_6) = h_9, \quad h_2(h_9) = h_5, \quad h_{10}(h_{15}, h_{16}) = h_{17}, \quad h_{17}(h_5, h_5) = h_8, \\ h_{18}(h_8, h_6, h_9) = h_7 \end{aligned}$$

содержит ультрафункцию h_5 и h_7 .

Следствие 1. Множество ультрафункций $T_{0,0} \cup \{h_1\}$ и $T_{1,1} \cup \{h_3\}$ является полным в P_2^- .

Лемма 3. Множество функций $T_{01} \cup \{h_5\}$ является полным в P_2^- .

$$\begin{aligned} h_{11}(h_6, h_5) = h_4, \quad h_{11}(h_{12}, h_{13}) = h_{14}, \quad h_{14}(h_5, h_5) = h_9, \\ h_{10}(h_5, h_6) = h_2, \quad h_{10}(h_{15}, h_{16}) = h_{17}, \quad h_{17}(h_5, h_5) = h_8, \quad h_{18}(h_8, h_6, h_9) = h_7. \end{aligned}$$

Следствие 2. Множество функций $T_{0,0} \cup \{h_5\}$ и $T_{1,1} \cup \{h_5\}$ является полным в P_2^- .

Основной результат

Теорема 1. Клоны, представленные на рис. 1, различны и вложены друг в друга так, как показано на рисунке.

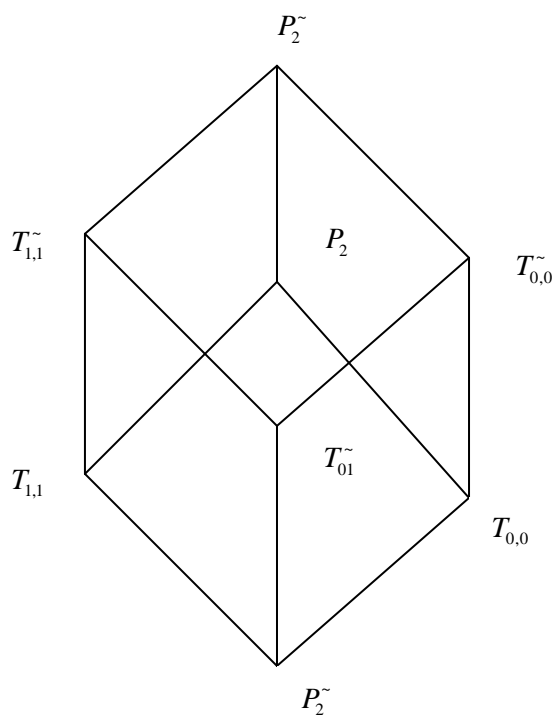


Рис. 1. Интервал $I(T_{01}, P_2^{\sim})$

Доказательство. Достаточно легко проверяется несовпадение указанных клонов, остается проверить их структуру вложенности. В [2] доказано, что T_{01} является максимальным подклоном в $T_{0,0}$ и $T_{1,1}$, а также то, что $T_{0,0}$ и $T_{1,1}$ являются максимальными в P_2 , в [4] то, что $T_{0,0}$ – максимальный подклон в $T_{0,0}^{\sim}$ и $T_{1,1}$ – максимальный подклон в $T_{1,1}^{\sim}$, в [3] то, что $T_{0,0}^{\sim}$ и $T_{1,1}^{\sim}$ – максимальные поклоны в P_2^{\sim} .

Остается показать, что T_{01} является максимальным подклоном в T_{01}^{\sim} , и T_{01}^{\sim} – максимальный подклон в $T_{0,0}^{\sim}$ и $T_{1,1}^{\sim}$.

Сначала докажем, что выполняется равенство $[T_{01} \cup \{f\}] = T_{01}^{\sim}$, где $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{01}^{\sim} / T_{01}$.

Доказательство включения $[T_{01} \cup \{f\}] \subseteq T_{01}^-$ очевидно.

Пусть функция $g(x_1, \dots, x_m) \in T_{01}^-$ и $g(0, \dots, 0) = 0$, $g(1, \dots, 1) = 1$, а также

$$g(\alpha_1^1, \dots, \alpha_m^1) = 0, \quad g(\beta_1^1, \dots, \beta_m^1) = 1, \quad g(\gamma_1^1, \dots, \gamma_m^1) = \sim,$$

...

$g(\alpha_1^r, \dots, \alpha_m^r) = 0$; $g(\beta_1^s, \dots, \beta_m^s) = 1$; $g(\gamma_1^l, \dots, \gamma_m^l) = \sim$.

Так как функция $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{01}^- / T_{01}$, то $f(0, \dots, 0) = 0$, $f(1, \dots, 1) = 1$ и пусть (τ_1, \dots, τ_n) такой набор, что $f(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sim$.

Возьмем функции $h_1(x_1, \dots, x_m), \dots, h_n(x_1, \dots, x_m) \in T_{01}$ такие, что $h_i(0, \dots, 0) = 0$,

$h_i(1, \dots, 1) = 1$, $h_i(\alpha_1^j, \dots, \alpha_m^j) = 0$, $h_i(\beta_1^k, \dots, \beta_m^k) = 1$, $h_i(\gamma_1^l, \dots, \gamma_m^l) = \tau_i$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$, $k \in \{1, \dots, s\}$, $l \in \{1, \dots, t\}$.

Пусть суперпозиция $f(h_1(x_1, \dots, x_m), \dots, h_n(x_1, \dots, x_m))$ определяет функцию $\phi(x_1, \dots, x_m)$. Покажем, что $\phi(x_1, \dots, x_m) = g(x_1, \dots, x_m)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \phi(0, \dots, 0) &= f(h_1(0, \dots, 0), \dots, h_n(0, \dots, 0)) = f(0, \dots, 0) = 0, \\ \phi(1, \dots, 1) &= f(h_1(1, \dots, 1), \dots, h_n(1, \dots, 1)) = f(1, \dots, 1) = 1, \\ \phi(\alpha_1^j, \dots, \alpha_m^j) &= f(h_1(\alpha_1^j, \dots, \alpha_m^j), \dots, h_n(\alpha_1^j, \dots, \alpha_m^j)) = f(0, \dots, 0) = 0, \\ \phi(\beta_1^k, \dots, \beta_m^k) &= f(h_1(\beta_1^k, \dots, \beta_m^k), \dots, h_n(\beta_1^k, \dots, \beta_m^k)) = f(1, \dots, 1) = 1, \\ \phi(\gamma_1^l, \dots, \gamma_m^l) &= f(h_1(\gamma_1^l, \dots, \gamma_m^l), \dots, h_n(\gamma_1^l, \dots, \gamma_m^l)) = f(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sim, \\ i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, r\}, k \in \{1, \dots, s\}, l \in \{1, \dots, t\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $g(x_1, \dots, x_m) \in [T_{01} \cup \{f\}]$, т.е. выполняется включение $T_{01}^- \subseteq [T_{01} \cup \{f\}]$. Таким образом, доказали справедливость равенства $[T_{01} \cup \{f\}] = T_{01}^-$.

Следующим шагом покажем, что выполняется равенство $[T_{01}^- \cup \{f\}] = T_{0,0}^-$, где $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{0,0}^- / T_{01}^-$.

Доказательство включения $[T_{01}^- \cup \{f\}] \subseteq T_{0,0}^-$ очевидно. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{0,0}^- / T_{01}^-$, то $f(0, \dots, 0) = 0$ и $f(1, \dots, 1) = 0$ или $f(1, \dots, 1) = \sim$. В любом случае имеем $(00) \in [\{f\}]$. Теперь функцию $g(x_2, \dots, x_m)$ из $T_{0,0}^-$ можно представить суперпозицией $g(x_2, \dots, x_m) = h(0, x_2, \dots, x_m)$, где $h(x_1, \dots, x_m)$ – подходящая функция из клона T_{01}^- .

Аналогично доказывается, что выполняется равенство $[T_{01}^- \cup \{f\}] = T_{1,1}^-$, где $f(x_1, \dots, x_n) \in T_{1,1}^- / T_{01}^-$.

Теорема 2. В множестве P_2^{\sim} существуют ровно 8 клонов, содержащих клон T_{01} , а именно клоны, представленные на рис. 1.

Доказательство. Пусть A – клон в P_2^{\sim} такой, что $T_{01} \subseteq A \subseteq P_2^{\sim}$. То, что нет клонов между P_2 и P_2^{\sim} показано в [2]. Если $A/T_{01} = \emptyset$, то $A = T_{01}$. В противном случае выполняется одно из следующих условий:

1. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 1, f(1, \dots, 1) = 0$. Тогда получим $P_2 \subseteq A$.

2. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 0, f(1, \dots, 1) = 0$ и не существует набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такого, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sim$. Тогда $T_{0,0} \subseteq A$.

Пусть $A \neq T_{0,0}$, $A \neq T_{0,0}^{\sim}$ и $A \neq P_2$. Рассмотрим 2 возможных случая. В первом случае в A существует функция $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 1$ и на некотором наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) | f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sim$. По следствию 1 получим $A = P_2^{\sim}$. Во втором случае в A существует функция $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $f(0, \dots, 0) = \sim$. Тогда легко получить функцию h_5 , и по следствию 2 имеем $A = P_2^{\sim}$.

3. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 1, f(1, \dots, 1) = 1$ и не существует набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такого, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sim$. Тогда $T_{1,1} \subseteq A$. Аналогично показывается, что если $A \neq T_{1,1}^{\sim}$ и $A \neq P_2$, то, используя следствие 1 и следствие 2, получим $A = P_2^{\sim}$.

4. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 0, f(1, \dots, 1) = 1$ и существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sim$. Тогда $T_{01}^{\sim} \subseteq A$. Пусть $A \neq T_{0,0}^{\sim}$ и $A \neq T_{1,1}^{\sim}$. Тогда в A существует либо функция h_7 , либо h_3 , либо h_1 , либо h_5 . В первом случае получим $P_2 \subseteq A$. В остальных случаях, используя соответственно лемму 1, лемму 2 и лемму 3, получим $A = P_2^{\sim}$.

5. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 0, f(1, \dots, 1) \neq 1$, и существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sim$. Тогда $T_{0,0}^{\sim} \subseteq A$. Получим $A = P_2^{\sim}$ или $A = T_{0,0}^{\sim}$.

6. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) \neq 0, f(1, \dots, 1) = 1$, и существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sim$. Тогда $T_{1,1}^{\sim} \subseteq A$. Получим $A = P_2^{\sim}$ или $A = T_{1,1}^{\sim}$.

7. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = \sim, f(1, \dots, 1) = 0$. По лемме 1 получим $A = P_2^{\sim}$.

Цыренова В.Б., Батожаргалова А.Э. Линейчатые поверхности с параболическими образующими в четырехмерном квазиэллиптическом пространстве

8. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 1, f(1, \dots, 1) = \sim$.

По лемме 2 получим $A = P_2^-$.

9. Существует функция $f \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = \sim, f(1, \dots, 1) = \sim$.

По лемме 3 получим $A = P_2^+$.

Литература

1. Post E.L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies.-Princeton: Univ. Press, 1941.
2. Пантелеев В.И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, № 2 (68), 2009.
3. Пантелеев В.И., Халтанова С.Ю. О некоторых интервалах в решетке клонов частичных ультрафункций // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. Т. 3. – №4. – С.80-87.

Халтанова Соелма Юрьевна – аспирант, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, Нижняя Набережная, 6; тел.(3952)200567, e-mail: soelabad@mail.ru

Haltanova Soelma Jur'evna – postgraduate student, East Siberian State Academy of Education, 6 N. Nabarezhnaya St., Irkutsk, 664011; phone: (3952)200567, e-mail: soelabad@mail.ru

УДК 512.81

© В.Б. Цыренова, А.Э. Батожаргалова

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ ОБРАЗУЮЩИМИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной работе построен и геометрически характеризуется канонический репер линейчатой поверхности с параболическими образующими в четырехмерном квазиэллиптическом пространстве, даны геометрические характеристики инвариантов и получены простейшие классы.

Ключевые слова: квазиэллиптическое пространство, абсолют, линейчатая поверхность, репер, инварианты.

V.B. Tsyrenova, A.E. Batozhargalova

RULED SURFACES OF PARABOLIC LINES IN THE 4D QUASI-ELLIPTIC SPACE

We construct and geometrically characterize a canonical frame of the elliptic lines surface in the 4D quasi-elliptic space. The geometric values of the surface invariants and some classes of surfaces are obtained.

Keywords: quasi-elliptic space, absolute, of the elliptic lines surface, frame, invariants.

Введение

Дифференциальная геометрия четырехмерного квазиэллиптического пространства S^1_4 рассматривалась Т.П. Володиной [1, 2]. Более полно исследованы погруженные многообразия только в S^1_3 .

§ 1. Предварительные сведения

Четырехмерным квазиэллиптическим пространством S^1_4 называется, проективное пространство P_4 , в котором задан абсолют, состоящий из пары мнимых гиперплоскостей, пересекающихся по действительной 2-плоскости, и мнимой коники в этой плоскости.

Прямые, пересекающие абсолютную плоскость, называются параболическими, или евклидовыми.

Наиболее общий репер пространства можно выбрать так, чтобы абсолют задавался уравнениями:

$$Q_0 : (x^0)^2 + (x^1)^2 = 0, T : x^0 = x^1 = 0,$$

$$Q_1 : x^0 = x^1 = 0, (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0.$$

Это означает, что координатный тетраэдр выбран так, что абсолютная 2-плоскость является плоскостью $A_2A_3A_4$. Точки A_2, A_3, A_4 полярно сопряжены относительно абсолютной коники, а гиперплоскости $A_0A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ полярно сопряжены относительно абсолютных гиперплоскостей.

Тогда в квазиэллиптическом пространстве S^1_4 определяются следующие квазискалярные произведения:

$$(X * Y)_1 = x^0 y^0 + x^1 y^1; \tag{1.1}$$

$$(X * Y)_2 = x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4. \tag{1.2}$$

Координаты точек, не лежащих в абсолютной плоскости, нормируются условием $(X * X)_1 = 1$. Координаты точек, лежащих в абсолютной плоскости, – условием $(X * X)_2 = 1$. Расстояния между точками на параболических прямых и между точками абсолютной 2-плоскости определяются соответственно по формулам:

$$\cos \delta = (X * Y)_1; \tag{1.3}$$

$$d^2 = (X - Y * X - Y)_2; \tag{1.4}$$

$$\cos \delta = (X * Y)_2. \tag{1.5}$$

Деривационные формулы наиболее общего репера примут вид:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3 + \omega_0^4 A_4, \\ dA_1 &= -\omega_0^1 A_0 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4, \\ dA_2 &= \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4, \\ dA_3 &= -\omega_2^3 A_2 + \omega_3^4 A_4, \\ dA_4 &= -\omega_2^4 A_2 - \omega_3^4 A_3. \end{aligned}$$

§ 2. Канонический репер параболического регулюса и его геометрическая характеристика

Совместив ребро $(A_0 A_2)$ с образующей параболического регулюса, получим $\pi_0^1 = \pi_0^3 = \pi_0^4 = \pi_2^3 = \pi_2^4 = 0$. Следовательно, формы $\omega_0^1, \omega_0^3, \omega_0^4, \omega_2^3, \omega_2^4$ становятся главными и можно положить:

$$\omega_0^3 = \alpha \omega_0^1, \omega_0^4 = \beta \omega_0^1, \omega_2^3 = \gamma \omega_0^1, \omega_2^4 = \mu \omega_0^1, \omega_0^1 \neq 0, \quad (2.1)$$

где ω_0^1 – базисная форма. Далее, пользуясь алгоритмом Картана, канонизируем репер полностью. Деривационные формулы канонического репера параболического регулюса даны в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dA_0}{ds} &= A_1 + cA_2 \\ \frac{dA_1}{ds} &= -A_0 + bA_2 + c(A_3 + A_4) \\ \frac{dA_2}{ds} &= A_3 + A_4 \\ \frac{dA_3}{ds} &= -A_2 + aA_4 \\ \frac{dA_4}{ds} &= -A_2 - aA_3 \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

Точка A_2 канонического репера определяется как точка пересечения образующей $(A_0 A_2)$ параболического регулюса с абсолютной 2-плоскостью, а плоскость (A_0, A_2, A_1) является касательной 2-плоскостью к регулюсу в точке A_0 .

Чтобы геометрически характеризовать точки A_3 и A_4 канонического репера, найдем соприкасающуюся quadriку, содержащую образующую $(A_0 A_2)$ рассматриваемого регулюса. Ее уравнение имеет вид:

$$\gamma: (x^3)^2 - (x^4)^2 + x^0 x^3 - x^0 x^4 + x^1 x^3 - x^1 x^4 + x^2 x^3 - x^2 x^4 = 0.$$

Эта квадрика пересекает абсолютную 2-плоскость $T: x^0=x^1=0$ по кривой g второго порядка

$$\begin{cases} (x^3)^2 - (x^4)^2 + x^0x^3 - x^0x^4 + x^1x^3 - x^1x^4 + x^2x^3 - x^2x^4 = 0 \\ x^0 = 0; \quad x^1 = 0 \end{cases}$$

Точка $A_2(0; 0; 1; 0; 0)$ принадлежит кривой второго порядка g , а точки A_2, A_3, A_4 полярно сопряжены относительно мнимой коники Q_1 .

Точки $P(0; 0; 0; 1; 1)$ и $Q(0; 0; 0; 1; -1)$ суть точки пересечения кривой g с прямой (A_3A_4) . Точки A_3 и A_4 репера гармонически делят точки P и Q .

Уравнение соприкасающейся квадрики, содержащей ребро (A_1A_3) , получим в виде:

$$\gamma: (x^2)^2 - (x^4)^2 + x^0x^1 - x^0x^2 + x^1x^2 - x^1x^4 + x^2x^3 - x^3x^4 = 0.$$

Точка A_1 является одной из точек пересечения ее с ребром A_0A_1 .

§3. Геометрическая характеристика инвариантов и простейшие классы параболических регулюсов

Найдем соприкасающуюся 2-плоскость кривой (A_1) , то есть

$$(A_1, dA_1, d^2A_1): \begin{cases} (x^4 - x^3)(db - 3c) - 2cabx^0 - 2cax^2 = 0 \\ (db - 3c)x^1 + bx^0 + x^2 = 0 \end{cases}$$

пересечем полученную плоскость с евклидовой прямой (A_0A_2) , получим точку $N(1;0;b;0;0)$. Найдем расстояние между точками A_0 и N по формуле (1.4), получим $d^2 = b^2$.

Прямая $(A_3, A_3 + dA_3)$ – параболическая прямая, поэтому на этой прямой расстояние между точками $A_3(0; 0; 0; 1; 0)$ и $A_3+dA_3(0; 0; -1; 1; a)$ находится по формуле (1.5) и геометрически инвариант a характеризуется

$$\text{следующим образом: } \cos \delta = \frac{1}{\sqrt{2+a^2}}.$$

Прямая $(A_0, A_0 + dA_0)$ – эллиптическая прямая и на этой прямой найдем расстояние между точками $A_0(1; 0; 0; 0; 0)$ и $A_0+dA_0(1; 1; c; 0; 0)$ по

$$\text{формуле (1.3) в виде: } \cos \delta = \frac{1}{\sqrt{2+c^2}}$$

Отсюда получаем следующие три простейших класса:

1. Параболический регулюс $a=\text{const}$ характеризуется тем, что расстояние между точками A_3 и $A_3 + dA_3$ постоянно.

2. Параболический регулюс $b=\text{const} \neq 0$ характеризуется тем, что расстояние между точками A_0 и N постоянно.

Цыренова В.Б., Проскурякова И.В. Комплексы в трехмерном квазигиперболическом пространстве

3. Параболический регулюс $c=\text{const}$ характеризуется тем, что расстояние между точками A_0 и A_0+dA_0 постоянно.

Литература

1. Володина Т.П. Основы теории гиперповерхностей в S^1_4 . // Геометр. сб., 23. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. – С. 111-118.
2. Володина Т.П. Поверхности в квазиэллиптическом пространстве S^1_4 . // Геометр. сб., 21. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982. – С. 115-121.

Цыренова Валентина Бабасановна – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии БГУ, тел. (3012)219757, e-mail: v.ts@mail.ru

Батожаргалова Арюна Эрдынеевна – студентка Института математики и информатики БГУ, тел. (3012)219757.

Tsyrenova Valentina Babasanovna – candidate of physics and mathematics science, doctor of pedagogical science, associate professor, head of geometry department of Buryat State University, tel. (3012)219757, e-mail: v.ts@mail.ru

Batozhargalova Aryuna Erdineevna – student of Institute of Mathematics and Informatics, tel. 7(3012)219757.

УДК 512.81

© В.Б. Цыренова, И.В. Проскурякова

**КОМПЛЕКСЫ В ТРЕХМЕРНОМ
КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

В данной работе построен и геометрически характеризуется канонический репер комплекса, доказана теорема существования и дана геометрическая характеристика инвариантов комплекса.

Ключевые слова: неевклидово пространство, квазигиперболическое пространство, абсолют, комплекс, репер, инварианты.

V.B. Tsyrenova, I.V. Proskuryakova

COMPLEXES IN THE 3D QUASI-HYPERBOLIC SPACE

In this study we constructed and characterized geometrically canonical frame of the complex, we have proved the existence theorem and give a geometric description of invariants of the complex.

Keywords: non-Euclidean space, quasi-hyperbolic space, absolute, complex, frame, invariants.

Введение

Дифференциальная геометрия трехмерного квазигиперболического пространства была изучена В.И. Слободским. Так, им изучены кривые и

поверхности [1], регулюсы и конгруэнции [2]. В данной работе рассмотрены комплексы прямых.

§1. Канонический репер комплекса в квазигиперболическом пространстве ${}^{10}S_3^1$

Рассмотрим трехмерное проективное пространство ${}^{10}S_3^1$, абсолют которого состоит из двух действительных плоскостей и двух мнимых точек на прямой их пересечения.

Наиболее общий репер пространства ${}^{10}S_3^1$ можно выбрать так, чтобы абсолютные плоскости Q_0 определялись уравнением: $(x^0)^2 + 2x^0x^1 = 0$, прямая T их пересечения уравнениями: $x^0 = x^1 = 0$, а квадрика Q_1 (две мнимо-сопряженные точки) уравнением: $(x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$.

Тогда деривационные формулы подвижного репера пространства ${}^{10}S_3^1$ записываются в виде:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 (A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, \\ dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, \\ dA_2 &= \omega_2^3 A_3, \\ dA_3 &= -\omega_2^3 A_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим в этом пространстве комплекс, т.е. трехпараметрическое семейство прямых. Включим элемент в репер, то есть точки A_0 и A_1 репера совместим с какими-либо двумя точками образующей комплекса, тогда получим $\pi_0^2 = \pi_0^3 = \pi_1^2 = \pi_1^3 = 0$, т.е. формы $\omega_0^2, \omega_0^3, \omega_1^2, \omega_1^3$ становятся главными формами и между ними существует основное соотношение, которое можно записать как

$$\Omega_1^2 = \xi\Omega_0^2 + \eta\Omega_0^3 + \zeta\Omega_1^3.$$

Далее, пользуясь алгоритмом Картана, канонизируем репер полностью. Деривационные формулы канонического репера комплекса получим в виде:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 (A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, \\ dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + \eta\omega_0^3 A_2 + \omega_1^3 A_3, \\ dA_2 &= \omega_2^3 A_3, \\ dA_3 &= -\omega_2^3 A_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\omega_0^0 = \xi\omega_0^2 + \eta_1\omega_0^3 + \zeta_1\omega_1^3, \quad \omega_2^3 = \xi_2\omega_0^2 + \eta_2\omega_0^3 + \zeta_2\omega_1^3.$$

Инвариант η назовем кривизной комплекса.

Затем нами доказана теорема существования о том, что комплексы в трехмерном квазигиперболическом пространстве существуют с произвольной функцией трех аргументов.

§2. Геометрическая характеристика канонического репера

Рассмотрим произвольную точку образующей комплекса

$$M = A_0 + tA_1 \quad (2.1)$$

Продифференцируем соотношение (3.1), применяя деривационные формулы (1.1) канонического репера комплекса. Получим:

$$\begin{aligned} dM &= dA_0 + dtA_1 + t dA_1 = \omega_0^0 (A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3 + \\ &dtA_1 + t(-\omega_0^0 A_1 + \eta \omega_0^3 A_2 + \omega_1^3 A_3) = \omega_0^0 (M - A_1) \\ &-\omega_0^0 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3 + dtA_1 - t\omega_0^0 A_1 + t\eta \omega_0^3 A_2 + t\omega_1^3 A_3 = \\ &(-\omega_0^0 t - \omega_0^0 + dt + t\omega_0^0)A_1 + (\omega_0^2 + t\eta \omega_0^3)A_2 + \\ &(\omega_0^3 + t\omega_1^3)A_3 + \omega_0^0 M. \end{aligned}$$

$d\vec{M} \parallel \vec{M}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -\omega_0^0 t - \omega_0^0 + dt + t\omega_0^0 = 0, \\ \omega_0^2 + t\eta \omega_0^3 = 0, \\ \omega_0^3 + t\omega_1^3 = 0. \end{cases}$$

Последние равенства являются условиями неподвижности точки M .

Рассмотрим плоскость Π , соответствующую в нормальной корреляции точке M :

$$\Pi = (A_0, A_1, dA_0) = (A_0, A_1, \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3) = \omega_0^2 (A_0 A_1 A_2) + \omega_0^3 (A_0 A_1 A_3)$$

При $\omega_0^2 = -t\eta \omega_0^3$ получим:

$$\Pi = -t\eta (A_0 A_1 A_2) + (A_0 A_1 A_3).$$

Отсюда следует, что в нормальной корреляции точке A_0 соответствует плоскость $(A_0 A_1 A_3)$ точке A_1 соответствует плоскость $(A_0 A_1 A_2)$, а точки A_2 и A_3 суть точки пересечения абсолютной прямой с плоскостями $(A_0 A_1 A_2)$ и $(A_0 A_1 A_3)$.

§3. Геометрическая характеристика инвариантов комплекса

Деривационные формулы канонического репера тора $\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0, \omega_1^3 \neq 0$, при $\omega_1^3 = ds$, принадлежащего комплексу, имеют вид:

$$\frac{dA_0}{ds} = \zeta_1 (A_0 - A_1), \frac{dA_1}{ds} = -\zeta_1 A_1 + A_3,$$

$$\frac{dA_2}{ds} = \zeta_2 A_3, \frac{dA_3}{ds} = -\zeta_2 A_2.$$

или, если $ds = \zeta_1 \omega_1^3$, $A_0^* = A_0$, $A_1^* = A_1$, $A_2^* = A_3$, $A_3^* = -A_2$, вид:

$$\frac{dA_0^*}{ds} = A_0^* - A_1^*, \frac{dA_1^*}{ds} = -A_1^* + \frac{1}{\zeta_1} A_2^*, \frac{dA_2^*}{ds} = -\frac{\zeta_2}{\zeta_1} A_3^*, \frac{dA_3^*}{ds} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} A_2^*.$$

Так, инварианты ζ_1 и ζ_2 суть радиус кривизны $\frac{1}{k_1}$ и произведение

кручения k_2 и радиуса кривизны $\frac{1}{k_1}$ ребра возврата тора $\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$.

Аналогично получаем, что инварианты η_1, η, η_2 являются соответственно инвариантами a, p и b гиперболического регулюса $\omega_0^2 = \omega_1^3 = 0$, $\omega_0^3 \neq 0$, принадлежащего комплексу, а инварианты ξ_1, ξ_2 являются соответственно инвариантами a и b гиперболического регулюса, принадлежащего комплексу, определяемого уравнениями $\omega_0^3 = \omega_1^3 = 0$, $\omega_0^2 \neq 0$ [2, с. 57].

Таким образом, рассмотрение трех простейших регулюсов комплекса дает возможность получить геометрические характеристики для всех инвариантов комплекса, входящих в дериационные формулы канонического репера.

Литература

1. Слободской В.И. Теория поверхностей в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{10}S_3^1$. // Геометр. сб., 21. – Томск, 1981.
2. Слободской В.И. К теории линейчатых поверхностей и конгруэнций пространства ${}^{10}S_3^1$. // Геометр. сб., 22. – Томск, 1982.

Цыренова Валентина Бабасановна – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии БГУ, тел. (3012)219757, e-mail: v.ts@mail.ru

Проскурякова Ирина Владиславовна – студентка Института математики и информатики БГУ, тел. (3012)219757.

Tsyrenova Valentina Babasanovna – candidate of physics and mathematics science, doctor of pedagogical science, associate professor, head of geometry department of Buryat State University, tel. (3012)219757, e-mail: v.ts@mail.ru

Proskuryakova Irina Vladislavovna – student of Institute of Mathematics and Informatics, tel. (3012)219757.

5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 577.4 : 517.9

© А.В. Воротынцеv

МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЛАГИ В СИСТЕМЕ ПОЧВА-РАСТЕНИЕ С УЧЕТОМ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ

Для задачи сопряженного переноса тепла и влаги в растительном покрове и почве с учетом баланса энергии формулируется интегральное уравнение, позволяющее получить описание переноса в покрове в виде простых алгебраических выражений, зависящих от решения уравнения. Для хорошо вентилируемого покрова формулируется усеченная система уравнений, описывающая перенос в почве. При решении системы из найденных выражений легко получить переменные переноса в покрове.

Ключевые слова: моделирование, система почва-растение, водный режим растений.

A.V. Vorotyntsev

THE MODEL OF MOISTURE-HEAT TRASFER IN SOIL-PLANT SYSTEM SUBJECT TO THE ENERGY BALANCE

For a problem of the conjugate transfer of heat and moisture in a plant cover and soil taking into account energy balance the integral equation is formulated, allowing getting the description of the transfer in a plant cover in the form of the simple algebraic expressions depending on the decision of the integral equation. For well ventilated cover the truncated system of the equations describing transfer in soil is formulated. Solving such system, from the found expressions it is easy to get the variables of transfer in the cover.

Keywords: simulating; soil-plant system; water condition of plant.

Введение

Моделирование переноса тепла и влаги в системе почва-растение – одна из главных задач описания роста биомассы растений и их урожайности. Перенос тепла и влаги описывается 4-мя подсистемами уравнений типа диффузии, связанными нелинейными алгебраическими соотношениями [1]. Уравнения содержат многие трудно определяемые параметры. Поэтому представляет практический интерес получение упрощенных приближенных моделей, доступных для качественного аналитического исследования.

1. Модель переноса влаги и тепла в системе почва-растение

В слое $0 \leq x \leq H_l$ растительного покрова и корнеобитаемом слое $-H_s \leq x \leq 0$ почвы рассматриваются две системы уравнений (1)-(4) для температуры воздуха T_a , листьев T_l , концентрации водяного пара в меж-листном воздухе q_a , в устьичных полостях листьев q_l :

$$J_{Ta} = -c_p k_a T_a', \quad J_{qa} = -k_a q_a', \quad 0 \leq x \leq H_l ; \tag{1}$$

$$c_p \partial T_a / \partial t = -J_{Ta}' + f_{Tl}, \quad \partial q_a / \partial t = -J_{qa}' + f_{ql}, \tag{2}$$

$$f_{Tl} = c_p D_T S_l (T_l - T_a) p_l, \quad f_{ql} = D_q S_l (q_l - q_a) p_l, \tag{3}$$

$$f_{Tl} + \chi f_{ql} = R_{ll}' ; \tag{4}$$

и две системы (5-7) для температуры T_s и водного потенциала $\psi_s < 0$ почвы:

$$J_{Ts} = -c_p k_{Ts} T_s', \quad J_{\psi_s} = -k_{\psi_s} \psi_s', \quad -H_s \leq x \leq 0 \tag{5}$$

$$c_s \partial T_s / \partial t = -J_{Ts}' , \quad c_{\psi} \partial \psi_s / \partial t = -J_{\psi_s}' - f_{\psi_s}, \tag{6}$$

$$f_{\psi_s} = J_{ql} p_k + D_k S_k (\psi_s - \bar{\psi}_s) p_k \tag{7}$$

с краевыми условиями:

$$J_{Ta} = c_p D_a (T_a - T_a^0), \quad J_{qa} = D_a (q_a - q_a^0), \quad x = H_l, \tag{8}$$

$$J_{Ts} = c_p D_{Ts} (T_s - T_a), \quad J_{qs} = D_{qs} (q_s - q_a), \quad x = 0, \tag{9}$$

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} - J_{Ts} = R(0, t), \quad -J_{\psi_s} + J_{qa} = Q(t), \quad x = 0, \tag{10}$$

$$T_s = T_s^0, \quad \psi_s = \psi_s^0, \quad x = -H_s \tag{11}$$

Транспорт воды в растениях и транспирация J_{ql} регулируется водным потенциалом листьев ψ_l , их устьичным сопротивлением r_{st} и описывается нелинейными выражениями:

$$J_{ql} = \int_0^{H_l} f_{ql} dx, \quad J_{ql} = D_k' (\bar{\psi}_s - \psi_l), \quad r_{st} = r_{s0} (\psi_m - \delta_l \psi_l) (\psi_m - \psi_l)^{-1},$$

$$\bar{\psi}_s = \int_{-H_k}^0 \psi_s p_k dx, \tag{12}$$

$$1/D_q = 1/D_T + r_{st}, \quad 1/D_k' = r_{kc} + 1/(D_k S_k) .$$

Здесь «'» означает частную производную $T_a, T_s, q_a, \psi_s, J_{Ta}, J_{qa}, J_{Ts}, J_{\psi_s}, \psi_s, R_{ll}$ по x ; J_{Ta}, J_{qa} – потоки тепла и водяного пара в воздухе, J_{Ts}, J_{ψ_s} – потоки тепла и воды в почве; $R_{ll}(x, t)$ – заданная поглощенная слоем $(0, x)$ длинноволновая и коротковолновая

радиация, $R(0,t)$ – радиационный баланс у поверхности почвы; $R_s = R(0,t) + J_{T_s}$ – энергия, поглощенная верхним слоем почвы; S_l, S_k – поверхности листьев и корней на единицу поверхности почвы; $S_l p_l(x), S_k p_k(x)$ – плотность листовой и всасывающей корневой поверхности. $T_a^0, q_a^0, Q(t)$ и T_s^0, ψ_s^0 – заданные функции времени, измеряемые на высоте метеобудки $H_a > H_l$ над покровом и глубине $-H_s$ почвы; $\rho(T_a)$ – насыщенная влажность воздуха при температуре T_a , остальное – заданные константы и функции. Здесь $k_a(x), k_{T_s}$ – теплопроводность воздуха и почвы, k_{ψ_s} – влагопроводность почвы. Дифференциальные уравнения систем связаны алгебраическими выражениями (4), (10), описывающими балансы энергии в межлистном воздухе и на поверхности почвы.

2. Приближенная модель для вентилируемого покрова ($k_a(x) \rightarrow \infty$)

Обозначим

$$d_a(x,t) = \rho(T_a) - q_a, \quad d_s = \rho(T_s) - q_s, \quad d_a^0 = \rho(T_a^0) - q_a^0(t);$$

$$\rho(T) = \rho(T_1) + \delta(T - T_1); \quad (13)$$

$$k(x) = \frac{k_a(x)}{1 + \delta \chi / c_p}, \quad G = \frac{1}{1 + c_p / (\delta \chi)}, \quad G_l = G(1 - b_l), \quad G_s = G(1 - b_s);$$

$$1/D_{HK} = \int_0^{H_l} d\xi / k(\xi), \quad D'_\Sigma = D'_a + D'_l + D'_s.$$

Утверждение 1. Функция $y = d_a(x,t)$ в квазистационарном приближении удовлетворяет интегральному уравнению

$$y = \bar{d}_a + Y(x,t) - \frac{D'_l}{D'_\Sigma} \int_0^{H_l} Y(\xi,t) p_l d\xi - \frac{D'_s}{D'_\Sigma} Y(0,t),$$

$$\bar{d}_a = \frac{G_l R_l + G_s R_s}{\chi D'_\Sigma} + \frac{D'_a d_a^0 + D'_s d_s}{D'_\Sigma}, \quad (14)$$

$$Y(x,t) = D'_l \int_x^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} \int_0^x y(\zeta,t) p_l d\zeta + D'_s \{y(0,t) - d_s\} \int_x^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)} - \chi^{-1} \int_x^{H_l} \frac{G_l R_l + G_s R_s}{k(\xi)} d\xi. \quad (15)$$

Утверждение 2. Для потоков J_{q_a}, J_{T_a} температур T_a, T_l, T_s концентрации паров воды в воздухе q_a и дефицита влажности воздуха $y = d_a$ справедливы выражения:

$$J_{q_a} = \chi^{-1} G R_a^0 + D'_a (d_a^0 - y), \quad J_{T_a} = (1 - G) R_a^0 - \chi D'_a (d_a^0 - y), \quad x = H_l; \quad (16)$$

$$J'_{q_a} = \chi^{-1} D'_l \{R'_l / D'_T + \chi p_l y\}, \quad J'_{T_a} = D'_l \{R'_l / D'_q - \chi p_l y\}, \quad 0 \leq x \leq H_l;$$

$$\begin{aligned}
 J_{q_a} &= \mathcal{X}^{-1} D'_s \left\{ R_s / D'_{T_s} + \mathcal{X}(y - d_s) \right\}, \quad J_{T_a} = D'_s \left\{ R_s / D'_{q_s} - \mathcal{X}(y - d_s) \right\}, \quad x = 0; \\
 T_a &= T_a^0 + \frac{G}{\delta \mathcal{X} D'_a} \left\{ F + \mathcal{X} D'_a (y - d_a^0) \right\}, \\
 q_a &= q_a^0 + \frac{G}{\delta \mathcal{X} D'_a} \left\{ \delta F - D'_a (y - d_a^0) \right\}, \quad x = 0; \\
 T_l &= T_a + \frac{D'_l}{\delta \mathcal{X} D'_T} \left\{ \frac{1}{D'_q} \frac{R'_l}{p_l} - \mathcal{X} y \right\}, \quad 0 \leq x \leq H_l; \\
 T_s &= T_a + \frac{D'_s}{\delta \mathcal{X} D'_{T_s}} \left\{ \frac{R'_s}{D'_{q_s}} - \mathcal{X}(y - d_s) \right\}, \quad x = 0,
 \end{aligned}$$

где $F(x, t) = R_a^0(t) + \int_x^{H_l} R_a(\xi, t) \frac{D'_a}{k(\xi)} d\xi$, $x > 0$; $R_a(\xi, t)$ – энергия, по-

глощенная верхним слоем почвы и слоем $(0, \xi)$ растительного покрова. Квазистационарность означает малые производные по времени в (2). Утверждения 1, 2 сводят две сопряженные системы (1)-(4) для двух переменных T_a , q_a к фундаментальному уравнению (14)-(15) относительно одной переменной $y(x, t)$ и дают явные выражения для всех переменных (16) через $y(x, t)$.

В [2] показано, что при $\beta_k < 1$ к решению $y(x, t)$ равномерно сходится следующая последовательность $y_k(x, t)$, причем справедлива оценка $\|y - \bar{d}_a\| < 2\bar{d}_a \beta_k / (1 - \beta_k)$:

$$y_{k+1}(x, t) = \bar{d}_a + Y_k(x, t) - \frac{D'_l}{D'_\Sigma} \int_0^{H_l} Y_k(\xi, t) p_l d\xi - \frac{D'_s}{D'_\Sigma} Y_k(0, t), \quad \beta_k = 2 D'_\Sigma / D'_{Hk},$$

где $Y_k(x, t)$ определяется подстановкой $y_k(x, t)$ в (15). Следовательно, при больших $k(x)$ для хорошо вентилируемого покрова $\beta_k \approx 0$ и выражения (16) подстановкой $y = \bar{d}_a$ сводятся к сравнительно простым алгебраическим выражениям. Последние можно использовать как граничные условия на поверхности почвы для системы (5)-(7) и так получить приближенную модель переноса тепла и влаги в почве. Тогда, решая приближенную модель для почвы, получим \bar{d}_a и с помощью (16) полное описание водно-теплового режима растительного покрова в виде сравнительно простых алгебраических выражений.

Заключение

Для хорошо вентилируемого растительного покрова показано, как сложную дифференциально-алгебраическую систему (1)-(12) переноса тепла и влаги в почве и покрове свести к системе (5)-(7) с краевыми условиями сравнительно простого алгебраического вида и, решая ее, получить полное описание переноса в системе почва-растение.

Литература

1. Полуэктов Р.А. Динамические модели агроэкосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 312 с.
2. Воротынцев А.В. Исследование модели водно-теплового режима системы почва-растение-приземный слой воздуха // Сообщения по прикладной математике. М.: Вычислительный центр РАН. 1991. – 53 с.

Воротынцев Александр Васильевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ВЦ РАН. 119333, Москва, ул. Вавилова, 40; тел. 8965-1353931, avv_alexv@mail.ru

Vorotyntsev Alexander Vasilievich – candidate of physical and mathematical sciences, research fellow of CCAS. Vavilov st. 40, 117967 Moscow GSP-1, Russia; phone +7965-1353931, avv_alexv@mail.ru

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

1. Статья представляется только в doc-файле, набранная в текстовом редакторе Microsoft Word XP/2003 (не допускается в других версиях Word). Формат страниц: А5 (ширина 148 мм, длина 210 мм). Поля: все поля по 1 см. Текст статьи оформляется в одну колонку. Межстрочный интервал – одинарный. Абзацный отступ – 0.5 см. Тип шрифта: Times New Roman. Размер кегля: везде 11 пт. Нумерация страниц в нижнем колонтитуле, по центру.

2. В начале статьи ставится подробный индекс УДК согласно действующим в настоящее время классификаторам. Далее следуют инициалы и фамилии авторов (полужирный курсив, выравнивание по правому краю), название статьи (заглавными буквами полужирным шрифтом, выравнивание по центру), аннотация, ключевые слова и перевод перечисленных частей текста на английский язык. В конце документа после списка литературы приводятся сведения об авторах и их перевод на английский язык (фамилия, имя отчество полностью, ученая степень, ученое звание, должность, место работы (указываются официально принятые названия организаций), контактный адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail). Ссылки на гранты приводятся в сноске на первой странице.

3. Статья должна быть структурирована и содержать введение, ряд разделов с возможными подразделами, заключение, список литературы.

4. Набор формул осуществляется в редакторе формул Microsoft Equation 3/4 или MathType 5/6. Не допускается использование стандартного редактора формул Word 2007/2010 (следует использовать редактор MathType). Не допускается: набор формул как текста (включая таблицу символов, надстрочные и подстрочные индексы), а также с применением автофигур; вставка формул как рисунков; сжатие формулы как рисунка. Все формулы, на которые в тексте даются ссылки, выносятся в отдельную строку с нумерацией в круглых скобках в тексте по правому краю страницы (строка выравнивается по правому краю). Основной размер шрифта в формулах: 11 пт. Размер шрифта в формулах для индексов вычисляется автоматически, но в случае сложной иерархии индексов отдельные символы могут быть недостаточно различимы, и в этом случае требуется ручная коррекция размера символа.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАТЬИ И ОПЛАТА ПУБЛИКАЦИИ

1. Статья представляется в электронном виде. В названии файла статьи указывается фамилия первого автора.

2. Стоимость опубликования одной статьи, частично покрывающая расходы на издание журнала, услуги почты по пересылке статей членам редколлегии и экземпляров журнала иногородним и иностранным авторам, составляет за 1 страницу размера 173 на 237 мм для сотрудников БГУ 150 р., для остальных – 300 р.

3. Оплата за публикацию статьи, авторами которой являются только аспиранты, не взимается. Должна прилагаться справка учреждения, подтверждающая, что авторы являются аспирантами этого учреждения.

4. Оплата производится после уведомления редакцией о принятии статьи к опубликованию и производится почтовым переводом на указанный в уведомлении адрес. При оплате переводом необходимо выслать копию квитанции о переводе по e-mail.

5. Статьи, не соответствующие требованиям оформления, редколлегией не рассматриваются. Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ. Математика, информатика». Корректурa авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются. Гонорары авторам не выплачиваются. Редакция не располагает возможностью для переписки с автором по вопросам рецензирования статьи, не обосновывает причину отказа публикации.

Почтовый адрес:

670000, Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, Институт математики и информатики БГУ, каб. 1201, кафедра прикладной математики.

Тел. 8(3012) 21-77-33.

E-mail: vestnik_bsu_math@rambler.ru

Редактор
Е.Ш. Пинтаева
Компьютерная верстка
Т.А. Олоевой

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 12.04.12. Формат 70x100 1/16.
Усл. печ. л. 9,43. Уч.-изд. л. 3,71.
Тираж 1000. Заказ 75.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
riobsu@gmail.com