ВЕСТНИК

БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2/2012

Математика, информатика

Журнал издается с 2012 года

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-48732 от 28.02.2012 г.

Ответственный за выпуск

И.-Х.Д. Хишектуева

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

☎ 21-16-91, vestnik_bsu_math@rambler.ru

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

☎ 21-95-57, riobsu@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

I. УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 517.977.5 © **А.С. Булдаев, Б. Очирбат, И.-Х.Д. Хишектуева**

ПОИСК НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОПЕРАТОРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_а

Предлагается новый подход к улучшению управляющих параметров систем на основе построения и решения задачи о неподвижной точке определяемого оператора проектирования. Рассматриваемая процедура имеет возможность улучшать управления, удовлетворяющие принципу максимума, и позволяет получить усиленное необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: *нелокальное улучшение, задача о неподвижной точке, оператор проектирования.*

A.S. Buldaev, B. Ochirbat, I.-Kh.D. Khishektueva

SEARCH OF THE FIXED POINTS OF OPERATORS OF PROJECTION IN THE PROBLEMS OF PARAMETRIC OPTIMIZATION OF SYSTEMS

A new approach for improving control parameters of systems on the basis of construction and solution of the problem of fixed point defined by projection operator is proposed. The procedure can improve controls, which satisfy principle of maximum, and provides a necessary condition for optimality.

Keywords: *non-local improvement, problem on fixed point, operator of proiection.*

1. Метод улучшения

Рассматривается задача оптимизации управляющих параметров

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t),u,t)dt \to \min_{u \in U}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u,t), \ x(t_0) = x^0, \ t \in T = [t_0,t_1], \tag{2}$$

в которой $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ – вектор состояния, $u=(u_1,...,u_m)$ – вектор управляющих параметров со значениями в выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы.

Предполагаются выполненными следующие условия (ДПМ-условия [1]):

1) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на R^n, вектор-функция $F(x,u,t)$, векторная функция $f(x,u,t)$ и их производные $F_x(x,u,t)$, $F_u(x,u,t)$, $f_x(x,u,t)$, $f_u(x,u,t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x,u,t) на множестве $R^n \times U \times T$;

2) функция $f(x,u,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L>0$

$$\|f(x,u,t)-f(y,u,t)\| \le L\|x-y\|.$$

ДПМ-условия гарантируют существование и единственность решения $x(t,v)$, $t \in T$ системы (2) для любого допустимого управления $v \in U$.

Введем функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$

$$H(\psi,x,u,t)=\langle f(x,u,t),\psi\rangle - F(x,u,t).$$

Для допустимого управления $v \in U$ обозначим $\psi(t,v)$, $t \in T$ – решение стандартной сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(\psi(t),x(t),u,t),\ t \in T,\quad \psi(t_1)=-\varphi_x(x(t_1))$$

при $u=v$, $x(t)=x(t,v)$.

Дифференциальный принцип максимума (ДПМ) для управления $u \in U$ с помощью оператора проектирования P_U на множество U представляется в виде

$$u=P_U(u+\alpha\int_T H_u(\psi(t,u),x(t,u),u,t)dt),\ \alpha>0. \qquad (3)$$

Для выполнения ДПМ достаточно проверить условие (3) хотя бы для одного $\alpha>0$.

Стандартные методы условного градиента и проекции градиента для задачи (1), (2) обеспечивают сходимость к нулю невязки ДПМ. Релаксация по целевой функции (1) на каждой итерации этих методов достигается поиском специального параметра, регулирующего область варьирования управления. Этот параметрический поиск является наиболее трудоемкой частью итерационного процесса, и улучшение управления достигается в достаточно малой окрестности варьируемого управления.

Предлагаемый в статье метод не содержит операцию параметрического варьирования управления на каждой итерации улучшения, характерную для градиентных методов, и позволяет получать нелокальные улучшающие управления.

Аналогично [2; 3] рассмотрим дифференциально-алгебраическую сопряженную систему

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), w, t) - r(t), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\langle H_x(p(t), x(t), w, t), y(t) - x(t)\rangle + \langle r(t), y(t) - x(t)\rangle = \\ &= \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), w, t) \end{aligned} \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \tag{6}$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1) - x(t_1)\rangle + \langle q, y(t_1) - x(t_1)\rangle = \Delta_{y(t_1)}\varphi(x(t_1)). \tag{7}$$

Система (4)-(7) аналогично [2; 3] всегда может быть сведена к вспомогательной дифференциальной сопряженной системе. Предположим, что вспомогательная сопряженная система допускает решение $p(t,u,v)$, $t \in T$ для допустимых управлений u,v при $w = u$, $x(t) = x(t,u)$, $y(t) = x(t,v)$. Таким образом, на основе решения системы (4)-(7) можно построить однозначное отображение $P(u,v) = p(t,u,v)$, $t \in T$ на множестве $U \times U$ (возможно, не единственным образом).

При этом всегда выполняется $p(t,u,u) = \psi(t,u)$, $t \in T$ и в линейной по состоянию задаче (1),(2) (функции $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$, $\varphi(x)$ линейны по x) сопряженная система (4)-(7) сводится к стандартной, допускающей единственное решение $\psi(t,u)$, $t \in T$.

Поставим задачу об улучшении управления $u \in U$: найти управление $v \in U$ с условием $\Delta_v \Phi(u) \le 0$.

Управляющий вектор параметров в задаче (1), (2) рассмотрим как постоянную векторную функцию времени на интервале T. Тогда из формулы приращения целевого функционала в задаче оптимального управления, полученной в работе [2], в качестве очевидного следствия следует формула приращения целевой функции в задаче (1), (2)

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \Delta_v H(p(t,u,v), x(t,v), u, t)dt\,. \tag{8}$$

Формула (8) позволяет сконструировать метод нелокального улучшения допустимого управления $u^0 \in U$ в задаче (1), (2).

Проекционный метод улучшения: для заданных $\alpha > 0$ и $u \in U$ определим отображение W^α с помощью соотношения

$$W^\alpha(u,v,s) = P_U\left(u + \alpha\left(\int_T H_u(p(t,u,v), x(t,v), u, t)dt + s\right)\right),\ u \in U,\ v \in U,$$

$$s \in R^m$$

и рассмотрим систему

$$v = W^{\alpha}(u,v,s), \tag{9}$$

$$\int_T \Delta_v H(p(t,u,v),x(t,v),u,t)dt = \\ = \left\langle \int_T H_u(p(t,u,v),x(t,v),u,t)dt, v-u \right\rangle + \langle s, v-u \rangle . \tag{10}$$

Предположим, что система (9), (10) допускает решение (v^{α}, s^{α}). Покажем, что решение $v^{\alpha} \in U$ обеспечивает улучшение.

Согласно известному свойству проекции выполняется неравенство

$$\left\langle \int_T H_u(p(t,u,v^{\alpha}),x(t,v^{\alpha}),u,t)dt + s^{\alpha}, v^{\alpha} - u \right\rangle \geq \frac{1}{\alpha}\left\| v^{\alpha} - u \right\|^2 .$$

Отсюда и из формулы (8) следует уменьшение целевой функции с оценкой

$$\Delta_{v^{\alpha}} \Phi(u) = -\left\langle \int_T H_u(p(t,u,v^{\alpha}),x(t,v^{\alpha}),u,t)dt + s^{\alpha}, v^{\alpha} - u \right\rangle \leq \\ \leq -\frac{1}{\alpha}\left\| v^{\alpha} - u \right\|^2 \tag{12}$$

Таким образом, метод нелокального улучшения состоит в решении системы (9), (10).

Уравнение (10) всегда можно разрешить относительно s. Один из способов по аналогии с [2] состоит в следующем.

В случае линейных по u функций $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$ уравнение (10) сводится к уравнению $\langle s, v-u \rangle = 0$. В этом линейном случае положим $s = 0$.

В нелинейном случае определим s по следующему правилу. Если для некоторого $k \in \{1,...,m\}$ выполняется $v_k \neq u$, то полагаем $s_i = 0$, $i \neq k$, $s_k = \dfrac{\int_T \Delta_v H dt - \left\langle \int_T H_u dt, v-u \right\rangle}{v_k - u_k}$. Если для всех $i \in \{1,...,m\}$ имеем $v_i = u_i$, то полагаем $s = 0$.

Другой простой способ определения s можно использовать в квадратичном по управлению случае (функции $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$ квадратичны по u). Определим

$$s = \frac{1}{2}\left[\int_T H_{uu}(p(t,u,v),x(t,v),u,t)dt \right](v-u) .$$

Очевидно, что при этом уравнение (10) удовлетворяется тождественно. Данный способ, основанный на разложении приращения функции Понтрягина, легко распространяется на общую полиномиальную по управлению задачу (1), (2).

Таким образом, можно определить однозначное отображение $S(u,v)=s$, $u\in U$, $v\in U$, где s однозначно определяется из решения уравнения (10). При этом всегда $S(u,u)=0$. Тогда система (9), (10) сводится к вспомогательному уравнению (возможно, не единственным образом)

$$v=W^{\alpha}(u,v,S(u,v)).$$

Определим оператор W_1^{α} с помощью соотношения $W_1^{\alpha}(v)=W^{\alpha}(u,v,S(u,v))$, $v\in U$. Тогда система (9), (10) представляется в форме задачи о неподвижной точке проекционного оператора W_1^{α}

$$v=W_1^{\alpha}(v),\quad v\in U \tag{13}$$

и метод улучшения интерпретируется как поиск неподвижных точек этого оператора. Определяя различные однозначные отображения $P(u,v)$ и $S(u,v)$ в силу системы (4)-(7) и уравнения (10), получаем модификации метода улучшения с различными проекционными оператороми W_1^{α}.

Рассмотрим множество неподвижных точек $V_1^{\alpha}(u)=\{v\in U: v=W_1^{\alpha}(v)\}$ в процедуре улучшения. Понятно, что если $u\in V_1^{\alpha}(u)$ хотя бы для одного $\alpha>0$, то u удовлетворяет дифференциальному принципу максимума (3). Обратно, если u удовлетворяет условию (3), то u является решением уравнения (13) для всех $\alpha>0$, т. е. $u^0\in V_1^{\alpha}(u^0)$, $\alpha>0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма. Управление $u\in U$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума (3) тогда и только тогда, когда $u\in V_1^{\alpha}(u)$.

Следствие (дифференциальный принцип максимума). Для оптимальности управления $u\in U$ необходимо, чтобы $u\in V_1^{\alpha}(u)$ хотя бы для одного $\alpha>0$.

Таким образом, отсутствие неподвижных точек в процедуре нелокального улучшения хотя бы для одного $\alpha>0$ свидетельствует о неоптимальности управления $u\in U$.

Оценка (12) гарантирует строгое улучшение управления $u\in U$ (в том числе удовлетворяющего ДПМ) при $v^{\alpha}\in V_1^{\alpha}(u)$, $v^{\alpha}\neq u$. Таким образом, случай неединственности решения задачи о неподвижной точке (13) обеспечивает строгое улучшение управления, удовлетворяющего ДПМ.

Оценка (12) позволяет сформулировать новое усиленное необходимое условие оптимальности на основе предлагаемого подхода улучшения.

Теорема. Для оптимальности управления $u\in U$ в задаче (1), (2) необходимо, чтобы оно было единственным управлением на выходе процедуры улучшения

$V_1^\alpha(u) = \{u\}$ для всех $\alpha > 0$.

Очевидно, что дифференциальный принцип максимума является следствием теоремы.

2. Примеры

Проиллюстрируем работу предлагаемого метода нелокального улучшения на простых примерах.

Пример 1 (улучшение нелинейного управления).

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t) + u^2)dt \quad \to \quad \min,$$

$$\dot{x}(t) = u, \quad x(0) = 1, \quad u \in U = [-1,1], \quad t \in T = [0,1].$$

Рассмотрим управление $u = 0$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t,u) = 1, \quad t \in T$ и значением функционала $\Phi(u) = \frac{1}{2}$. Поставим задачу об улучшении управления u.

Применим процедуру улучшения. В данном случае имеем функцию Понтрягина $H = \psi u - \frac{1}{2}(x^2 + u^2)$, $H_x = -x$, $H_u = \psi - u$, $\Delta_v H = \psi(v-u) - \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$, решение фазовой системы $x(t,v) = 1 + vt$, $t \in T$, $v \in U$, дифференциально-алгебраическую сопряженную систему

$$\dot{p}(t) = 1 - r(t),$$

$$(1 - r(t))vt = \frac{1}{2}(2 + vt)vt,$$

$$p(1) = -q,$$

$$qv = 0,$$

определяющую $p(t,u,v)$, $t \in T$.

При $v = 0$ получаем $x(t,v) = x(t,u)$ и, в соответствии со способом однозначного разрешения алгебраических соотношений, аналогичным [2; 3], полагаем $r(t) \equiv 0$, $q = 0$. Отсюда определяем $p(t,u,v) = \psi(t,u) = 1 - t$, $t \in T$.

При $v \neq 0$ сопряженная система принимает вид

$$\dot{p}(t) = 1 + \frac{1}{2}vt,$$

$$p(1) = 0,$$

из которой получаем $p(t,u,v) = t + \frac{vt^2}{4} - 1 - \frac{v}{4}$, $t \in T$.

Отображение W^{α} с проекционным параметром $\alpha > 0$ имеет вид

$$W^{\alpha}(u,v,s) = P_U(\alpha(\int_T p(t,u,v)dt + s)).$$

Таким образом, получаем следующую систему, определяемую условиями (9), (10), которая формирует задачу о неподвижной точке

$$v = P_U(\alpha(\int_T p(t,u,v)dt + s)),$$

$$\int_T (p(t,u,v)v - \frac{1}{2}v^2)dt = v(\int_T p(t,u,v)dt + s).$$

Пусть $v = 0$ является решением системы. В этом случае алгебраическое уравнение, соответствующее условию (10), вырождается в тождество. Тогда, в соответствии с указанным выше правилом однозначного определения s, полагаем $s = 0$. Проекционный оператор W_1^{α} в задаче о неподвижной точке принимает вид

$$W_1^{\alpha}(v) = P_U(-\alpha\frac{1}{2}) \neq 0.$$

Следовательно, $v = 0$ не может быть неподвижной точкой. Полученное противоречие говорит о том, что данный случай не реализуем. В соответствии с леммой отсюда также следует вывод о том, что $u = 0$ не удовлетворяет дифференциальному принципу максимума.

Предположим, что $v \neq 0$. В данном случае получаем следующую систему, определяющую задачу о неподвижной точке

$$v = P_U(\alpha(\int_T p(t,u,v)dt + s)),$$

$$\int_T (p(t,u,v) - \frac{1}{2}v)dt = \int_T p(t,u,v)dt + s.$$

Отсюда задача о неподвижной точке принимает вид

$$v = P_U(\alpha(\int_T (t + \frac{vt^2}{4} - 1 - \frac{v}{4})dt - \frac{1}{2}v)).$$

После упрощений имеем уравнение

$$v = P_U(\alpha(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}v)).$$

Методом подстановки точек $v = \pm 1$ в уравнение легко можно убедиться, что эти точки не могут быть неподвижными. Следовательно, неподвижные точки определяются соотношением

$$v = \alpha(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}v),$$

из которого получаем единственное решение

$$-1 < v = \frac{-3\alpha}{2(3+2\alpha)} < 0 .$$

Полученное решение строго улучшает исходное управление $u = 0$ с оценкой, определяемой условием (12).

Отметим, что в данном простом примере, используя явное представление решения фазовой системы по параметру v, можно легко определить оптимальное решение в виде $v^* = -\frac{3}{8}$. Данное решение реализуется в качестве выходного управления в процедуре улучшения при $\alpha = \frac{3}{2}$.

Пример 2 (улучшение управления, удовлетворящего ДПМ).

$$\Phi(u) = \int_0^1 (x^2(t) - u^2)dt \quad \to \quad \min ,$$

$$\dot{x}(t) = u, \quad x(0) = 0, \quad u \in U = [-1,1], \quad t \in T = [0,1] .$$

Рассмотрим задачу об улучшении управления $u = 0$ с соответствующей фазовой траекторией и значением функционала $\Phi(u) = 0$.

Имеем $H = \psi u - x^2 + u^2$ решение фазовой системы $x(t,v) = vt$, $t \in T$, $v \in U$, дифференциально-алгебраическую сопряженную систему

$$\dot{p}(t) = -r(t) ,$$
$$r(t)vt = v^2t^2 ,$$
$$p(1) = -q ,$$
$$qv = 0 ,$$

определяющую $p(t,u,v)$, $t \in T$.

Если $v = 0$, т.е $x(t,v) = x(t,u)$, то, в соответствии с правилами [2; 3] однозначного представления, полагаем $r(t) \equiv 0$, $q = 0$. При этом $p(t,u,v) = \psi(t,u) = 0$, $t \in T$.

Если $v \neq 0$, то получаем сопряженную систему

$$\dot{p}(t) = -vt ,$$
$$p(1) = 0 ,$$

из которой следует $p(t,u,v) = \frac{v}{2}(t^2 - 1)$, $t \in T$. Отметим, что полученное представление включает случай $v = 0$.

Таким образом, получаем отображение W^α с проекционным параметром $\alpha > 0$ в виде

$$W^{\alpha}(u,v,s) = P_U(\alpha(\frac{v}{3}+s))$$

и систему, определяющую задачу о неподвижной точке,

$$v = P_U(\alpha(\frac{v}{3}+s)),$$
$$\int_T (p(t,u,v)v + v^2)dt = v(\int_T (p(t,u,v)+2v)dt + s).$$

При $v=0$ алгебраическое уравнение, соответствующее условию (10), удовлетворяется тождественно. Тогда, согласно правилу однозначного определения s, определяем $s=0$. При этом точка $v=0$ является решением проекционного соотношения для всех $\alpha>0$. В соответствии с леммой это значит, что исходное управление $u=0$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума.

При $v\neq 0$ получаем систему, определяющую задачу о неподвижной точке

$$v = P_U(\alpha(\frac{v}{3}+s))$$
$$\int_T (p(t,u,v)+v)dt = \int_T (p(t,u,v)+2v)dt + s,$$

из которой следует задача о неподвижной точке

$$v = P_U(\alpha\frac{2}{3}v).$$

Подстановкой точек $v=\pm 1$ в уравнение легко можно убедиться, что эти точки являются неподвижными при $\alpha \geq \frac{3}{2}$. Других неподвижных точек $v\neq 0$ уравнение не имеет.

Следовательно, неподвижные точки $v=\pm 1$ при $\alpha \geq \frac{3}{2}$ строго улучшают исходное управление $u=0$, удовлетворяющее дифференциальному принципу максимума, с оценкой, определяемой условием (12).

В данном простом примере, используя явное представление решения фазовой системы по параметру v, можно легко показать, что полученные решения $v=\pm 1$ являются оптимальными.

Заключение

Предложен новый подход к нелокальному улучшению нелинейных параметров динамических систем с помощью решения специальной задачи о неподвижной точке определяемого оператора проектирования. Показана принципиальная возможность строгого нелокального улучшения нелинейных управлений на основе применения операции проектирования в рассматриваемом классе задач.

Выделим основные свойства предлагаемого подхода в рассматриваемом классе нелинейных по управлению задач параметрической оптимизации, выгодно отличающие его от градиентных методов.

1. Возможность строгого улучшения управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума (в том числе особых управлений). Такая возможность появляется в случае неединственности решения задачи о неподвижной точке. Градиентные методы такой возможностью не обладают.

2. Получение новых необходимых условий оптимальности, усиливающих дифференциальный принцип максимума в рассматриваемом классе задач.

3. Нелокальность улучшения управления и отсутствие процедуры параметрического поиска улучшающего управления в достаточно малой окрестности улучшаемого управления, характерной для стандартных локальных методов.

Отметим, что предлагаемый проекционный метод не требует ограниченности множества U .

Компенсацией за поиск неподвижных точек является свойство нелокальности улучшения и возможность строгого улучшения управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума.

Возможна ситуация, когда задача о неподвижной точке определяемого проекционного оператора не имеет решения. Это значит, что управление $u \in U$ не удовлетворяет дифференциальному принципу максимума. В данном случае предлагаемый метод улучшения не действует, и следует перейти к другим методам улучшения.

Литература

1. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. 344 с.
2. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркут. гос. ун-та. Математика. 2009. Т. 2, № 1. С. 94–107.
3. Булдаев А.С. Новый подход к оптимизации управляемых систем на основе краевых задач // Автоматика и телемеханика. 2011. №6. С. 87-94.

Булдаев Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, директор Научно-образовательного инновационного центра системных исследований и автоматизации БГУ, e-mail: buldaev@mail.ru

Очирбат Баатар, доктор математических наук, профессор, директор школы информатики и управления Монгольского университета науки и технологий, e-mail: bochir@yahoo.com, baatar@must.edu.mn

Хишектуева Ишин-Хорло Дамбадоржиевна, аспирант кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: ishin@ulanovka.ru

Buldaev Alexander Sergeevich, doctor of physical and mathematical sciences, professor of applied mathematics department, Buryat State University, director of the Scientific and Educational Innovation Centre for System Studies and Automation at BSU.

Ochirbat Baatar, doctor of mathematical sciences, professor, director, Computer Science and Management School of Mongolian University of Science and Technology (Ulaanbaatar).

Khishektueva Ishin-Khorlo Dambadorzhievna, postgraduate student, applied mathematics department, Buryat State University.

УДК 517.977 © **В.И. Гурман, Д.Ц. Будаева, С.Н. Насатуева**

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БИОПОПУЛЯЦИЕЙ С УЧЕТОМ ИННОВАЦИЙ НА МОДЕЛИ С ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ в рамках научного проекта № 11-02-00171-а, РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-98011-р_Сибирь_а

Рассматривается подход к учету инновационных процессов в модели популяции с возрастной структурой и процедура оптимизации управления по естественным экономическим критериям. В качестве содержательного примера решается задача управления поголовьем крупного рогатого скота.

Ключевые слова: *модель биопопуляции, оптимальное управление, инновации.*

V.I. Gurman, D.Ts. Budaeva, S.N. Nasatueva

OPTIMAL CONTROL OF BIOPOPULATION TAKING INTO ACCOUNT INNOVATIONS ON MODEL WITH AGE STRUCTURE

An approach to the accounting for innovative processes in the model of biological population with age structure and a management optimization procedure under natural economic criteria are considered. As a substantial example, the problem of control the number of cattle is solved.

Keywords: *biological population model, optimal control, innovations.*

Введение

В данной работе рассматривается задача оптимального управления биологической популяцией по экономическому критерию на основе известной матричной модели [1]. В этой модификации учитываются активные инновационные процессы путем добавления инновационных блоков типа «затраты – выпуск», где «выпуск» трактуется специфически как улучшение параметров исходной модели.

Конкретная цель данной работы состоит в том, чтобы на примере управления стадом крупного рогатого скота (КРС) продемонстрировать все этапы практического исследования, включая концептуализацию модели, идентификацию ее параметров по эмпирическим данным, постановку задачи оптимального управления и ее решение достаточно универсальным методом итерационного улучшения.

В [4] аналогичная задача рассматривалась в общем виде, и упор был сделан на поиск приближенных магистральных решений при идеализирующих допущениях, указывалось на возможность их использования как начальных приближений в универсальных процедурах улучшения. Здесь же, в отличие от [4], реализуется именно процедура улучшения безотносительно к способу задания начального приближения.

1. Модификация матричной модели биопопуляции и задача управления

Подход, развитый в [2–4] и успешно апробированный в некоторых задачах устойчивого развития регионов, состоит в следующем.

Межгодовая динамика популяции без учета инноваций описывается уравнениями

$$\dot{x}^1 = \sum_{i=l}^{k}(\sigma_i \omega_i x^i)^{\beta_i} - k_1 x^1 - u^1, \ \dot{x}^i = \gamma^i x^{i-1} - k_i x^i - u^i, \quad i = 2, \dots, n, \qquad (1)$$

где x^i – численности возрастных групп, γ_i – коэффициенты перехода из одной группы в следующую, k_i – коэффициенты смертности, σ_i, β_i – параметры рождаемости, ω_i – доля женских особей в соответствующей группе, u^i – темпы изъятия-пополнения численностей в целях управления.

Пусть $\Pi(t)$ – экономический эффект на отрезке $[t_I, t]$, называемый условно накопленным доходом, динамика которого описывается уравнением вида

$$\dot{\Pi} = f^0(t,x,u,q), \quad t \in [t_I, t_F]. \qquad (2)$$

Через q обозначен вектор параметров, постоянных при отсутствии инновационных изменений, таких как k_i, σ_i, β_i и т. п.

Инновации трактуются как изменение параметров, которое описывается следующими уравнениями:

$$\dot{\theta} = -([d] + H(t,x,u,q(\theta)))(\theta - \overline{\theta}), \quad \dot{k}^d = u^d - \delta^d k^d, \quad 0 \le d \le \Gamma^d(k^d), \qquad (3)$$

$$q^l = q_I^l(1 + \theta_j \alpha_{lj}), \quad l \in I_j, \quad \sum_{l \in I_j} \alpha_{lj} = 1. \qquad (4)$$

Здесь d – вектор активных инноваций; $[d]$ – диагональная матрица; k^d, $\Gamma^d(k^d)$, u^d, δ^d – основные фонды, мощности и инвестиции (векторы) и темпы амортизации в инновационном секторе (диагональные матрицы); θ – вектор инновационных индексов (агрегированное описание изменения параметров исходной модели за счет инноваций); α_{lj} – весовые коэффициенты; q_I^l – значение в начале наблюдения; $H(t,x,u,q)$ – диагональная матрица, учитывающая различные инновационные процессы, помимо активной инновационной деятельности (например, известную в экономической теории диффузию инноваций); инновации, сопутствующие инвестиционному процессу, и т.п.

Очевидно, активная инновационная деятельность требует дополнительных прямых и фондообразующих затрат, которые принимаются линейными относительно соответствующих управляющих воздействий:

$$\dot{\Pi} = f^0(t,x,u,q) - A^d d - B^d u^d\,, \tag{5}$$

где A^d, B^d — матрицы-строки коэффициентов прямых и фондообразующих затрат в инновационном секторе.

Задача оптимального управления ставится следующим образом: перевести систему (1), (5) на заданном отрезке времени $[t_I, t_F]$ из заданного начального состояния x_I, q_I в заданное множество конечных состояний Γ при ограничениях на управления $u \in U(t)$, $0 \le d \le d_{\max}$ и на состояние $x \in X(t)$ с максимальным значением $\Pi(t_F)$.

2. Итерационный алгоритм оптимизации

При практическом решении задачи, по крайней мере на этапе расчетов, предполагается дискретизация дифференциальных соотношений. В связи с этим целесообразно использовать дискретизованную версию модели и применять соответствующий итерационный алгоритм [5].

Задача оптимального управления дискретной системой ставится следующим образом: найти программу $u(t)$ и соответствующую ей траекторию $x(t)$ (эволюцию состояний), при которой выполняются следующие соотношения

$$\begin{cases} x(t+1) = f(t,x(t),u), \quad t\{t_I, t_I+1,\dots,t_F\}, \\ x(t_I) = x_I,\, x(t_F) \in \Gamma,\, x(t) \in \mathrm{X}(t),\, u \in U(t,x(t)), \\ I = F(x(t_F)) \to \min\,(\inf). \end{cases}$$

То есть задана цель управления $x(t_F) \in \Gamma$. Необходимо найти программу управления $u \in U(t,x(t))$ и соответствующую ей траекторию $x(t)$, при которой выполняются ограничения $x(t) \in \mathrm{X}(t)$, а цель управления выполняется наилучшим образом согласно критерию I.

Рассмотрим постановку этой задачи как конкретизацию общей задачи об оптимуме ($M, D, I : M \to R$). За множество M примем совокупность всевозможных пар функций $m = (x(t),u(t))$. Множество D выделяется из M следующими связями и ограничениями:

$$x(t+1) = f(t,x(t),u), \quad u \in U(t,x)\,,\ x \in \mathrm{X}(t)\,,$$

$t_I, t_F, x(t_I) = x_I$ фиксированы, $x(t_F) \in \Gamma$. Требуется найти минимизирующую последовательность $\{m_s\} \subset D$, на которой $I(m_s) \to I_* = \inf\limits_D I$.

Будем применять принцип расширения и достаточные условия оптимальности. Введем в рассмотрение следующие конструкции:

$$R(t,x,u)=\phi(t+1,f(t,x,u))-\phi(t,x),$$
$$\mu(t)=\sup_{u\in U(t,x),x\in X(t)} R(t,x,u)$$
$$G(x)=F(x)+\phi(t_F,x)-\phi(t_I,x_I),$$
$$l=\inf G(x),\quad x\in\Gamma\cap X(t_F).$$

Составим с их помощью функционал $L=G(x(t_F))-\sum_{t_I}^{t_F-1}R(t,x(t),u(t))$ (обобщенный лагранжиан). Легко проверить, что $L=I$ на D, отсюда следует, что если имеется элемент $m^I\in D$ и элемент m^{II} такой, что $L\left(m^I\right)>L\left(m^{II}\right)$, и если $m^{II}\in D$, то $I\left(m^I\right)>I\left(m^{II}\right)$. Задача улучшения управления для L проще, потому что она рассматривается без рекуррентной связи (дискретной цепочки).

Далее речь пойдет о задаче:

$$x\left(t+1\right)=f\left(t,x\left(t\right),u\right),\ u\in U,\ I=F\left(x\left(t_F\right)\right),$$

$T=\left\{t_I,...,t_F\right\}$ – задано, $x\left(t_I\right)=x_I$ – задано. Если задача дана с другими ограничениями, то избавиться от дополнительных ограничений можно известным методом штрафов.

Чтобы задачу улучшения решать наиболее эффективно, целесообразно сводить ее к задаче оптимизации в достаточно малой окрестности известного элемента m^I на упрощенной модели. Чтобы улучшенная траектория не вышла из заданной окрестности, надо локализовать задачу, т.е. добавить дополнительное условие $\left|u-u^I(t)\right|\le\alpha$. Рассмотрим разность

$$\Delta R=R\left(t,x,u\right)-R\left(t,x^I\left(t\right),u^I\right).$$

Линеаризуем ее и заменим моделью:

$$\Delta R=\Delta R_x^I y+\Delta R_u^I \upsilon,$$

где $y=x-x^I\left(t\right)$, $\upsilon=u-u^I\left(t\right)$, $y^0=x^0\left(t\right)$, $\left(\Delta R_x^I,\Delta R_{x^0}^I,\Delta R_u^I\right)$ – вектор частных производных, которые берутся на элементе m^I. Дальше будем максимизировать эту конструкцию по y, υ.

Введем в рассмотрение функцию

$$H\left(t,\psi,x,u\right)=\psi^T f\left(t,x,u\right).$$

Тогда ΔR запишется так:

$$\Delta R=H\left(\psi\left(t+1\right),x^I\left(t\right),u^I(t)\right)_x y+H_u^I\upsilon-\psi^T\left(t\right)y.$$

Будем максимизировать ΔR. Полагая, что $\Delta R\approx R_x^I\Delta x+\Delta_u R$, будем выбирать $\upsilon=\Delta u$ так, чтобы υ было достаточно малым

($|\upsilon| \le \alpha$), $(u^I(t) + \upsilon(t)) \in U$ (U считается для простоты постоянным множеством). Иначе говоря, υ будем подбирать так, чтобы

$(u^I(t) + \upsilon(t)) \in U_\alpha = \{u \in U \big| |\upsilon| \le \alpha\}$.

При достаточно малом α отклонение от соответствующего приращения Δx будет малым. Модификация состоит в том, что вместо аналитического представления для υ получается значение υ, которое находится в множестве U_α. В процессе вычислений дело сводится к численному перебору на этом множестве α. Это дает возможность учесть ограничения на u непосредственно без использования штрафных функций.

Функционал ΔL тогда будет представлен так $\Delta L = -\sum_{t_I}^{t_F-1} \Delta_u R$, и если приращение $\Delta_u R > 0$, то $\Delta L < 0$.

1. Просчитывается цепочка

$$\psi(t) = -H_x(t, \psi(t+1), x^I(t), u^I(t))$$

при начальном условии на правом конце

$$\psi(t_F) = -F_x(x^I(t_F)).$$

2. Находится υ_α непосредственным поиском в окрестности u^I.
3. Делается прямой счет

$$x(t+1) = f(t, x(t), u^I(t) + \upsilon_\alpha(t)).$$

4. Для различных α вычисляется $F(x_\alpha(t_F))$, и это минимизируется по α, т.е.

$$F(x_\alpha(t_F)) \to \min_\alpha \Rightarrow \alpha_*.$$

5. Вычисляется $u^{II}(t) = u^I(t) + \upsilon_{\alpha_*}$.

6. Управление $u^{II}(t)$ принимается за новое $u^I(t)$, и начинается новая итерация.

Критерий остановки – функционал перестает улучшаться.

3. Модифицированная модель стада КРС и ее информационное обеспечение

Рассмотрим приложение модифицированной модели биопопуляции из раздела 1 к задаче эксплуатации стада КРС с численностями животных

x^1, x^2, x^3 в трех возрастных группах: от 0 до 1-го года, от 1-го до 2-х лет и от 2-х лет и старше. По содержанию и уходу наиболее затратны 1-я и 2-я группы. Из 1-й и 2-й групп возможна продажа живого скота, 2-я и 3-я группы используются для производства мяса и мясопродуктов, а 3-я группа – еще и для производства молочной продукции. Предполагается, что инновации приводят к уменьшению коэффициентов прямых затрат по содержанию и уходу a_i и увеличению годовых надоев от одной коровы μ. Динамика накопленного дохода описывается уравнением:

$$\dot{\Pi} = \sum_{i=1}^{3}(\rho_i u^i) + \rho_4 \mu\, \omega\, x^3 - \sum_{i=1}^{3}(a_i x^i) - A^d d\,, \tag{6}$$

где ρ_i – цены на соответствующие виды продукции, a_i – удельные расходы по содержанию скота. В терминах общей модели получится 4-мерный вектор параметров $q = (a_1, a_2, a_3, \bar{\mu} - \mu)$ ($\bar{\mu}$ –максимально возможное значение μ). Агрегирование не производится, т.е. $\theta = q$.

Требуется определить политику ведения хозяйства на заданном промежутке времени $[t_I, t_F]$, т.е. функции $u(t)$, $d(t)$, обеспечивающие максимальное значение $\Pi(t_F)$ (минимум функционала $I = -\Pi(t_F)$) при следующих граничных условиях и ограничениях:

$0 \le u \le u_{\max}$, $0 \le d \le d_{\max}$, $x(t_I) = x_I$, $x(t_F) = x_F$, $\Pi(t_I) = 0$, $q(t_I) = q_I$, $x^i \ge x_l^i$.

Последние означают, что поголовье в каждой возрастной группе не должно уменьшаться ниже границы, определяемой из биологических и эксплуатационных соображений.

Описанная модель является концептуальной. Информационное обеспечение состоит в том, чтобы разработать и реализовать методики формирования таблиц параметров концептуальной модели, исходя из их содержательного смысла, с использованием первичной статистической информации, разнообразных литературных и документальных источников, целенаправленных эмпирических исследований и экспертных оценок.

Проблемы информационного обеспечения, с учетом сложностей получения междисциплинарных данных о взаимодействиях различных компонентов единой системы, представляются наиболее сложными. Они рассмотрены подробно в [6] вместе со способами их решения. Среди них отметим методологию абстрактных (виртуальных) экспериментов, которая существенно использует математические преобразования модели для выявления содержательного смысла многочисленных неизвестных параметров модели и формулирования соответствующих запросов на языке предметных специалистов. С помощью этой методологии был сформирован содержательный запрос на эмпирические данные (табл. 1):

Таблица 1

Параметр	Содержательная характеристика
$\gamma_{2,3}$	коэффициенты перехода из одной группы в следующую: расчет, исходя из естественного взросления
k_i	коэффициенты смертности: каков процент скота вымирает в год в i-й группе
σ , β	параметры плодовитости: каков приплод от одной коровы в год
ω	доля коров в стаде
μ	годовые надои от одной коровы
$\overline{\mu}$	максимально возможное значение μ
A^d	матрицы прямых затрат на инновации: примеры, сколько стоит повышение надоев и плодовитости путем приобретения более породистой коровы, улучшения условий содержания в пересчете на 1 единицу
ρ_i	цены на соответствующие виды продукции (мясо, молоко, живой скот)
a_i	удельные расходы по содержанию скота: расходы на 1 единицу в год в соответствующей возрастной категории

В результате обработки этих данных, дополненных условными на основе экспертных оценок, получены следующие значения параметров модели (табл. 2)

Таблица 2

Параметр	Способ расчета	Значение
γ_2	$\frac{1}{m}$, где m – число возрастных групп	1
γ_3	$\frac{1}{m}$, где m – число возрастных групп	$\frac{1}{3}$
k	определяется непосредственно из эмпирических данных о падеже скота	[0.1, 0.01, 0]
σ	$\sigma = \frac{dx^1}{\omega x^3}$, где dx^1 имеет смысл прироста в год в 1-й группе	1
β	определяется непосредственно из эмпирических данных о выходе телят	0.8
ω	определяется непосредственно из эмпирических данных о поголовье скота	0.73
μ	определяется непосредственно из эмпирических данных об удоях	1 900

$\overline{\mu}$	определяется непосредственно из эмпирических данных об удоях	2 100
A^d	экспертная оценка с использованием эмпирических данных	[6 000, 9 000,0,0]
ρ	информация из интернета	[80, 150, 150, 15]
a	экспертная оценка с использованием эмпирических данных	[9 000, 6 500, 7 000]

4. Программное обеспечение и вычислительные эксперименты

Итерационный алгоритм из раздела 2 был реализован применительно к задаче управления поголовьем КРС в системе MAPLE-13, и проведена серия вычислительных экспериментов. Основные результаты представлены на рисунках 1-8 и в таблице 3.

В таблице показано изменение функционала по итерациям.

Таблица 3

№ итерации	Уровень накопленного дохода
0	1 350 241
1	2 458 295
2	2 458 295

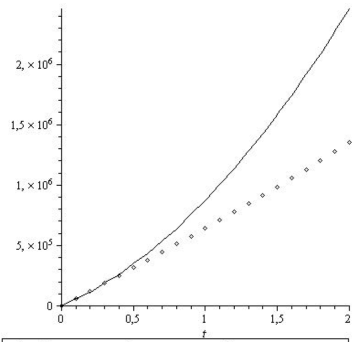

Рис.1. Уровень накопленного дохода

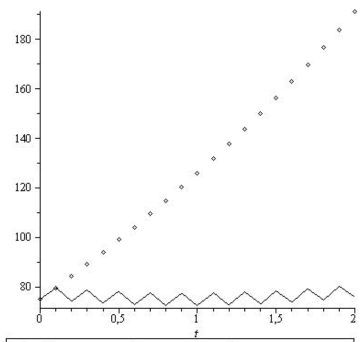

Рис.2. Поголовье скота в 1-й группе

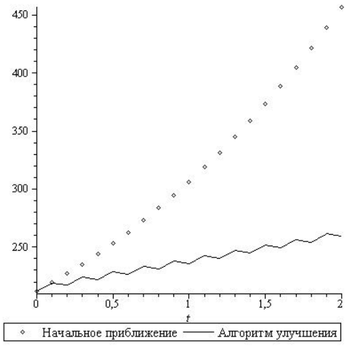

Рис. 3. Поголовье скота во 2-й группе

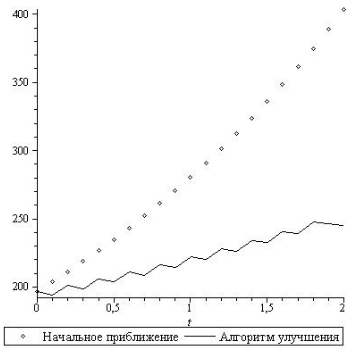

Рис. 4. Поголовье скота в 3-й группе

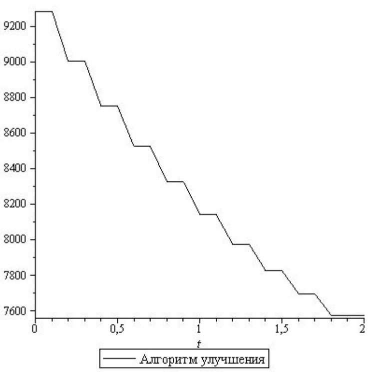

Рис.5. Удельные расходы в 1-й группе (q_1)

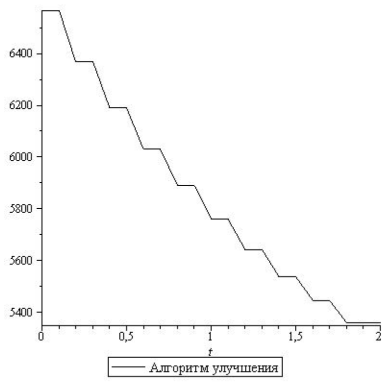

Рис.6. Удельные расходы во 2-й группе (q_2)

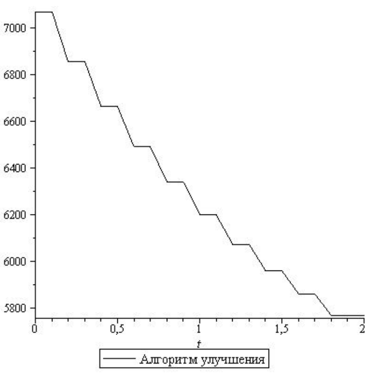

Рис.7. Удельные расходы в 3-й группе (q_3)

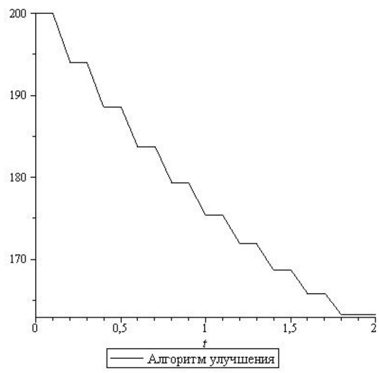

Рис. 8. Удои ($\mu - \overline{\mu}$)

Зигзагообразный характер улучшенной траектории объясняется спецификой для применяемого алгоритма формирования управления в виде скользящего режима, который может быть заменен эквивалентным осредненным. Это соответствует гладкому осреднению полученной траектории, что не представляет затруднений.

Представленные результаты вычислительных экспериментов демонстрируют высокую эффективность применяемого универсального алгоритма улучшения для рассматриваемого класса задач с системой связей, близкой к линейной: практическая сходимость обеспечивается за одну итерацию (при том, что итерация содержит серию прогонов задачи Коши для исходной системы).

Заключение

Таким образом, построена модификация достаточно общей матричной модели биопопуляции с учетом инновационных процессов, и сформулирована задача оптимального управления по экономическому критерию эффективности. В качестве приложения исследована задача управления поголовьем КРС. Проведены эмпирические исследования по информационному обеспечению на примере крупной фермы, исходя из требований концептуальной модели с привлечением разнообразных источников и экспертных оценок. Для решения конкретной задачи оптимального управления применен универсальный итерационный алгоритм, основанный на достаточных условиях оптимальности и улучшения.

С этой точки зрения, данную работу можно рассматривать и как продолжение [4], где получено эффективное начальное приближение (магистральное решение), но не представлен алгоритм его улучшения. А также ее можно применять и как самостоятельную (из области моделирования популяций с возрастной структурой) для исследования различных проблем, включая демографические, когда специфическое магистральное решение получить не удается, и используются весьма произвольные начальные приближения. Полученные результаты показывают высокую эффективность применяемого алгоритма оптимизации в подобных условиях.

Литература

1. Динамическая теория биологических популяций / под ред. Р.А. Полуэктова. М.: Наука, 1974.
2. Gurman V.I. Modeling and optimization sustainable strategies on regional level // Proceedings of LI Int. Conference Econometrics of Environment and Transdisciplinarity / Lisbon, Portugal, April 1996. V. 5.
3. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. М.: Наука, 2001.
4. Гурман В.И., Халтар Д. Оптимальное управление ресурсами с учетом инноваций // Автоматика и телемеханика. 2011. №7. С. 5-12.

5. Гурман В.И., Трушкова Е.А. Практические методы оптимизации. Переславль-Залесский: Изд-во ун-та Переславля, 2009.
6. Гурман В.И., Будаева Д.Ц. Проблемы информационного обеспечения модели региона // Вестник Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. Улан-Удэ, 2012. № 1. С. 20-25.

Гурман Владимир Иосифович, доктор технических наук, главный научный сотрудник ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, зав. кафедрой системного анализа Университета Переславля, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета. 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: vig70@mail.ru.

Будаева Должит Цырендондоковна, кандидат экономических наук, доцент Бурятской государственной сельскохозяйственной академии им. В.Р. Филиппова. 670024, г. Улан-Удэ, ул. Пушкина, 8, e-mail: dolgit2006@yandex.ru

Насатуева Соелма Номтоевна, магистр прикладной математики Бурятского государственного университета. 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: soelmann@mail.ru.

Gurman Vladimir Iosifovich, doctor of engineering, principal researcher, A.K.Ailamazyan PSI RAS, head of system analysis department, Pereslavl University, professor of applied mathematics department, Buryat State University. 670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24a.

Budaeva Dolzhit Tsyrendondokovna, candidate of economic sciences, associate professor, V.R. Filippov Buryat State Agricultural Academy. 670024, Ulan-Ude, Pushkin str., 8.

Nasatueva Soelma Nomtoevna, master of applied mathematics, Buryat State University. 670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24a.

УДК 517.977

© **И.В. Расина, М.А. Аветян**

НЕЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00256-а) и РГНФ (проект 11-02-00171-а).

Рассматривается нелокальный метод улучшения, основанный на достаточных условиях оптимальности. Апробация метода проводится на задаче оптимизации стратегии развития региона, описанной на многокомпонентной социо-эколого-экономической модели, учитывающей ограничения на восстановительные мощности природной среды и социальной сферы и на инновационные мощности.

Ключевые слова: *оптимизация, инновация, устойчивое развитие.*

I.V. Rasina, M.A. Avetyan

NONLOCAL METHOD OF IMPROVEMENT MAINSTREAM SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF REGIONAL DEVELOPMENT

A nonlocal method of improvement, based on the sufficient conditions of optimality is considered. Testing of the method is carried out on the problem of optimizaton the regional development strategy, as described in the multi-component socio-ecological-economic model that takes into account constraints on the capacities of the environment and social sphere recovering and innovative capacities.

Keywords: *optimization, innovation, sustainable development.*

Введение

Особенность прикладных задач оптимального управления, как непрерывных, так и дискретных, состоит в том, что поиск решения непосредственно из теоретических результатов (таких как принцип максимума Понтрягина или уравнение Беллмана) затруднен в силу сложности их реализации. Этот факт послужил основой для разработки численных методов, позволяющих искать оптимальное решение напрямую, посредством операций улучшения управления, повторяемых в итерационной процедуре. В первую очередь были созданы градиентные методы, позволяющие находить локальный оптимум и демонстрирующие снижение эффективности по мере приближения к нему. Отметим некоторые из них [1-6]. Затем последовали более сложные разработки, была создана серия методов второго порядка, например [7-9]. Кроме того, усилия исследователей были направлены на создание методов нелокального улучшения [10-14]. Следует заметить, что для дискретных процессов разработок значительно меньше, чем для непрерывных.

Далее в работе рассматривается одна из модификаций метода, предложенного в [15] для дискретных систем, состоящая в сужении множества поиска вариаций управления. Полученный алгоритм апробируется на исследованной ранее задаче оптимизации стратегии развития региона на многокомпонентной модели [16; 17], описывающей взаимодействие трех секторов – основного производственного, социо-природо-восстановительного и инновационного. Предполагается (в целях упрощения), что мощности последних двух секторов не ограничены, и учитываются лишь прямые затраты, связанные с текущей деятельностью. Это приводит к постановке вырожденной задачи оптимизации неограниченных линейных управлений и характерному для таких задач решению – магистральному, которое находится путем преобразования исходной задачи к эквивалентной меньшего порядка, называемой производной [18; 19].

Соответствующая траектория (магистраль) разрывна, не удовлетворяет в общем случае заданным граничным условиям, реализуется практически при достаточно больших управляющих воздействиях в окрестностях разрывов.

Цель данной работы – решение производной задачи с помощью предложенной модификации метода улучшения. С одной стороны, такое решение имеет самостоятельное значение, содержательную трактовку, а с другой – может быть модифицировано с учетом различных реальных ограничений, отраженных в полной социо-эколого-экономической модели и использовано в качестве эффективного начального приближения при численном итерационном улучшении управления.

1. Модификация метода улучшения

Рассматривается алгоритм улучшения, представленный в [15], основанный на линеаризации соотношений типа Беллмана в окрестности траектории текущей итерации, регулируемой посредством дополнительного ограничения управления с некоторым параметром $\alpha > 0$.

Задача оптимального управления имеет вид:

$$x(t+1) = f(t, x(t), u), \;\; u \in U, \;\; I = F(x(t_F)),$$

$\mathrm{T} = \{t_I, ..., t_F\}$ – задано, $x(t_I) = x_I$ – задано.

Рассмотрим задачу улучшения, состоящую в поиске элемента $m^{II} = (x^{II}(t), u^{II}(t))$ по заданному элементу $m^{I} = (x^{I}(t), u^{I}(t))$, на котором значение функционала меньше.

Для того чтобы точка минимума не вышла из окрестности элемента $m^{I} = (x^{I}(t), u^{I}(t))$, предлагается в соответствии с принципом локализации [8; 9] рассматривать вспомогательный функционал

$I \to I_\alpha = (1-\alpha)I + \alpha J(m^I, m),$ где

$$J(m^I, m^I) = 0,\ \ J(m^I, m) > 0,\ \ m \neq m^I :$$

$$0 < \alpha < 1.$$

Отсюда следует при $\alpha \to 1: m_* \to m^I = m_* = \arg\min I_\alpha$.

Введем новое уравнение

$$x^0(t+1) = x^0(t) + (u - u^I(t))^2.,$$

с учетом которого функционал I_α примет вид:

$$I_\alpha = (1-\alpha)F(x(t_F)) + \alpha x^0(t_F).$$

Рассмотрим аппроксимацию условий метода Кротова-Беллмана, задавая функцию Кротова ϕ линейно,

$$\phi(t,x) = \psi^{\mathrm{T}}(t)x + \upsilon(t).$$

Использование принципа расширения [20] позволяет отдельно исследовать на экстремум конструкции достаточных условий оптимальности [20] – функции G и R, которые в данном случае имеют вид:

$$G(x,x^0) = (1-\alpha)F(x) + \psi^{\mathrm{T}} x(t_F) + \upsilon(t_F) + \alpha x^0 + \psi^0(t_F)x^0,$$

$$R = \psi^{\mathrm{T}}(t+1)f(t,x,u) - \psi^{\mathrm{T}}(t)x + \upsilon(t+1) = \psi^0(t+1)(x^0 + (u-u^{\mathrm{T}}(t))^2) - \psi^0(t)x - \upsilon(t).$$

Рассмотрим разность

$$\Delta R = R(t,x^0,x,u) - R(t,0,x^I(t),u^I).$$

Линеаризуем ее и заменим моделью:

$$\Delta R = \Delta R^I_x y + \Delta R^I_{x^0} y^0 + \Delta R^I_u \upsilon + \psi^0(t+1)(\upsilon)^2,$$

где $y = x - x^I(t), \upsilon = u - u^I(t), y^0 = x^0(t), (\Delta R^I_x, \Delta R^I_{x^0}, \Delta R^I_u)$ – вектор частных производных, подсчитанных на элементе m^I. Далее будем максимизировать эту конструкцию по y, υ.

Введем в рассмотрение функции

$$H(t,\psi,x,u) = \psi^{\mathrm{T}} f(t,x,u),$$

$$H_\alpha = H + \psi^0(t+1)(x^0 + (u-u^I)^2).$$

Тогда ΔR примет вид:

$$\Delta R = H(\psi(t+1), x^I(t), u^I(t))_x y + \psi^0(t+1)y^0 + H^I_u \upsilon + \psi^0(t+1)(\upsilon)^2 - \psi^{\mathrm{T}}(t)y - \psi^0(t)y^0.$$

Решая задачу максимизации ΔR, будем выбирать $\upsilon = \Delta u$ так, чтобы υ было достаточно малым $(|\upsilon| \le \alpha), (u^I(t) + \upsilon(t)) \in U$ (U считается для простоты постоянным множеством).

Иначе говоря, υ будем подбирать так, чтобы

$$(u^I(t) + \upsilon(t)) \in U_\alpha = \{u \in U \| \upsilon | \le \alpha\}.$$

При достаточно малом α отклонение от соответствующего приращения Δx будет малым. Модификация состоит в том, чтобы вместо аналитического представления для υ получить его значение, находящееся в множестве U_α. В процессе вычислений такой поиск можно производить численным перебором при различных α, что дает возможность учесть ограничения на u непосредственно без использования штрафных функций.

Процедура улучшения в целом состоит из следующих шагов.

1. Просчитывается цепочка

$$\psi(t) = -H_x(t, \psi(t+1), x^I(t), u^I(t))$$

при начальном условии на правом конце

$$\psi(t_F) = -F_x(x^I(t_F)).$$

2. Находится υ_α непосредственным поиском в окрестности u^I, в множестве $U \bigcup \{ \left| \upsilon_\alpha - u^I \right| \le \alpha \}$, где $U = \{0 \le \upsilon_\alpha \le u^I_{\max}\}$. Поиск сводится к численному перебору на указанном множестве, зависящим от параметра α.

3. Решается заданная система с новым управлением

$$x(t+1) = f(t, x(t), u^I(t) + \upsilon_\alpha(t)),\ x(t_I) = x_I$$

для различных α, находится функционал $F(x_\alpha(t_F))$ и минимизируется по α.

Определяется α_* из условия

$$F(x_\alpha(t_F)) \to \min \alpha \Rightarrow \alpha_*.$$

4. Вычисляется

$$u^{II}(t) = u^I(t) + \upsilon_{\alpha_*},$$

которое принимается за новое $u^I(t)$, начинается новая итерация.

Критерий остановки – прекращение улучшения функционала.

2. Производная задача

Производная задача для поиска магистрального решения получается из полной системы уравнений модели [21] и состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \kappa(\theta)y - pB\delta k - p(A^\upsilon(\theta)\gamma^\upsilon + B^\upsilon\delta^\upsilon)k^\upsilon - S(r) + \\ &+ \eta^z(\theta)(\dot{\bar{r}} + N(r - \bar{r}) + im^r - ex^r) - (\eta^z(\theta)r)^T_\theta(\gamma^\upsilon[k^\upsilon] + H)(\theta - \bar{\theta}), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\dot{\theta} = -(\gamma^\upsilon[k^\upsilon] + H)(\theta - \bar{\theta}),\ \zeta(t_I) = 0,\ \theta(t_I) = 0, \tag{2}$$

где $\eta^z = p(A^z\gamma^z + \delta^z B^z)(C^z\gamma^z)^{-1},\ \kappa = p(E - A(\theta)) - \eta^z C(\theta).$

Здесь y, z, v – векторы выпусков продукции по отраслям, активного природо-социо-восстановления, активных инноваций; (k, k^z, k^v), (u, u^z, u^v) – основные фонды, мощности и инвестиции (векторы (матрицы-столбцы)); $(\gamma, \gamma^z, \gamma^v)$, $(\delta, \delta^z, \delta^v)$ – фондоотдачи и темпы амортизации в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах (диагональные матрицы); p – матрица-строка цен (ценовых поправок); r – вектор (матрица-столбец) индексов состояния природной среды и социума; θ – вектор (матрица-столбец) инновационных индексов; $\overline{\theta}$ – предельная граница инновационных индексов, $\overline{r}(t)$ – заданная функция (опорная), например получаемая из статистического прогноза; im^r, ex^r – миграционные потоки загрязнений и ресурсов; A, A^z, A^v – матрицы прямых затрат в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах; B, B^z, B^v – матрицы фондообразующих затрат в указанных секторах; N – матрица коэффициентов взаимовлияния компонентов природной и социальной подсистем; C – матрица коэффициентов прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем; H – диагональная матрица, отражающая влияние диффузии инноваций; $[k^v]$ – диагональная матрица из компонентов вектора k^v.

Критерий оптимальности – максимум функционала $\zeta_F = \zeta(t_F)$, который имеет смысл благосостояния [21]. В стандартной форме рассматривается задача поиска минимума функционала $I = -\zeta(t_F)$ при следующих предположениях: k^v не ограничено сверху, $A = A(\theta)$, $C = C(\theta)$, $A^\upsilon = A^\upsilon(\theta)$, $A^z = A^z(\theta)$. Предположения относительно матриц означают, что инновационным изменениям подвержены все коэффициенты прямых затрат.

3. Программная реализация и вычислительный эксперимент

Рассматривался конкретный пример для агрегированной версии модели с одномерными секторами производства, восстановления и инноваций для условного региона, прототипом которого служит Байкальский регион по состоянию на 2010 г.

Расчеты проводились для условного региона при следующих исходных данных:

$$t_F = 2,\ p = 1,\ \delta = \delta^z = \delta^v = 0.05,\ A_0 = 0.5,\ A(\theta) = (1+\theta)A_0,$$

$$C_0 = 0.000406,\ C(\theta) = (1+\theta)C_0,\ B = 1,\ A^z(\theta) = (1+\theta)A_0^z,\ B^z = 1,$$

$$A^\upsilon(\theta) = (1+\theta)A_0^\upsilon,\ B^v = 1,\ C^z = 1,\ k_0 = 400,\ k_0^z = 10,\ k_0^v = 6,\ \theta_0 = 0,$$

$$\overline{\theta} = -0.8,\ r_0 = 0.8,\ \overline{r} = 1,\ N = -0.001,\ im^r = 0.1,\ ex^r = 0.1,\ S(r) = s(r - \overline{r})^2,$$

$$s = 5000,\ \gamma = 10,\ \gamma^z = 0.0002, A_0^z = 200,\ A_0^\upsilon = 200,\ k_l = 0,\ H = 0.03,$$

$$\gamma^v = 0.0015,\ y^i = \gamma^i (k^i)^{\beta^i},\ k^i = k_l^i, \text{ï ðè}\, \kappa^i(\theta) \le 0,\ k^i = \left(\frac{(pB\delta)^i}{\kappa^i \gamma^i \beta^i}\right)^{\frac{1}{\beta^i - 1}},\ \beta^i = 0.7,$$

r^i находится из уравнения (условие стационарности):

$$((\eta^z(\theta)N)^T)^j - 2s(r^j - \bar{r}^j) - \frac{\partial Q(r)}{r^j} = 0,$$

где $Q(r) = ((\eta^z(\theta)r)_\theta)^T([\gamma^\upsilon k^\upsilon] + H)(\theta - \bar{\theta})$.

Поиск решения осуществлялся в два этапа.

Первый этап. Поведение исследуемой системы представлялось в виде дискретного процесса по методу Эйлера, в предположении, что на шаге дискретизации переменные сохраняются как константы.

$$\zeta(t+1) = \zeta(t) + h(\kappa(\theta)y - pB\delta k - p(A^\upsilon(\theta)\gamma^\upsilon + B^\upsilon\delta^\upsilon)k^\upsilon - S(r) + \\ +\eta^z(\theta)(\dot{r} + N(r - \bar{r}) + im^r - ex^r) - (\eta^z(\theta)r)^T_\theta(\gamma^\upsilon[k^\upsilon] + H)(\theta - \bar{\theta})), \quad (3)$$

$$\theta(t+1) = \theta(t) + h(-(\gamma^\upsilon[k^\upsilon] + H)(\theta - \bar{\theta})), \;\; \zeta(t_I) = 0, \;\; \theta(t_I) = 0, \quad (4)$$

где $\eta^z = p(A^z\gamma^z + \delta^z B^z)(C^z\gamma^z)^{-1}$, $\kappa = p(E - A(\theta)) - \eta^z C(\theta)$.

Поставленная исходная задача при этом становится дискретной задачей оптимального управления о поиске минимума функционала $I = -\zeta(t_F)$.

Второй этап. Производилось улучшение управления k^v с помощью метода, описанного выше.

Результаты представлены на графиках и в таблице. Видно, что процесс улучшения заканчивается через три итерации (при том что каждая итерация содержит серию просчетов при разных α) с существенным уменьшением функционала (увеличением накопленного дохода).

Таблица 1

Значение функционала

I	I
0	-16 703
1	-33 417
2	-78 914

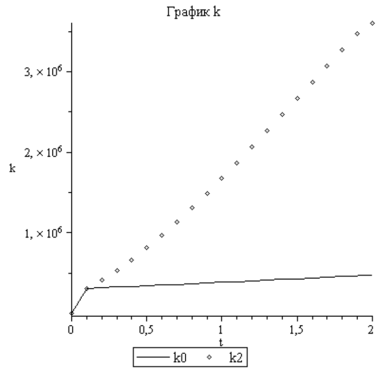

Рис. 1. Основные фонды традиционной экономики

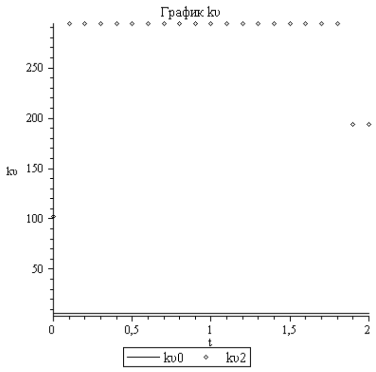

Рис. 2. Основные фонды инноваций

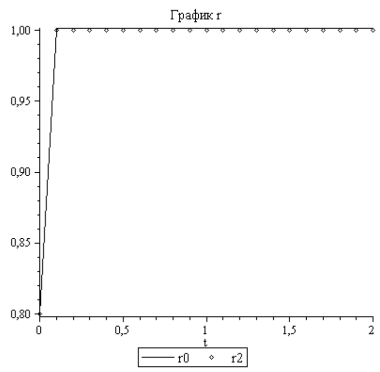

Рис. 3. Индекс состояния природной среды и социума

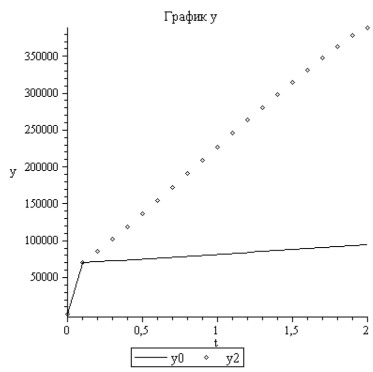

Рис.4. Выпуск продукции

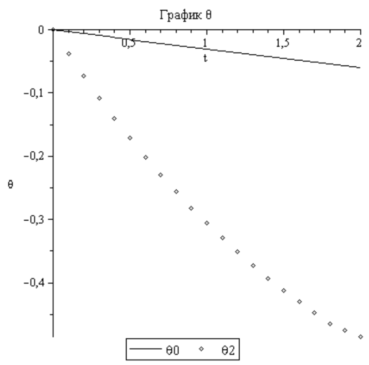

Рис. 5. Инновационный индекс

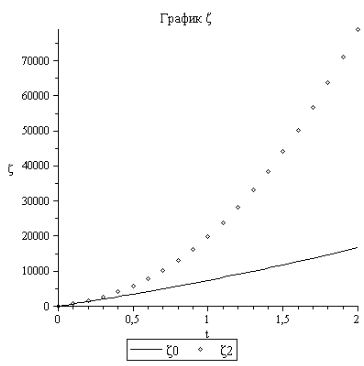

Рис. 6. Уровень накопленного дохода

Заключение

Проведенные расчеты подтверждают работоспособность предложенной модификации алгоритма, с помощью которой удалось улучшить полученное ранее [21] магистральное решение. Проведенная серия вычислительных экспериментов позволяет определить пределы рентабельности инновационной деятельности (в терминах коэффициентов прямых инновационных издержек).

Литература

1. Courant R. Variational methods for solutions of problems of equlibrium and vibrations // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. 49, № 1. P.43-51.
2. Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет // Прикладная математика и механика. 1946. 10, № 2. С. 87-96.
3. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физических наук. 1957. 15, № 1а. С.56-62.
4. Шатровский Л.И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т 2, № 3. С. 488-491.
5. Келли Г. Дж. Метод градиентов // Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета / под ред. Дж. Лейтмана. М.: Наука, 1965. С.101-116.
6. Кротов В.Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума // Автоматика и телемеханика. 1962. Т 23, №12. С. 1571-1583; 1963. Т. 24, № 15. С. 581-598; 1963, Т. 24, №7. С. 826-843; 1965, Т. 26, № 11. С. 24-41.
7. Jacobson D.H. New second-order and first-order algorithms for determinining optimal control. A differential programming approach // J. Optimiz. Theory and Applications. 1968. V. 2, № 4. P. 411–440.
8. Гурман В.И., Расина И.В. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автоматика и телемеханика. 1979. № 10. С. 12-18.
9. Гурман В.И., Батурин В.А., Расина И.В. Приближенные методы оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983.
10. Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления. // Изв. АНСССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 160-168.
11. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
12. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых ситем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008.
13. Булдаев А.С. Проекционные процедуры нелокального улучшения линейно управляемых процессов // Известия вузов. Математика. 2004. № 1. С. 18-24.
14. Трушкова Е.А. Алгоритмы глобального улучшения управления // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6.
15. Гурман В.И., Трушкова Е.А. Практические методы оптимизации: учеб. пособие. Переславль-Залесский: Изд-во УГП, 2009.

16. Ухин М.Ю. Ачитуев С.А. Оптимизация стратегий развития региона на многокомпонентной модели // Автоматика и телемеханика. 2008. № 3. С. 178-189.
17. Гурман В.И., Рюмина Е.В. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. М: Наука, 2001. 175 с.
18. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304 с.
19. Гурман В.И. Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений // Автоматика и телемеханика. 2003. № 3. С. 61-71.
20. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 447 с.
21. Расина И.В., Блинов А.О., Гусева И.С. Магистрали в задаче оптимизации стратегии развития региона на многокомпонентной модели // Вестник БГУ. 2011. №6. С.36–42.

Расина Ирина Викторовна, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой математических и естественно-научных дисциплин Сибирской академии права, экономики и управления. E-mail: irinarasina@gmail.com

Аветян Мактах Арсеновна, магистр кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета. E-mail: magdaavetian@mail.ru

Rasina Irina Victorovna, candidate of physical and mathematical sciences, head of the department of mathematics and natural science disciplines, Siberian Academy of Law, Economics and Management.

Avetyan Maktakh Arsenovna, master of department of applied mathematics, Buryat State University.

УДК 517.977

© Д.О. Трунин, Г. Анхбаяр

НЕЛОКАЛЬНОЕ УЛУЧШЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В КВАДРАТИЧНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ СИСТЕМАХ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_а

В статье рассматривается процедура нелокального улучшения допустимых управлений в классе квадратичных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

Ключевые слова: *задача оптимального управления, нелокальное улучшение, терминальные ограничения.*

D.O. Trunin, G. Ankhbayar

NONLOCAL IMPROVING CONTROL IN QUADRATIC ON A STATE SYSTEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

In the article a procedure for nonlocal control improvement of admissible controls in the class of quadratic on a state of optimal control problems with terminal constraints is proposed.

Keywords: *optimal control problem, nonlocal improvement, terminal constraints.*

Введение

В работах [1; 2] в классе линейных и полиномиальных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом построены новые методы нелокального улучшения допустимых управлений. Отсутствие операции варьирования управлений и возможность их улучшения, удовлетворяющих принципу максимума, обусловливают повышенную эффективность этих методов. В данной статье предлагается процедура нелокального улучшения допустимых управлений в классе квадратичных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями на основе операции проектирования. Нелокальность улучшения с сохранением всех терминальных ограничений обеспечивается за счет решения специальной краевой задачи, которая существенно проще краевой задачи принципа максимума.

1. Постановка задачи

Рассматривается квадратичная по состоянию и линейная по управлению задача оптимального управления с терминальными ограничениями

$$\dot{x} = A(x,t)u + b(x,t), \quad t \in T = [t_0,\ t_1], \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U \subset R^r, \ \ t \in T, \tag{2}$$

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \to \min, \tag{3}$$

$$x_i(t_1) = x_i^1, \ \ i = \overline{1,m}, \ \ m < n, \tag{4}$$

в которой $x = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$ – вектор состояния, $u = \left(u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)\right)$ – вектор управления, интервал T фиксирован, $x^0 \in R^n$, $c = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right)$ – заданные векторы, $c_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, матричная функция $A(x,t)$ и вектор-функция $b(x,t)$ являются квадратичными по x с коэффициентами, непрерывно зависящими от t на $R^n \times T$.

В качестве доступных управлений рассматривается множество

$$V = \left\{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, \ t \in T\right\}.$$

Для доступного управления $u \in V$ обозначим $x(t,u), \ t \in T$ – решение задачи Коши (1) при $u = u(t), \ t \in T$.

Определим множество допустимых управлений

$$W = \left\{u \in V : x_i(t_1, u) = x_i^1, i = \overline{1,m}\right\}.$$

Для задачи (1)–(4) функция Понтрягина с сопряженной переменной $p \in R^n$ имеет вид

$$H(p,x,u,t) = H_0(p,x,t) + \langle H_1(p,x,t), u \rangle,$$

где $H_0(p,x,t) = \langle p, \ b(x,t) \rangle$, $H_1(p,x,t) = A(x,t)^T p$.

Рассмотрим нормальный функционал Лагранжа

$$L(u,\lambda) = \langle c, x(t_1) \rangle + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(x_i(t_1) - x_i^1\right), \ \lambda \in R^m.$$

Приращение функционала Лагранжа на паре доступных управлений $\left(u^0, v\right)$ в соответствии с [2] имеет вид

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) = -\int_T \left\langle H_1(p(t,u^0,v,\lambda), x(t,v), t), v(t) - u^0(t) \right\rangle dt, \tag{5}$$

где $p(t,u^0,v,\lambda)$ – решение модифицированной сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{p} = &-H_x(p, x(t,u^0), u^0(t), t) - \\ &- \frac{1}{2} H_{xx}(p, x(t,u^0), u^0(t), t)\left(x(t,v) - x(t,u^0)\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$p_i(t_1) = -\lambda_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

$$p_j(t_1) = -c_j, \ \ j = \overline{m+1,n}. \tag{8}$$

Для управления $u^0 \in V$ образуем аналогично [1; 2] вектор-функцию

$$u^\alpha(p,x,t) = P_U\left(u^0(t) + \alpha H_1(p,x,t)\right), \ p \in R^n, \ x \in R^n, \ \alpha > 0,$$

где P_U – оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Функция $u^{\alpha}(p,x,t)$ непрерывна по совокупности аргументов (p, x) на $R^n \times R^n$ и кусочно-непрерывна по $t \in T$, причем имеет место оценка [1; 2]

$$\left\langle H_1(p,x,t),\ u^{\alpha}(p,x,t) - u^0(t) \right\rangle \ge \frac{1}{\alpha} \left\| u^{\alpha}(p,x,t) - u^0(t) \right\|^2 . \qquad (9)$$

Регулярный принцип максимума для допустимого управления $u^0 = u^0(t)$ записывается в виде

$$u^0(t) = u^{\alpha}\left(p(t,u^0,u^0,\lambda), x(t,u^0), t \right),\ t \in T,\ \alpha > 0 . \qquad (10)$$

2. Процедура улучшения

Поставим задачу улучшения управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством $\Phi(v) \le \Phi(u^0)$.

Процедура нелокального улучшения.

1. Для заданного $\alpha > 0$ найдем решение $\left(x(t), p(t) \right)$, $t \in T$ краевой задачи

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(x,t)u^{\alpha}(p,x,t) + b(x,t),\ t \in T, , \\ x(t_0) = x^0,\ x_i(t_1) = x_i^1,\ i = \overline{1,m}, \\ \dot{p} = -H_x(p, x(t,u^0), u^0(t), t) - \\ -\frac{1}{2} H_{xx}(p, x(t,u^0), u^0(t), t)\left(x - x(t,u^0) \right), \\ p_j(t_1) = -c_j,\ j = \overline{m+1,n} . \end{gathered} \qquad (11)$$

2. Сформируем управление

$$v(t) = u^{\alpha}(p(t), x(t), t),\ t \in T .$$

Предположим, что решение $\left(x(t), p(t) \right)$, $t \in T$ краевой задачи (11) (возможно, не единственное) существует на T.

Понятно, что $x(t) = x(t,v)$ и $v \in W$.

Покажем свойство улучшения для выходных управлений.

Действительно, решение $p(t), t \in T$ является решением системы дифференциальных уравнений (6) и удовлетворяет краевым условиям (8).

Сформируем вектор множителей

$$\overline{\lambda} = \left(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, ..., \overline{\lambda}_m \right),$$

где

$$\overline{\lambda}_i = -p_i(t_1), \quad i = \overline{1,m} .$$

Тогда $p(t) = p(t, u^0, v, \overline{\lambda}),\ t \in T$.

Согласно формуле приращения (5), выходное управление v обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа

$$L(v,\overline{\lambda}) \le L(u^0,\overline{\lambda}) .$$

Следовательно, в силу допустимости управлений u^0, v получаем

$$\Phi(v) \le \Phi(u^0) .$$

Рассмотрим множество управлений на выходе процедуры улучшения

$$W_1(u^0) = \left\{ v \in W : v(t) = u^\alpha(p(t,u^0,v,\overline{\lambda}), x(t,v), t), \;\; t \in T \right\} .$$

Множество $W_1(u^0)$ характеризуется поточечным соотношением

$$v(t) = u^\alpha(p(t,u^0,v,\overline{\lambda}), x(t,v), t), \;\; t \in T .$$

Очевидным следствием этого соотношения является следующее утверждение.

Лемма. $u^0 \in W_1(u^0)$ тогда и только тогда, когда управление $u^0 \in W$ удовлетворяет регулярному принципу максимума (10).

Из леммы следует, что краевая задача улучшения (11) для управления $u^0 \in W$, удовлетворяющего регулярному принципу максимума, имеет хотя бы одно решение.

Отметим, что в силу оценки (9) выходное управление обеспечивает строгое улучшение целевого функционала, если управления u^0 и v не совпадают.

Неединственность решения краевой задачи улучшения (11) дает возможность строгого улучшения управления $u^0 \in W$, удовлетворяющего принципу максимума в регулярном случае.

Выделим свойства краевой задачи (11), упрощающие ее по сравнению с краевой задачей принципа максимума.

1. В краевой задаче (11) уравнения для сопряженных переменных являются линейными по x и p.

2. В краевой задаче (11) правые части для фазовых переменных являются непрерывными по совокупности аргументов (p, x) на $R^n \times R^n$.

Предложенная процедура дает принципиальную возможность осуществления нелокального улучшения на множестве допустимых управлений в рассматриваемом классе задач. Трудоемкость построения улучшающего управления с выполнением всех терминальных ограничений определяется трудоемкостью решения непрерывной краевой задачи.

Подчеркнем нелокальность улучшения: отсутствует малый параметр, характеризующий близость улучшаемого и улучшающего управлений. Процедура имеет возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума за счет неединственности решения краевой задачи улучшения. В случае, когда краевая задача улучшения не имеет решения, рассматриваемая процедура не действует, и следует перейти к другим процедурам улучшения.

Заключение

Предлагаемая процедура обеспечивает нелокальное улучшение допустимых управлений без процедуры варьирования по малому параметру с выполнением всех терминальных ограничений. Это свойство является существенным фактором повышения эффективности решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

Литература

1. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
2. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. 260 с.

Трунин Дмитрий Олегович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: hint@rambler.ru, тел.: +7(3012)217733

Анхбаяр Гелегбадам, декан факультета математики и программного обеспечения Улан-Баторского университета.

Trunin Dmitry Olegovich, candidate of physical and mathematical sciences, senior teacher, applied mathematics department, Buryat State University.

Ankhbayar Gelegbadam, Head of Department of Mathematics and Software Ulaanbaatar University.

УДК 517.977.5

© **И.-Х.Д. Хишектуева, Д. Халтар**

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
в рамках научных проектов №№ 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_а

Предлагается подход к оптимизации параметров систем, являющийся дальнейшим развитием методов нелокального улучшения.

***Ключевые слова**: управляемые системы, необходимое условие оптимальности, нелокальное улучшение.*

I.-Kh.D. Khishektueva, D. Haltar

METHOD OF OPTIMIZATION OF LINEAR PARAMETERS OF DYNAMICAL SYSTEMS

An approach for optimization of system parameters is proposed. It is a further development of the methods of nonlocal improvement

***Keywords**: control systems, necessary condition for optimality, nonlocal improvement.*

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимизации динамической системы по управляющим параметрам

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t),t),u \rangle + d(x(t),t))dt \to \min_{u \in U}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = A(x(t),t)u + b(x(t),t),\ x(t_0) = x^0,\ u \in U,\ t \in T = [t_0, t_1], \tag{2}$$

в которой $\tilde{\delta}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ – вектор состояния, $u = (u_1,...,u_m)$ – вектор управляющих параметров (управление) со значениями в компактном множестве $U \in R^m$. Матричная функция $A(x,t)$, векторные функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, функции $\varphi(x)$, $d(x,t)$ непрерывны вместе с своими производными по x по совокупности аргументов на множестве $R^n \times T$. Начальное состояние x^0 и интервал T фиксированы.

Функция Понтрягина имеет вид

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle,$$

$$H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x,t) \rangle - d(x,t),\ H_1(\psi, x, t) = A^T(x,t)\psi - a(x,t).$$

Введем следующие обозначения. Для допустимого управления $v \in U$ $x(t,v)$, $t \in T$ – решение системы (2), $\psi(t,v)$, $t \in T$ – решение стандартной сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u, t), \; t \in T, \; \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) \tag{3}$$

при $u = v$, $x(t) = x(t,v)$.

Частное приращение произвольной вектор-функции $g(y_1,...,y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2} будем обозначать

$$\begin{gathered}\Delta_{y_{s_1}+\Delta y_{s_1}, y_{s_2}+\Delta y_{s_2}} g(y_1,...,y_l) = \\ = g(y_1,..., y_{s_1}+\Delta y_{s_1},..., y_{s_2}+\Delta y_{s_2},..., y_l) - g(y_1,...,y_l)\end{gathered}.$$

Аналогично [2; 3] рассмотрим дифференциально-алгебраическую сопряженную систему

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), w, t) - r(t), \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\langle H_x(p(t), x(t), w, t), y(t) - x(t)\rangle + \langle r(t), y(t) - x(t)\rangle = \\ = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), w, t)\end{gathered} \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \tag{6}$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1) - x(t_1)\rangle + \langle q, y(t_1) - x(t_1)\rangle = \Delta_{y(t_1)}\varphi(x(t_1)). \tag{7}$$

Алгебраические соотношения (5) и (7) всегда можно однозначно разрешить относительно $r(t)$, q. Одно простое правило указано в [2]. Другое правило можно применить для квадратичной по состоянию задачи (функции $A(x,t)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $\varphi(x)$, $d(x,t)$ квадратичны по x), которое состоит в следующем представлении

$$r(t) = H_{xx}(p(t), x(t), w, t)(y(t) - x(t)), \; q = \varphi_{xx}(x(t_1))(y(t_1) - x(t_1)).$$

Очевидно, что при этом алгебраические соотношения удовлетворяются тождественно. Такой подход к представлению $r(t)$, q легко обобщается на полиномиальную по состоянию задачу (1), (2). При этом дифференциально-алгебраическая сопряженная система превращается в известную модифицированную сопряженную систему [1]. Следовательно, сопряженную систему (4)-(7) можно рассматривать как обобщение известной модифицированной сопряженной системы в общей нелинейной по состоянию задаче (1), (2).

Рассматривая различные однозначные представления $r(t)$, q, будем получать различные дифференциальные варианты сопряженной системы, решения которых для допустимых управлений u,v будем обозначать $p(t,u,v)$, $t \in T$ при $w = u$, $x(t) = x(t,u)$, $y(t) = x(t,v)$.

Очевидно, что $p(t,u,u) = \psi(t,u)$, $t \in T$.

Поставим задачу об улучшении управления $u^0 \in U$: найти управление $v \in U$ с условием $\Delta_v \Phi(u^0) \le 0$.

2. Метод улучшения

Управляющий вектор параметров в задаче (1), (2) рассмотрим как постоянную векторную функцию времени на интервале T. Тогда из формулы приращения целевого функционала в задаче оптимального управления, полученной в работе [2], в качестве очевидного следствия следует формула приращения целевой функции для рассматриваемого случая

$$\Delta_v \Phi(u^0) = -\int_T \Delta_v H(p(t,u^0,v), x(t,v), u^0, t)dt. \qquad (8)$$

В линейной по управлению задаче (1), (2) формула приращения целевой функции принимает вид

$$\Delta_v \Phi(u^0) = -\left\langle \int_T H_1(p(t,u^0,v), x(t,v), t)dt, v-u^0 \right\rangle,\ v \in U. \qquad (9)$$

По аналогии с [1] для заданного $\alpha > 0$ введем отображение

$$W^\alpha(u,v) = P_U(u + \alpha \int_T H_1(p(t,u,v), x(t,v), t)dt),\ u \in U,\ v \in U. \qquad (10)$$

Согласно свойству проекции имеет место неравенство

$$\left\langle \int_T H_1(p(t,u,v), x(t,v), t)dt, W^\alpha(u,v)-u \right\rangle \ge \frac{1}{\alpha}\left\| W^\alpha(u,v)-u \right\|^2. \qquad (11)$$

Дифференциальный принцип максимума для управления $u \in U$ с помощью отображения (10) представляется в виде

$$u = W^\alpha(u,u),\ \alpha > 0. \qquad (12)$$

Формула (9) позволяет сконструировать метод нелокального улучшения допустимого управления $u^0 \in U$ в задаче (1), (2).

Проекционный метод улучшения: для заданных $\alpha > 0$ и $u^0 \in U$ определим оператор W_1^α с помощью соотношения $W_1^\alpha(v) = W^\alpha(u^0, v),\ v \in U$ и найдем решение $v = v(u^0)$ уравнения

$$v = W_1^\alpha(v). \qquad (13)$$

Покажем, что решение $v^\alpha \in U$ системы (13) обеспечивает улучшение. В силу свойства проекции (11) имеем

$$\left\langle \int_T H_1(p(t,u^0,v^\alpha), x(t,v^\alpha), t)dt, v^\alpha - u^0 \right\rangle \ge \frac{1}{\alpha}\left\| v^\alpha - u^0 \right\|^2.$$

Отсюда, и из формулы приращения (9), следует уменьшение целевой функции (1) с оценкой

$$\Phi(v^\alpha) - \Phi(u^0) \le -\frac{1}{\alpha}\left\| v^\alpha - u^0 \right\|^2. \qquad (14)$$

Таким образом, метод нелокального улучшения заключается в поиске неподвижных точек оператора W_1^α.

Рассматривая различные однозначные представления $r(t)$, q в сопряженной системе (4)-(7) будем получать модификации метода с различными однозначными операторами W_1^{α}. В частности, в случае квадратичной задачи (1), (2) с указанным выше представлением, предлагаемый метод совпадает с известным проекционным методом нелокального улучшения [1].

Отметим, что управление $u^0 \in U$, удовлетворяющее необходимому условию (12), является очевидным решением уравнения (13) для всех $\alpha > 0$. Обратно, если u^0 является неподвижной точкой оператора W_1^{α} хотя бы для одного $\alpha > 0$, то u^0 удовлетворяет необходимому условию оптимальности (12). Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Лемма. Управление $u^0 \in U$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности (12) тогда и только тогда, когда u^0 является неподвижной точкой оператора W_1^{α} хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Таким образом, *дифференциальный принцип максимума* в рассматриваемой задаче можно сформулировать следующим образом: для оптимальности управления $u^0 \in U$ необходимо, чтобы вектор u^0 был неподвижной точкой оператора W_1^{α} хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Метод позволяет на основе оценки (14) обосновать новое усиленное *необходимое условие оптимальности*: для оптимальности управления $u^0 \in U$ в линейной по управлению задаче необходимо, чтобы вектор u^0 был единственной неподвижной точкой оператора W_1^{α} для всех $\alpha > 0$.

Отсутствие неподвижных точек в процедуре нелокального улучшения свидетельствует о неоптимальности управления $u^0 \in U$ в задаче (1), (2).

Метод дает возможность строго улучшать управления, удовлетворяющие дифференциальному принципу максимума. Необходимым условием строгого улучшения является неединственность неподвижных точек.

Трудоемкость построения улучшающего вектора управляющих параметров определяется трудоемкостью решения задачи о неподвижной точке определяемого оператора проектирования.

3. Примеры

Рассмотрим простые примеры, иллюстрирующие работу метода.

Пример 1 (улучшение особого управления).

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 ux^2(t)dt \to \min_{u \in U},$$

$$\dot{x}(t) = u,\ x(0) = 0,\ u \in U = [-1,1],\ t \in T = [0,1].$$

Поставим задачу улучшения управления $u^0 = 0$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t,u^0) = 0$, $t \in T$ и значением функционала $\Phi(u^0) = 0$.

Применим проекционный метод улучшения.

Функция Понтрягина имеет вид: $H=\psi u-\frac{1}{2}ux^2$. Далее $H_1=\psi-\frac{1}{2}x^2,\ \ x(t,v)=vt,\ t\in T,\ v\in U.$

Дифференциально-алгебраическая сопряженная система принимает вид

$$\dot p(t)=-r(t),\quad p(1)=-q,$$
$$r(t)vt=0,\quad qv=0.$$

Если $v=0$, то получаем $r(t)=0, q=0$ в соответствии с правилами [2].

Если $v\neq 0$, то $r(t)=0, q=0$, следовательно $\dot p(t)=0, p(1)=0$. Отсюда $p(t,u^0,v)=0, t\in T$.

Оператор W_1^α принимает вид

$$W_1^\alpha(v)=W^\alpha(u^0,v)=P_{[-1,1]}\left[\alpha\int_0^1(-\frac{1}{2}v^2t^2)dt\right]=P_{[-1,1]}\left[-\frac{1}{6}\alpha v^2\right].$$

Таким образом, задача о неподвижной точке принимает вид

$$v=P_{[-1,1]}\left[-\frac{1}{6}\alpha v^2\right]=\begin{cases}-1, & -\frac{1}{6}\alpha v^2\le -1,\\ -\frac{1}{6}\alpha v^2, & -1\le -\frac{1}{6}\alpha v^2\le 0.\end{cases}$$

Решение $v=-1$ реализуется при $\alpha\ge 6$.

Очевидное решение $v=0$ имеет место при любом $\alpha>0$. В силу леммы это означает, что исходное управление $u^0=0$ удовлетворяет дифференциальному принципу максимума.

Другое ненулевое решение $v=-\frac{6}{\alpha}$ получаем при $\alpha>6$.

Таким образом, задача о неподвижной точке допускает ненулевое решение вида $v=-\frac{6}{\alpha}$ при $\alpha\ge 6$. При этом имеет место строгое улучшение исходного управления $u^0=0$, удовлетворяющего ДПМ, с оценкой (14).

Пример 2.

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)dt\quad\to\quad\min,$$
$$\dot x(t)=u,\quad x(0)=1,\quad u\in U=[-1,1],\quad t\in T=[0,2].$$

Рассмотрим управление $u^0 = -1$. Соответствующая фазовая траектория $x(t,u^0) = 1 - t, t \in T$, значение целевой функции $\Phi(u^0) = \frac{1}{3}$.

Функция Понтрягина $H = \psi u - \frac{1}{2}x^2$; $x(t,v) = vt + 1,\ t \in T,\ v \in U,$ $H_x = -x,\ H_u = \psi$.

Для рассматриваемого примера:

$$H_x(p(t), x(t,u^0), u^0, t) = -x(t,u^0) = t - 1,$$

$$x(t,v) - x(t,u^0) = t(v+1),$$

$$\Delta_{x(t,v)} H(p(t), x(t,u^0), u^0, t) = \frac{1}{2}(1+v)(t^2(1-v) - 2t).$$

$$x(t_1,v) - x(t_1,u^0) = 2(v+1).$$

Отсюда, дифференциально-алгебраическая система принимает вид:

$$\dot{p}(t) = 1 - t - r(t),$$

$$t(t-1)(v+1) + tr(t)(v+1) = \frac{1}{2}(v+1)(t^2(1-v) - 2t),$$

$$p(2) = -q,$$

$$q(2v+2) = 0.$$

Если $v = -1$, то по правилам [2] получаем $r(t) = 0, q = 0$.

Если $v \neq -1$, то $q = 0$.

Разрешим алгебраическое уравнение для функции $r(t)$

$$r(t) = -\frac{1}{2}t(1+v).$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{p}(t) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}vt, \quad p(2) = 0$$

с решением $p(t,u^0,v) = t - \frac{t^2}{4} + \frac{vt^2}{4} - (1+v), t \in T.$

Оператор W_1^α принимает вид:

$$W_1^\alpha(v) = P_{[-1,1]}[-1 + \alpha(-\frac{4}{3}v - \frac{2}{3})].$$

Отсюда получаем задачу о неподвижной точке:

$$v = P_{[-1,1]}[-1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3})] = \begin{cases} -1, & -1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3}) < -1, \\ 1, & -1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3}) > 1, \\ -1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3}), & -1 < -1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3}) < 1. \end{cases}$$

Рассмотрим 3 случая.

1. Пусть $v=-1$. Тогда $-1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3})<-1$. Решив неравенство, получим $\frac{2}{3}\alpha<0$, что противоречит условию $\alpha>0$. Следовательно, $v\neq-1$. В силу леммы это значит, что исходное управление $u^0=-1$ не удовлетворяет ДПМ.

2. Пусть $v=1$. Тогда $-1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3})>1$. Отсюда $\alpha<-1$, что также невозможно, т.к. $\alpha>0$. Следовательно, $v\neq1$.

3. Пусть $v=-1+\alpha(-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3})$. Отсюда $v=\dfrac{-1-\frac{2}{3}\alpha}{1+\frac{4}{3}\alpha}=\dfrac{-3-2\alpha}{3+4\alpha}$. При этом $-1\le v\le1$.

Таким образом, задача о неподвижной точке допускает единственное решение $v=\dfrac{-3-2\alpha}{3+4\alpha}$, которое строго улучшает исходное управление $u^0=-1$ с оценкой (14).

Данный пример демонстрирует эффективность предлагаемого подхода по сравнению с подходом [1]. В [1] для строгого улучшения потребовалась дополнительная фазовая регуляризация целевой функции, что значительно увеличивает трудоемкость решения задачи улучшения.

Заключение

В линейной по управлению задаче оптимизации управляющих параметров построен метод нелокального улучшения на основе операции проектирования, обобщающий известный подход [1] на общие нелинейные по состоянию систему и целевую функцию ($A(x,t)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $\varphi(x)$, $d(x,t)$ нелинейны по x). Нелокальность улучшения достигается ценой решения задачи о неподвижной точке определяемого оператора проектирования. Разработанный метод позволяет улучшать экстремальные управления и получить усиленное по сравнению с дифференциальным принципом максимума необходимое условие оптимальности в рассматриваемом классе задач.

Выделим основные свойства метода.

1. Нелокальность улучшения управляющих параметров без процедуры варьирования по малому параметру.

2. Возможность строгого улучшения управляющих параметров, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума. Такая возможность появляется в случае неединственности решения задачи о неподвижной точке.

2. Получение нового необходимого условия оптимальности, усиливающего дифференциальный принцип максимума в рассматриваемом классе задач.

Литература

1. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. 260 с.
2. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркут. гос. ун-та. Математика. 2009. Т. 2, № 1. С. 94–107.
3. Булдаев А.С., Хишектуева И.-Х.Д. Об одном методе улучшения управляющих параметров нелинейных систем // Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы: материалы III Междунар. конф. (Россия, Бурятия, Улан-Удэ – оз. Байкал, 6-11 сентября 2010 г.). Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2010. С. 79-82.

Хишектуева Ишин-Хорло Дамбадоржиевна, аспирант кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: ishin@ulanovka.ru

Халтар Дамба, старший научный сотрудник, Институт математики, Школа математики и информатики Монгольского государственного университета

Khishektueva Ishin-Khorlo Dambadorzhievna, postgraduate student, applied mathematics department, Buryat State University.

Haltar Damba, senior researcher, Institute of Mathematics, School of Mathematics and Computer Science of Mongolian State University.

II. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 004.75

© **И.В. Бычков, А.С. Гаченко, Г.М. Ружников, Р.К. Федоров, А.Е. Хмельнов**

КОМПОНЕНТЫ РЕГИОНАЛЬНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ

Статья посвящена актуальным проблемам разработки компонент региональной инфраструктуры пространственных данных.

Ключевые слова: *инфраструктура пространственных данных, базовые пространственные данные, каталоги метаданных, реестры, органы государственной власти, картографические данные, геоинформационные системы.*

I.V. Bychkov, A.S. Gachenko, G.M. Ruzhnikov, R.K. Fedorov, A.E. Khmelnov

COMPONENTS OF THE REGIONAL SPATIAL DATA INFRASTRUCTURE

The article is devoted to actual problems of development of the regional spatial data infrastructure components.

Keywords: *spatial data infrastructure, basic spatial data, metadata catalogs, registers, administration authorities, map data, GIS.*

Введение

В Российской Федерации большое внимание уделяется проведению административной реформы, цели которой – повышение качества, доступности государственных и муниципальных услуг, а также повышение эффективности управленческой деятельности органов исполнительной власти. Одним из основных направлений данной реформы является модернизация системы информационного обеспечения органов исполнительной власти на основе создания комплекса единых информационных ресурсов и информационно-аналитических систем поддержки принятия управленческих решений в сфере жизнедеятельности.

В настоящее время органы государственной власти и местного самоуправления (ОГВМС), хозяйствующие субъекты создают и используют большие объемы пространственных и тематических данных, в основном в интересах самих ведомств и территорий, которые, как правило, несопоставимы и нескоординированы между собой. Это исключает их совместное комплексное использование. Отсутствие единой системы идентификации пространственных объектов как универсального элемента связи различных баз данных, а также комплексной системной информации – одна из существенных причин несогласованности решений по развитию территорий, принимаемых различными органами управления.

Развитие современных информационных технологий и Интернета изменило технологии массового сбора, хранения, обработки, использования пространственных данных, а также методы представления геоинформации, методы поиска, доступа к ней, методы ее обработки, анализа и визуализации. Это обусловило создание в России национальной инфраструктуры пространственных данных (ИПД). Распоряжением Правительства Российской Федерации от 21 августа 2006 г. № 1157-р утверждена «Концепция формирования Российской инфраструктуры пространственных данных (РИПД)», в которой определены концептуальные принципы создания и разработки основных компонентов РИПД (рис. 1).

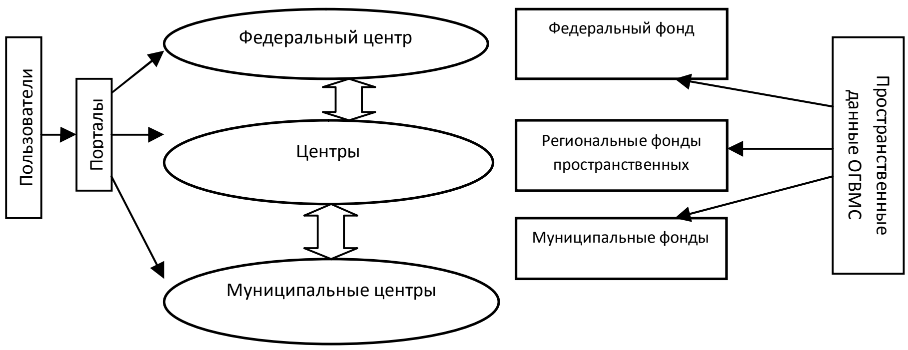

Рис. 1. Схема функционирования РИПД

Использование современных ГИС-, Web-, OLAP-технологий ИПД является одним из актуальных направлений повышения эффективности управления социально-экономическим развитием территорий. Это обусловлено адекватностью ИПД и геоинформационных систем (ГИС) характеру решаемых территориальных задач, возможностью использования пространственных данных (ПД) и единой цифровой модели территории как системообразующего фактора для принятия решений, их фиксации, отображения последствий. Следует также учитывать, что территориальная информация имеет геопространственный характер, и внедрение Интернета, ГИС-технологий ускоряет процесс интеграции физически разделенных, но тематически согласованных баз данных (БД). Это делает их более доступными в управлении территориями, в оценке социально-экономического развития и ресурсного потенциала, решения проблем безопасности региона.

Несмотря на значимые научно-прикладные результаты в области геоинформатики, до сих пор еще не решены вопросы формирования региональной инфраструктуры пространственных данных и комплексного использования ее компонент в задачах управления территориальным развитием.

Цели и принципы формирования инфраструктуры пространственных данных Иркутской области

Особенности создания ИПД определяются спецификой развития информационных и телекоммуникационных ресурсов области:

– органы ОГВМС и хозяйствующие субъекты области создают и используют, в основном в собственных интересах, большие объемы пространственных и тематических данных, реализуют геоинформационные проекты;

– не решены нормативно-правовые и технологические проблемы совместного использования пространственных данных (ПД);

– не сформированы базы пространственных метаданных и базовых пространственных данных (БПД), отсутствует информация о достоверности, актуальности ПД;

– несмотря на развитость телекоммуникационной инфраструктуры Иркутской области, доступ к базам пространственных данных локализован.

Основными целями создания ИПД Иркутской области являются:

- создание единого информационного пространства области как части информационного пространства РФ, а также информационных систем, обеспечивающих повышение совместимости, полноты и достоверности всех видов пространственных данных, предоставляемых потребителям;
- повышение эффективности создания, использования регионального и муниципальных фондов ПД для управления развитием территорий области, а также для формирования благоприятного инвестиционного климата;
- открытость областных и муниципальных ресурсов пространственных данных для ОГВМС, населения, бизнеса, науки, образования и т.д.

Базовыми принципами создания и развития ИПД области являются:

– переход к цифровым технологиям получения, актуализации, хранения и использования пространственных данных, а также однократный сбор ПД и их эффективная поддержка, а также интеграция из различных источников, совместное использование пользователями и приложениями;

– формирование областного фонда и сервисов пространственных данных ИПД, а также применение национальных и международных стандартов к базовым пространственным данным (БПД) и метаданным для разработки технических регламентов на их представление и обмен и условий доступа к ним;

– формирование организационно-правового, нормативного обеспечения и регламентов функционирования ИПД области;

– использование «электронным правительством» компонент ИПД, а также свободный доступ пользователей к базовым пространственным данным (БПД) и сервисам с использованием региональной телекоммуникационной инфраструктуры.

Требования к структуре ИПД Иркутской области

Структура ИПД области иерархическая, состоит из регионального, муниципального уровней и является частью общей структуры РИПД.

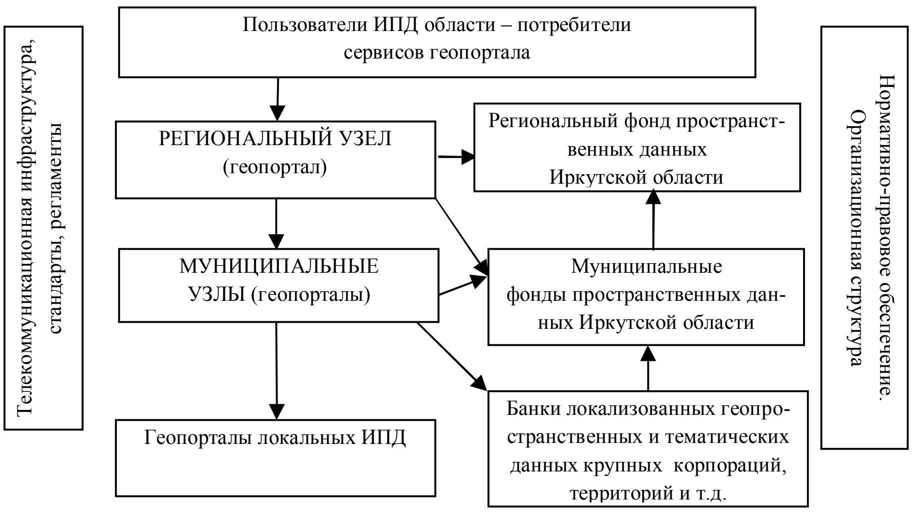

Рис. 2. Структура и функциональная схема ИПД Иркутской области

ИПД области включает в себя компоненты: региональный и муниципальные фонды пространственных данных, организационно-правовое и нормативное обеспечение, технологии и технические средства (рис. 3).

В данной работе сделан акцент на формирование базовых пространственных объектов и базовых пространственных данных ИПД области.

Базовые пространственные объекты ИПД

В соответствии с национальным стандартом ГОСТ Р 53339-2009 [1], базовый пространственный объект (БПО) – это объект, данные о котором являются основой для удостоверения местоположения других пространственных объектов. Удостоверение местоположения объекта включает: описание пространственного объекта с помощью набора данных, вклю-

Рис. 3. Состав компонент ИПД Иркутской области

чающего координатное описание, идентификатор, наименование (при наличии – адрес) объекта, описание его топологических отношений с другими пространственными объектами, которое предоставляется юридически значимым источником пространственных данных. БПО обеспечивают совместимость пространственных данных, содержащихся в региональных и муниципальных информационных системах. Для соблюдения совместимости координатных данных БПО области с другими ПО, находящимися с ним в пространственных отношениях, следует руководствоваться требованиями ГОСТ Р 52571 [2]. Для всех наборов БПО разрабатываются каталоги (классификаторы). Идентификатор БПО является уникальным в рамках ИПД, и его структура должна учитывать код вида, который определяется из перечня (классификатора) наборов БПО (с учетом требований ГОСТ Р 52571), а также кода субъекта, осуществившего присвоение (модификацию) идентификатора. Координатные данные БПО включают: геометрические примитивы (точечный, линейный, полигональный); систему координат. Не допускается отсутствие координатных данных у БПО. В качестве наименований БПО используются нормализованные текстовые описания, а адресом БПО является набор наименований и/или уникальных кодов, включающий наименование (код) самого объекта и последовательность наименований (кодов), иерархически связанных с ним БПО. Топологические отношения БПО с другими базовыми пространственными объектами описывают в виде ссылок на их идентификаторы. Требования к цифровым изображениям, данным ДЗЗ и цифровым моделям рельефа являются общими для всех БПО и устанавливаются в соответствующих стандартах. Введение БПО позволяет снизить объемы семантических данных постоянного хранения.

К БПО, в соответствии с проектом ФЗ «Об инфраструктуре пространственных данных, геодезической и картографической деятельности в Российской Федерации» [3], отнесены категории объектов: объекты транспортной и инженерной инфраструктуры, водные объекты, объекты лесного фонда, объекты капитального строительства.

В ИПД области можно выделить БПО областного и муниципального уровней. В частности, в состав БПО Иркутской области входят следующие группы объектов:

- пункты городской триангуляции, городской полигонометрии и сетей сгущения, находящиеся в собственности области;
- акватории и границы поверхностных водных объектов общего пользования (водотоков и водоемов, находящихся в собственности области);
- автомобильные дороги, находящиеся в собственности области (автомобильные дороги областного и межмуниципального значения);
- территории и границы муниципальных образований.

В состав БПО муниципального образования (МО) области входят следующие группы объектов:

- пункты городской триангуляции II, III и IV классов, пункты городской полигонометрии 1-го и 2-го разрядов, пункты нивелирных сетей I-IV классов, пункты сетей сгущения;
- акватории и границы поверхностных водных объектов общего пользования (водотоков и водоемов, находящихся на территории МО);
- строения (здания), находящиеся на территории МО;
- автомобильные дороги, находящиеся в муниципальной собственности, среди которых выделяются дороги: а) поселений (расположенные в границах населенных пунктов поселений); б) муниципальных районов (расположенные вне границ населенных пунктов в границах муниципальных районов); в) городских округов (в границах населенных пунктов и между населенными пунктами).

В рамках развития ИПД Иркутской области необходимо создать реестры базовых пространственных объектов регионального и муниципального уровней.

Базовые пространственные данные

К пространственным данным области относятся цифровые данные о пространственных объектах, включающие сведения об их местоположении и свойствах, пространственных и непространственных атрибутах (рис. 4).

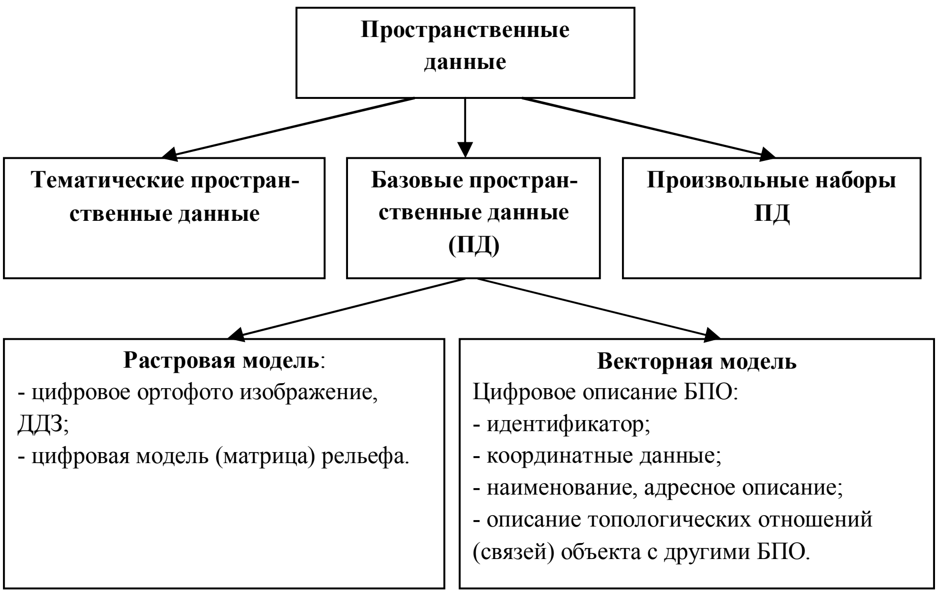

Рис. 4. Типы пространственных данных и их компоненты

БПД как описания БПО в заданной системе координат определяют координаты любых близлежащих пространственных объектов и явлений. Один из главных критериев отнесения данных к БПД – всеобщая потребность в них, а также активное их использование для создания производных геоинформационных материалов. В соответствии с общими требованиями БПД ИПД Иркутской области должны быть: общедоступными; оперативными; актуальными; полными; логически согласованными; позиционно, временно и атрибутивно точными, а также соответствовать стандартам. Элементы БПД определяются техническими регламентами, и их актуализация происходит путем использования результатов координатных описаний БПО, полученных при проведении всех видов геодезических и картографических работ, выполненных на территории Иркутской области. БПД должны использовать регламентированный обменный формат, а для хранения – векторную топологическую модель.

В состав БПД Иркутской области входит два основных типа пространственных данных:

- пространственные данные, удостоверяющие местоположение БПО (топогеодезические данные; кадастровые данные; адресные данные);
- цифровые изображения (данные ДЗЗ, ортофото изображения) и цифровые модели рельефа.

Областной и муниципальный фонды пространственных данных Иркутской области должны содержать пространственные данные, необходимые для реализации ОГВМС своих полномочий, а также реестры:

– БПО, включающие данные об объектах транспортной и инженерной инфраструктуры, водных объектов, лесного фонда, капитального строительства;

– высот, включающие данные о рельефе территории;

– административных границ и наименований области, границ и наименований муниципальных образований;

– населенных пунктов, содержащие описание местоположения населенного пункта (описание границы населенного пункта, наименование муниципального образования, на территории которого он расположен);

– ортофотокарт и ортофотопланов, которые включают информацию о тематически обработанных данных дистанционного зондирования земли области;

– топографических карт и планов, которые содержат сведения о рельефе территорий области, административно-территориальном делении области, населенных пунктах;

– геодезических сетей с информацией о местоположении и характеристиках пунктов государственных геодезических сетей на территории области;

– метаданных региональных и муниципальных фондов, а также метаданных о содержании информационных ресурсов ПД, находящихся в частной собственности, в том числе метрических карт и планов.

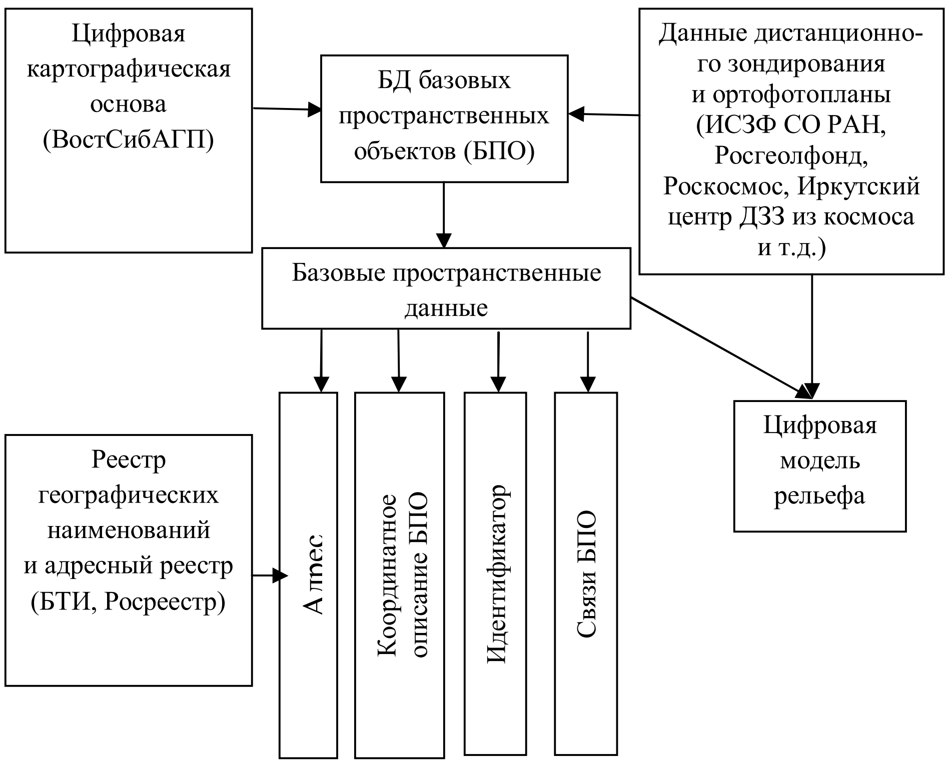

Рис. 5. Создание БПД на основе ортофото и картографических материалов

К БПД ИПД области относятся:

1) данные ДЗЗ в отношении территории Иркутской области;
2) сведения о рельефе территории Иркутской области;
3) сведения о границах и наименованиях единиц административно-территориального деления области;
4) сведения о местоположении и наименованиях населенных пунктов;
5) сведения о характеристиках и местоположении БПО области.

Базовые пространственные данные ИПД области областного и муниципального уровней должны описывать соответствующие группы БПО.

В соответствии с ГОСТ Р 52571, БПД области представляют в форматах СУБД, устанавливаемых в рамках ИПД, с использованием процедур, позволяющих предоставлять данные, обеспечивать доступ к ним и оценивать совместимость БПД, а также использовать предоставляемые данные с применением наиболее используемых программных средств СУБД и ГИС. Оценка качества БПД должна осуществляться с учетом требований ГОСТ и ISO 19113 по следующим показателям: полнота состава компонентов БПД по БПО; полнота состава БПД (наличие пропусков БПО или избыточно введенных БПО, несуществующих БПО); точность координатных данных БПО и соответствие метаданным; соответствие наименования или адресного описания БПО единым требованиям, нормам и правилам; соответствие топологических отношений БПД другим компонентам БПД о данном БПО.

Ведение в составе БПД данных ДЗЗ, цифровых моделей рельефа и нормализованных сведений о географических названиях объектов (БД географических названий) может осуществляться как на региональном, так и на муниципальном уровнях. Ответственность за актуализацию и предоставление БПД о БПО, находящихся в пределах границ области, возлагается на субъект, а за органами местного самоуправления закрепляется ответственность за предоставление БПД о БПО, находящихся в пределах его границ.

Пространственные и тематические данные Иркутской области: состав и фондодержатели

Основными источниками информации для создания БПД в Иркутской области являются:

– продукция, материалы и данные, полученные в результате геодезических, топографических, картографических, аэро- и космофотосъемочных, гидрографических работ;

– продукция, материалы и данные, создаваемые в результате деятельности по проектированию объектов инженерных изысканий, строительству и вводу объектов в эксплуатацию, эксплуатации объектов, контролю за поддержанием нормативного качества их состояния;

– продукция, материалы и данные муниципальных информационных систем, ресурсов, реестров, баз данных;

– классификаторы и справочники объектов, относящихся к БПО.

При создании баз БПД должна быть проведена инвентаризация источников для выявления данных, подлежащих отнесению к БПД.

Рассмотрим перечень основных фондодержателей Иркутской области и состав формируемых ими пространственных и тематических данных:

Федеральное государственное унитарное предприятие «Восточно-Сибирское аэрогеодезическое предприятие» (ФГУП «ВОСТСИБ АГП») (URL: http://www.geol.irk.ru) создает топографо-геодезическую и картографическую продукцию на территории Восточной Сибири. В процессе накопления Государственного банка цифровой геологической информации ВОСТСИБ АГП сформированы уникальные картографические информационные ресурсы.

Сибирский филиал Федерального государственного унитарного научно-производственного предприятия (ФГУНПП) «Росгеолфонд» (URL: http://www.geol.irk.ru) образован на базе Байкальского РИКЦ, проводит мониторинг состояния окружающей среды, а также геологоразведочные, геофизические и геохимические работы в области изучения недр, в т.ч. ведение мониторинга состояния недр и минерально-сырьевой базы РФ, а также работы, связанные с подготовкой картографической и космической информации, включая аэросъемку.

Иркутский центр дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) из космоса (URL: http://www.sputnik.irk.ru) осуществляет прием, каталогизацию и распространение принимаемых данных ДЗЗ и предоставляет пользователям спектр услуг – от заказа прицельной космической съемки территорий до поставки результатов тематического дешифрирования. Центр выполняет работы по региональному космическому мониторингу и обеспечению пользователей ежедневными данными о лесных пожарах, половодьях и паводках, а также другой оперативной информацией.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения РАН (ИСЗФ СО РАН)) (URL: http://iszf.irk.ru) осуществляет прием и первичную обработку спутниковых данных группировки американских метеорологических спутников серии NOAA. Обработка (первичная и тематическая) спутниковых данных проводится в автоматическом режиме. В частности, это относится к построению карт облачного покрова над территорией Восточной Сибири, Восточных Саян и Прибайкалья (URL: http://ckm.iszf.irk.ru/html/missions/clouds). Обработка данных ДЗЗ (NOAA/AVHRR) и использование программно-информационного комплекса «ForSGIS» позволяют вести контроль за пожароопасной обстановкой и состоянием лесов в системе координат «лесничество-квартал», а также вести статистику, отчетность и базу данных арендаторов лесного фонда области (URL: http://fire.iszf.irk.ru).

Управление Федеральной службы государственной регистрации, кадастра и картографии (*Росреестр) по Иркутской области (URL: http://www.to38.rosreestr.ru/)* располагает данными государственного учета объектов недвижимости Иркутской области, государственной регистрации прав и сделок с недвижимостью, кадастровой оценки, землеустройства и земельного контроля федерального картографо-геодезического фонда (публичные кадастровые карты, дежурные кадастровые карты, карты территорий муниципальных образований, карты территорий субъектов РФ).

Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Иркутской области (Иркутскстат) (URL: http://irkutskstat.gks.ru) осуществляет сбор первичных статистических и административных данных, их обработку и анализ для формирования и предоставления официальной информации о социально-экономических, демографических, экологических и других процессах в Иркутской области, по формам и в объеме предусмотренном Росстатом.

Федеральное космическое агенство (Роскосмос) (URL: http://www.roscosmos.ru) может поставлять пространственные данные для:

– создания, развития, системной увязки и применения геоинформационных систем различного назначения, включая цифровые карты;

– создания информационно-управляющих систем на базе использования современных космических систем навигационно-временного, геодезического и гидрометеорологического обеспечения, связи, управления, ретрансляции и передачи данных, дистанционного зондирования Земли, мониторинга и других систем;

– создания региональной навигационной системы, обеспечивающей решение задач позиционирования с необходимой точностью для мониторинга различных объектов и природных явлений, выполнения кадастровых, геодезических, строительных и других работ, повышения эффективности функционирования служб областного (муниципального) хозяйства;

– обеспечения мониторинга и прогнозирования угроз природного (ураганы, пожары, наводнения, засухи и другие опасные явления), техногенного, экологического и иного характера; создания систем обеспечения химической и биологической безопасности и социально-гигиенического мониторинга территории Иркутской области;

– повышения эффективности сельскохозяйственной деятельности, землепользования и земледелия, а также рационального использования природных ресурсов.

Правительство Иркутской области (URL: http://www.irkobl.ru) формирует информационные ресурсы, включающие первичные статистические, административные и аналитические данные Иркутскстата о социально-экономических, демографических, экологических и других процессах в Иркутской области, тематические данные территориальных органов государственной власти и местного самоуправления, а также структурных подразделений министерств.

Администрация г. Иркутска (URL: http://www.admirk.ru) формирует информационные ресурсы, включающие первичные статистические, административные и аналитические данные о социально-эколого-экономическом положении города из муниципальной статистики Иркутскстата, а также информационно-аналитические тематические данные подразделений администрации города.

Иркутский региональный научно-образовательный комплекс:

1. В институтах Иркутского научного центра (ИНЦ) СО РАН сформированы уникальные проблемно- и предметно-ориентированные базы пространственных данных по ландшафтам и геосистемам, картографирова-

нию природы, хозяйства и населения Сибири (ИГ СО РАН, БИП СО РАН), геологической среде и сейсмическим процессам (ИЗК СО РАН), геохимии окружающей среды и осадочных бассейнов (ИГХ СО РАН), электроэнергетическим и трубопроводным системам (ИСЭМ СО РАН), биоразнообразию фауны и флоры оз. Байкал (ЛИН СО РАН, БИП СО РАН), физиологии растений, молекулярной биологии и экологии растительных организмов (СИФИБР СО РАН), дистанционному зондированию поверхности Земли (ИСЗФ СО РАН)

2. В Иркутском государственном техническом университете сформированы информационные ресурсы по: региональной геологии, поиску и разведке месторождений полезных ископаемых; месторождениям твердых (рудных, нерудных и россыпных) полезных ископаемых; гидроэнергетике; архитектуре, районной планировке, градостроительству; жилищно-коммунальному хозяйству и т.д.

3. В Иркутском государственном университете сформированы информационные ресурсы по истории Восточной Сибири; географии Сибири и Дальнего Востока; региональной геологии, поиску и разведке месторождений полезных ископаемых; охране окружающей среды; биологии Байкальской природной территории и почвенным ресурсам и т.д.

4. В Восточно-Сибирском научном центре (ВСНЦ) СО РАМН сформированы информационные ресурсы по медицине труда и экологии человека; здоровью семьи и репродукции человека; эпидемиологии и микробиологии и т.д.

В Иркутской области поддерживаются в актуальном состоянии базы персональных данных Иркутскстата, Отделения Пенсионного фонда по Иркутской области, Министерства социального развития, опеки и попечительства Иркутской области, которые могут быть отнесены к тематическим данным.

Планируемый эффект от внедрения ИПД Иркутской области

Создание и внедрение ИПД Иркутской области позволит интегрировать пространственные информационные ресурсы органов государственной власти и местного самоуправления, хозяйствующих субъектов, бизнеса для управления перспективным развитием территорий.

Экономический эффект:

- экономия финансовых средств и ресурсов за счет эффективного планирования пространственного развития территорий Иркутской области;
- поддержка рационального природопользования;
- развитие хозяйственного комплекса области, рост оборота земель;
- повышение базы налогообложения по учету объектов недвижимости;
- сокращение себестоимости работ на производство пространственных данных и снижения затрат бюджетных средств за счет исключения дублирования работ;

- повышение инвестиционной привлекательности территорий области.

Социальный эффект:

- предоставление государственных и муниципальных услуг в виде сервисов бизнесу и населению области в режиме «одного окна»;
- повышение открытости пространственных информационных ресурсов ОГВМС при проведении государственных и муниципальных конкурсов на использование природных ресурсов;
- повышение безопасности жизни населения области.

Политический эффект:

- обеспечение доступа региональных ОГВМС, организаций и граждан к пространственным данным ИПД и их эффективное использование;
- использование ИПД при проведении референдумов, выборов, переписи;
- реализация приоритетных задач по информатизации области.

Литература

1. ГОСТ Р 53339-2009 Данные пространственные базовые. Общие требования. Введ. 01.01.2010.
2. ГОСТ Р 52571-2006 Географические информационные системы. Совместимость пространственных данных. Общие требования. Введ. 01.01.2007.
3. ФЗ (проект) «Об инфраструктуре пространственных данных, геодезической и картографической деятельности в Российской Федерации»
4. Интеграция информационно-аналитических ресурсов и обработка пространственных данных в задачах управления территориальным развитием / И. В. Бычков [и др.]; под ред. И. В. Бычкова; СО РАН, Ин-т динамики систем и теории управления. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2011. 369 с.
5. ФГУП «Восточно-Сибирское аэрогеодезическое предприятие». URL: http://www.geol.irk.ru
6. Сибирский филиал ФГУНПП «Росгеолфонд» URL: http://www.geol.irk.ru
7. Иркутский центр дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) URL: http://www.sputnik.irk.ru
8. ФГБУН Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения РАН (ИСЗФ СО РАН) URL: http://iszf.irk.ru
9. Управление Федеральной службы государственной регистрации, кадастра и картографии (Росреестр) по Иркутской области URL: http://www.to38.rosreestr.ru/
10. Федеральное космическое агенство (Роскосмос) URL: http://www.roscosmos.ru
11. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Иркутской области (Иркутскстат) URL: http://irkutskstat.gks.ru
12. Правительство Иркутской области URL: http://www.irkobl.ru
13. Администрация города Иркутска URL: http://www.admirk.ru

Бычков Игорь Вячеславович, доктор технических наук, академик РАН, директор ИДСТУ СО РАН, тел.: (395-2) 427100, e-mail: bychkov@icc.ru

Гаченко Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, тел.: (395-2) 453103, e-mail: gachenko@icc.ru

Ружников Геннадий Михайлович, кандидат технических наук, заместитель директора ИДСТУ СО РАН, тел.: (395-2) 453006, e-mail: rugnikov@icc.ru

Федоров Роман Константинович, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, тел.: (395-2) 453108, e-mail: fedorov@icc.ru

Хмельнов Алексей Евгеньевич, кандидат технических наук, заведующий лабораторией ИДСТУ СО РАН, тел.: (395-2) 453071, e-mail: hmelnov@icc.ru

Bichkov Igor Vyacheslavovich, doctor of technical sciences, academician of RAS, director of Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS

Gachenko Andrei Sergeevich, candidate of technical sciences, research fellow, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS

Ruzhnikov Gennadiy Mikhailovich, candidate of technical sciences, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS

Fedorov Roman Konstantinovich, candidate of technical sciences, leading research fellow, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS

Khmelnov Alexey Evgenievich, candidate of technical sciences, head of laboratory, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS

III. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.98
© С.Г. Баргуев, А.Д. Мижидон

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОСЦИЛЛЯТОРА НА УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00309-А)

В статье решается начально-краевая задача о колебаниях механической системы в виде осциллятора на упругом стержне с закрепленными концами.

Ключевые слова: *собственные частоты, собственные формы, условие ортогональности, начально-краевая задача, ряд Фурье.*

S.G. Barguev, A.D. Mizhidon

SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY PROBLEM ON VIBRATIONS OF THE OSCILLATOR ON AN ELASTIC ROD

In this article the initial boundary problem on vibrations of mechanical system that is an oscillator on the elastic rod with fastened ends is solved.

Keywords: *own frequency, own forms, orthogonal condition, initial boundary problem, Fourier series.*

Введение

При исследовании колебаний упругих систем возникает необходимость учитывать начальные условия – положение и скорости точек системы в начальный момент времени. Это, во-первых, дает возможность получить выражения для положений и скоростей точек системы в любой момент времени, во-вторых – решать задачи, связанные с ударным воздействием на систему различных внешних возмущений. При учете начальных условий и условий закрепления на краях систем расчет их колебаний называется начально-краевой задачей.

В случае стержней с различными типами закреплений на концах при рассмотрении как продольных, так и поперечных колебаний, начально-краевая задача решается методом Фурье, используя ортогональность системы тригонометрических функций. При учете точечной массы или пружины, закрепленной на свободном конце стержня, задача решена методом Фурье, но условие ортогональности сложнее, здесь не используется ортогональность системы тригонометрических функций [1].

В данной работе решается начально-краевая задача для системы: упругий стержень с неподвижными краями с установленным на нем в произвольном месте осциллятором в виде твердого тела на пружине. Получено условие ортогональности, использующее вид амплитудных уравнений и собственных функций задачи на собственные частоты. Затем производится разложение поперечных смещений точек стержня и смещения твердого тела в ряд по собственным функциям с коэффициентами в виде гармонических функций с неизвестными амплитудами и гармоническими функциями с теми же амплитудами, но неизвестным множителем. После подстановки указанных смещений в уравнения движения системы и интегрировании по длине стержня (с использованием найденного условия ортогональности) находятся неизвестные амплитуды и множители.

1. Разложение в ряд по собственным формам

Решение начально-краевой задачи

$$\begin{gathered}\frac{d^2z}{dt^2}+p^2(z-u(a,t))=0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=e(z-u(x,t))\delta(x-a)\\ u(x,0)=f_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=f_2(x)\\ z(0)=z_0\,,\ \frac{dz}{dt}(0)=z_{t0}\\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0\\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0\end{gathered}\qquad(11)$$

будем искать в виде рядов

$$z(t)=\sum_i A_i\phi_i(t)\qquad(12)$$

$$u(x,t)=\sum_i \phi_i(t)V_i(x)\qquad(13)$$

Подставляя в (11) , получим

$$\sum_i A_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t) + p^2\Big(\sum_i A_i\phi_i(t) - \sum_i \phi_i(t)V_i(a)\Big) = 0$$
$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t)\, V_i(x) + b\sum_i \phi_i(t)\frac{\partial^4}{\partial x^4}V_i(x) = \\ = e\,\Big(\sum_i A_i\phi_i(t) - \sum_i \phi_i(t)V_i(x)\Big)\delta(x-a)$$

Отсюда для i-ой составляющей этой системы получим

$$A_i\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t) + p^2(A_i - V_i(a))\phi_i(t) = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t)\, V_i(x) + b\phi_i(t)\frac{\partial^4}{\partial x^4}V_i(x) = \\ = e\,\phi_i(t)(A_i - V_i(x))\delta(x-a) \qquad (14)$$

Разделив первое и второе уравнения системы (14) на $\phi_i(t) \neq 0$, получим

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t)}{\phi_i(t)}A_i + p^2(A_i - V_i(a)) = 0$$
$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t)}{\phi_i(t)}V_i(x) + b\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}V_i(x) = e\,(A_i - V_i(x))\delta(x-a)$$

Положив $\dfrac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t)}{\phi_i(t)} = -\omega_i^2$, получим, что каждая составляющая рядов (12-13) изменяется со временем по гармоническому закону с собственной частотой ω_i, постоянной амплитудой для твердого тела и переменной амплитудой $V_i(x)$ для точек стержня, которую назовем собственной формой, соответствующей собственной частоте ω_i.

Из начальных условий задачи (11) для смещений получим

$$\sum_i \phi_{i0}\, V_i(x) = f_1(x) \qquad (15)$$
$$\sum_i \phi_{i0}\, A_i = z_0 \qquad (16)$$

или $$\sum_i \phi_{i0}\, V_i(x) = f_1(x) \qquad (17)$$
$$\sum_i \phi_{i0}\frac{p^2}{p^2-\omega_i^2}V_i(a) = z_0 \qquad (18)$$

Домножим (17) на $V_j(x)$ и проинтегрируем в пределах от $x = 0$ до $x = l$:

$$\sum_i \phi_{i0} \int_0^l V_i(x) V_j(x)\,dx = \int_0^l f_1(x) V_j(x)\,dx\,. \tag{19}$$

Домножив (18) на $e\dfrac{V_j(a)}{p^2-\omega_j^2}$, получим

$$\sum_i \phi_{i0} \frac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)(p^2-\omega_j^2)} V_i(a) V_j(a) = z_0 \frac{e}{p^2-\omega_j^2} V_j(a)\ . \tag{20}$$

Сложив (19) и (20), получим

$$\begin{gathered}\sum_i \phi_{i0} (\int_0^l V_i(x) V_j(x)\,dx + \frac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)(p^2-\omega_j^2)} \\ V_i(a)V_j(a)) = \int_0^l f_1(x) V_j(x)\,dx + z_0 \frac{e}{p^2-\omega_j^2} V_j(a)\end{gathered}\ . \tag{21}$$

Из условия ортогональности

$$\begin{gathered}\int_0^l V_i(x) V_j(x)\,dx + \frac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)(p^2-\omega_j^2)}\, V_i(a) V_j(a) = \\ = \begin{cases} 0,\ i \neq j \\ \int_0^l V_i^2(x)\ dx + \dfrac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)^2}\, V_i^2(a), i = j \end{cases}\end{gathered} ,$$

полученной в [2] вытекает, что в (21) только один член при $i = j$ не равен нулю, то есть

$$\begin{gathered}\phi_{i0} (\int_0^l V_i^2(x)\,dx + \frac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)^2} V_i^2(a)) = \\ = \int_0^l f_1(x) V_i(x)\,dx + z_0 \frac{e}{p^2-\omega_i^2} V_i(a)\end{gathered}\ .$$

Отсюда

$$\phi_{i0} = \frac{\int_0^l f_1(x) V_i(x)\,dx + z_0 \dfrac{e}{p^2-\omega_i^2} V_i(a)}{\int_0^l V_i^2(x)\,dx + \dfrac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)^2} V_i^2(a)} \tag{22}$$

Из начальных условий задачи (11) для скоростей получим

$$\begin{gathered}\sum_i \phi_{ti0}\, V_i(x) = f_2(x) \\ \sum_i \phi_{ti0}\, A_i(x) = z_{t0}\ .\end{gathered} \tag{23}$$

Выполняя аналогичные преобразования, что и в (19)-(22), получим

$$\phi_{ti0} = \frac{\int_0^l f_2(x)V_i(x)\,dx + z_{to}\frac{e}{p^2-\omega_i^2}V_i(a)}{\int_0^l V_i^2(x)\,dx + \frac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)^2}V_i^2(a)} \tag{24}$$

Временной множитель $\phi_i(t)$ в рядах (12-13) удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_i(t) + \omega_i^2\phi_i(t) = 0$, которое имеет решение $\phi_i(t) = C_i\sin\omega_i t + D_i\cos\omega_i t$, где C_i и D_i – произвольные постоянные.

Из начальных условий $\phi_i(0) = D_i = \phi_{i0}, \frac{d\phi_i}{dt}(0) = C_i\,\omega_i = \phi_{ti0}$ или $D_i = \phi_{i0}$, $C_i = \frac{\phi_{ti0}}{\omega_i}$. Отсюда $\phi_i(t) = \frac{\phi_{ti0}}{\omega_i}\sin\omega_i t + \phi_{i0}\cos\omega_i t$.

Согласно [3] имеем для собственных форм $V_i(x) = \frac{e\bar{V}_i(x-a)}{1+e\bar{V}_i(0)}A_i$ или

$$V_i(x) = \tilde{V}_i(x)A_i\ , \tag{25}$$

где $\tilde{V}_i(x) = \frac{e\bar{V}_i(x-a)}{1+e\bar{V}_i(0)}$. Подставляя (25) в (22) и (24) и сокращая на A_i, получим

$$z(t) = \sum_i \tilde{\phi}_i(t)$$

$$u(x,t) = \sum_i \tilde{\phi}_i(t)\tilde{V}_i(x),$$

где $\tilde{\phi}_i(t) = \frac{\tilde{\phi}_{ti0}}{\omega_i}\sin\omega_i t + \tilde{\phi}_{i0}\cos\omega_i t$,

$$\tilde{\phi}_{i0} = \frac{\int_0^l f_1(x)\tilde{V}_i(x)\,dx + z_0\frac{e}{p^2-\omega_i^2}\tilde{V}_i(a)}{\int_0^l \tilde{V}_i^2(x)\,dx + \frac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)^2}\tilde{V}_i^2(a)},$$

$$\tilde{\phi}_{ti0} = \frac{\int_0^l f_2(x)\tilde{V}_i(x)\,dx + z_{t0}\dfrac{e}{p^2-\omega_i^2}\tilde{V}_i(a)}{\int_0^l \tilde{V}_i^2(x)\,dx + \dfrac{e\,p^2}{(p^2-\omega_i^2)^2}\tilde{V}_i^2(a)}, \quad \tilde{V}_i(a) = \frac{e\bar{V}_i(0)}{1+e\bar{V}_i(0)}.$$

Заключение

Таким образом, решена начально-краевая задача колебаний механической системы-упругий стержень с неподвижными краями с установленным на нем в произвольном месте осциллятором в виде твердого тела на пружине.

Получено условие ортогональности, позволившее разложить поперечное смещение (скорость) точек стержня и смещение (скорость) твердого тела в ряд по собственным функциям с коэффициентами, зависящими от времени.

Литература

1. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985.
2. Баргуев С.Г. Об условии ортогональности собственных форм в задаче о колебаниях одной упругой механической системы: материалы ИКВТС-2010, Энхалук, сентябрь 2010.
3. Баргуев С.Г., Мижидон А.Д., Цыцыренова М.Ж. Определение собственных частот простейшей механической системы на упругом основании // Вестник БГУ. Вып. 9. Математика и информатика. Улан-Удэ, 2009.

Баргуев Сергей Ганжурович (Гавриилович), кандидат физико-математических наук, доцент Бурятского филиала Сибирского университета телекоммуникаций и информатики. *E-mail: barguev@yandex.ru*

Мижидон Арсалан Дугарович, доктор технических наук, профессор Восточно-Сибирского университета технологии и управления. *E-mail: miarsdu@esstu.ru*

Barguev Sergey Ganzhurovich (Gavrilovich), candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Buryat branch of Siberian University of Telecommunication and Information.

Mizhidon Arsalan Dugarovich, doctor of technical sciences, professor of East- Siberian State University of Technology and Managment.

УДК 517.948

© Г.А. Шишкин

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В ЗАМКНУТОМ ВИДЕ

Используя функцию гибкой структуры, в статье исследуются возможности решения краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом в замкнутом виде.

Ключевые слова: *уравнения Фредгольма, интегро-дифференциальные уравнения, замкнутые решения, разрешающие уравнения, функция гибкой структуры.*

G.A. Shishkin

SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL FREDGOLM EQUATIONS WITH LATE ARGUMENT IN THE CLOSED KIND

In the article the possibilities of solution of boundary problems for linear integer-differential Fredgolm equations with late argument in the closed kind are researched by means of the use a function of flexible structure.

Keywords: *Fredgolm equations, integer-differential equations, closed decisions, resolving equations, function of flexible structure.*

Введение

В работах [4-7] рассматривались краевые задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом запаздывающего, нейтрального и опережающего типов. Определение типов в этих работах осуществлялось в соответствии с классификацией, приведенной в работе [1].

Общий вид таких уравнений можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\left[f_{ij}\left(x\right)y^{(i)}(u_j(x))+\lambda\int_a^b K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta\right]=f(x), \qquad (1)$$

где $u_0(x)\equiv x,\ u_j(x)\le x\ \forall j=\overline{1,l}$, функции $f_{ij}(x), u_j(x)$, и $f(x)$ – непрерывны, ядра $K_{ij}(x,\eta)$ – регулярны в квадрате $a\le x,\eta\le b$, с линейными краевыми условиями для уравнений вида (1)

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{i\tau}y^{(i)}(x_0)+\beta_{i\tau}y^{(i)}(x_1)]=\gamma_\tau,\ \ \tau=\overline{0,n-1},\ \ a\le x_0\le b, \qquad (2)$$

с начальными функциями

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0)\varphi_i(u_j(x)) \ \text{ïðè} \ \ x \in E_{x_0}, \ i = \overline{0, n-1}, \tag{3}$$

где $u_0(x) \equiv x, u_j(x) \le x$; функции $u_j(x), f_{ij}(x)$ $\grave{e}$ $f(x)$ – непрерывны, ядра $K_{ij}(x)$ – регулярны в квадрате $a \le x, \eta \le b,$ $E_{x_0} = \bigcup\limits_{j=0}^{l} E_{x_0}^j$, $E_{x_0}^j$ – множество значений $u_j(x) \le x$ при $x > x_0, \forall j = \overline{1, l}, E_{x_0}^0 = [a, x_0]$, функции $\varphi_i(x)$ – заданы и $\varphi_i(x_0) = 1, \forall i = \overline{0, n-1}.$

Используя одну из модификаций функции гибкой структуры [2; 3], было показано, что задача (1)-(3) для уравнений запаздывающего типа всегда сводится к разрешающему интегральному уравнению смешанного вида Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом. Для уравнений нейтрального и опережающего типов получены условия, при которых такое преобразование возможно. Далее в работе [6] показано, что все разрешающие уравнения рассмотренных краевых задач приводятся к одному виду смешанных интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма

$$\mu(z) + \sum_{j=0}^{l} \left[\int\limits_{x_0}^{v_j(x)} \hat{O}_j(z,t)\mu(t)dt + \lambda \int\limits_{x_0}^{u_j(b)} G_j(z,t)\mu(t)dt \right] = F(z), \tag{4}$$

где $z \equiv x$ для уравнений запаздывающего типа и $z \equiv u_l(x)$ для уравнений нейтрального и опережающего типов.

Так как в разрешающее уравнение (4) вошли n параметров $r_i, i = \overline{1, n},$ то можно попытаться за счет их выбора оптимизировать дальнейшее решение задачи и, во-первых, попытаться найти решение в замкнутом виде, а если это затруднительно, то перейти к ее приближенному решению.

Постановка задачи и ее решение

Исследование возможностей решения начальных задач в замкнутом виде проведем, опираясь на результаты работ [4-6] .

Решение в замкнутом виде получим, если в уравнении (4) параметры $r_i, i = \overline{1, n},$ можно определить так, что $F(z) \equiv 0$. Тогда решение однородного уравнения (4) будет $\mu(z) \equiv 0$ (в силу единственности решения при выполнении условий ограниченности функций $\left|\Phi_j(z,t)\right| \le Q_{1j}, \ \forall j = \overline{0, l}$ в заданном квадрате $u_l(x_0) \le z \le u_l(b))$, и решение первоначально поставленной задачи найдется по формуле (9) работы [4] при значении $i = 0$

$$y(z) = D^{-1} \sum_{s=1}^{n} \Delta_s (z - x \,)\sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} \gamma_{\tau} \cdot , \tag{5}$$

где определители $D, \Delta_s(z-x_0)$, вычисляются по формулам для функции гибкой структуры (4) в работе [4], ω по формуле (6) этой же работы, а $\omega_{s\tau}$ – алгебраические дополнения к его элементам.

Другой возможный вариант решения в замкнутом виде получим, если параметры $r_i, i=\overline{1,n}$, таковы, что $\Phi_j(z,t)\equiv 0, G_j(z,t)\equiv 0 \quad \forall j=\overline{0,l}$. Тогда решение уравнения (4) будет $\mu(z)\equiv F(z)$ и, соответственно, по формуле для функции гибкой структуры (9) работы [4], определятся решения краевых задач

$$y(z)=D^{-1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(z-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}[\gamma_\tau-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}F(t)dt]+\int_{x_0}^{z}\Delta_n(z-t)F(t)dt\ \right\}+F(z). \tag{6}$$

Если за счет выбора параметров выполнить условия $F(z)\equiv 0$ или $\hat{O}_j(z,t)\equiv 0$ и $G_j(z,t)\equiv 0\ \forall j=\overline{0,l}$ не удается, то можно попытаться при $G_j(z,t)\neq 0$ сделать $\hat{O}_j(z,t)\equiv 0$. В этом случае разрешающее уравнение будет интегральным уравнением Фредгольма, и к нему применимы все известные методы решения в замкнутом виде интегральных уравнений Фредгольма (например, метод для вырожденных ядер).

Если же за счет выбора параметров удается сделать $G_j(z,t)\equiv 0$ при $\hat{O}_j(z,t)\neq 0\ \forall j=\overline{0,l}$, тогда получим разрешающее интегральное уравнение типа Вольтерра, для которого также в некоторых случаях известны возможные варианты решения в замкнутом виде.

Следует также заметить, что для некоторых частных видов разрешающих уравнений какие-то из выше перечисленных условий могут выполняться автоматически.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y''(x)+2y'(x)-y'\left(\dfrac{x}{2}\right)-\displaystyle\int_0^1 y'(\eta)d\eta=0, \\ y(0)+y'(1)=0,\ 2y'(0)-y'(1)=1. \end{cases}$$

Решение. Так как начальное множество состоит из одной точки, то краевая задача в этом случае ставится также, как и для уравнений с обыкновенным аргументом, без задания начальных функций, следовательно $E_0 = E_0^0 \cup E_0^1 = [0]$.

Воспользовавшись формулами функций гибкой структуры (9) работы [4] при n=2, x_0=0 и положив r_1=0 для искомой функции и ее производных, найдем

$$y(x) = y(0) + y'(0)\frac{e^{r_2 x} - 1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\int_0^x \left[e^{r_2(x-t)} - 1\right]\mu(t)dt,$$

$$y'(x) = y'(0)e^{r_2 x} + \int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt,$$

$$y''(x) = y'(0)r_2 e^{r_2 x} + r_2\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt + \mu(x).$$

Откуда получим

$$y(1) = y(0) + y'(0)\frac{e^{r_2} - 1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\int_0^1 \left[e^{r_2(1-t)} - 1\right]\mu(t)dt,$$

$$y'(1) = y'(0)e^{r_2} + \int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt.$$

Подставив полученные выражения для $y(1),\ y'(1)$ в краевые условия, определим

$$y'(0) = \frac{1 + \int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt}{2 - e^{r_2}},\ y(0) = 1 - 2y'(0) = -\frac{e^{r_2} + 2\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)}{2 - e^{r_2}}.$$

Затем полученные выражения для $y(0),\ y'(0)$ подставим в формулы для искомой функции и ее производных, а последние – в заданные уравнения, тогда придем к разрешающему уравнению

$$\mu(x) + \frac{(r_2+2)e^{r_2 x} - e^{r_2\frac{x}{2}}}{2 - e^{r_2}}\int_0^1 e^{r_2(1-t)}\mu(t)dt + (2 + r_2)\int_0^x e^{r_2(x-t)}\mu(t)dt -$$

$$-\int_0^{\frac{x}{2}} e^{r_2\left(\frac{x}{2}-t\right)}\mu(t)dt = \frac{e^{r_2} - 1 - r_2^2 e^{r_2 x} - 2r_2 e^{r_2 x} + r_2 e^{r_2\frac{x}{2}}}{r_2(2 - e^{r_2})} = F(x).$$

Теперь за счет выбора параметра r_2 минимизируем функцию $F(x)$, минимум которой достигается при $r_2=0$, т. к.

$$\lim_{r_2\to 0} F(x)=\lim_{r_2\to 0}\frac{1}{2-e^{r_2}}\lim_{r_2\to 0}\frac{e^{r_2}-1-r_2^2e^{r_2x}-2r_2e^{r_2x}+r_2e^{r_2\frac{x}{2}}}{r_2}=$$

$$=\lim_{r_2\to 0}\frac{e^{r_2}-1}{r_2}-\lim_{r_2\to 0}\left(r_2e^{r_2x}+2e^{r_2x}-e^{r_2\frac{x}{2}}\right)=1-2+1=0.$$

Следовательно, при $r_2=0$ разрешающее уравнение однородное, и его решение $\mu(x)\equiv 0$, тогда решение поставленной краевой задачи будет

$$y(x)=-\frac{e^{r_2}}{2-e^{r_2}}+\frac{e^{r_2x}-1}{r_2(2-e^{r_2})}=\lim_{r_2\to 0}\left(\frac{e^{r_2x}-1-r_2e^{r_2}}{r_2(2-e^{r_2})}\right)=x-1.$$

Нетрудно проверить, что функция $y(x)=x-1$ удовлетворяет всем условиям поставленной краевой задачи.

Литература

1. Громова П.С. Некоторые вопросы качественной теории интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1967. Т.5. С.61-76.
2. Куликов Н.К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа,1964. 207с.
3. Куликов Н.К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. М.,1974. С. 47-57.
4. Шишкин Г.А. Об одном методе преобразования краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа // Сб. статей. Вып.4. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2003. С. 112–115.
5. Шишкин Г.А. Преобразование краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с запаздывающим аргументом нейтрального типа к уравнениям без отклонений аргумента // Вестник БГУ. Сер. 13 Математика и информатика. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2004. Вып. 1. С. 42–47.
6. Шишкин Г.А. Исследование возможностей преобразования краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом опережающего типа к уравнениям с обыкновенным аргументом // Вестник БГУ. Сер. 13 Математика и информатика. Улан-Удэ, 2005. Вып. 2. С. 98–101.
7. Шишкин Г.А. Исследование краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с запаздывающим аргументом // Материалы всероссийской конференции Математика, ее приложения и математическое образование. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2005. С. 269-275.

Шишкин Геннадий Александрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ИМИ БГУ, e-mail: gnshishkin@mail.ru

Shishkin Gennady Alexandrovich, candidate of physical and mathematical sciences, professor of applied mathematics department, Institute of Mathematics and Information, Buryat State University.

IV. АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

УДК 517.11+517.98

© **В.И. Антонов**

СТРУКТУРНЫЙ ПУЧОК И БУЛЕВЫ ОЦЕНКИ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

В работе строятся пучки $F(\bullet)$, представляющие l-группы и определенные на полных булевых алгебрах B, связанных с исходной алгебраической системой. Изучаются семантические оценивания, соответствующие этим пучкам.

Ключевые слова: *булевозначный анализ, оценки, пучки, предпучки, решеточно упорядоченные группы, ортополные B-группы, ортополные проективные l-группы.*

V.I. Antonov

STRUCTURAL BEAM AND THE BOOLEAN EVALUATION OF LATTICE-ORDERED GROUPS

In the work beams of $F(\bullet)$ are constructed. They represent the l-group, defined at complete Boolean algebras B, and connected with an initial algebraic system. The semantic evaluations, correspondent to these beams,are studied.

Keywords: *Boolean valued analysis, evaluation, beams, pre beams, lattice-ordered groups, orthocomplete B-groups, orthocomplete projective l-groups.*

Введение

Гейтинговозначный анализ, и в частности булевозначный анализ алгебраических структур, представляет собой один из путей приложения методов теории моделей в алгебре, в том числе в теории колец и групп. Конструкция булевозначного универсума первоначально разрабатывалась для решения сложных теоретико-множественных проблем, в частности для доказательства независимости от аксиом теории множеств некоторых ее гипотез, например континуум-гипотезы. Примеры таких результатов можно найти в работах П. Вопенка, Д. Скотта, Р. Соловея, Г. Такеути, В.А. Любецкого и Е.И. Гордона. Однако в дальнейшем выяснилось, что гейтинговозначный и булевозначный анализы могут применяться и для решения чисто алгебраических проблем, например, в фундаментальных работах С.С. Кутателадзе и А.Г. Кусраева [1; 3]. Для алгебраических структур метод гейтинговозначного анализа эффективен, если удается построить такой содержательный пучок $F(\bullet)$ на полной гейтинговой (или булевой) алгебре Ω, что $K = F(1)$ (пучок $F(\bullet)$ называется представляющим систему K). В этой связи важен вопрос о наличии такого пучка $F(\bullet)$. Примеры таких пучков можно найти в работах Р. Пирса, К. Каймела, Ж. Даунса, К. Гофмана, Ф. Борсо, Х. Сименса, Ван Де Боша; однако все эти пучки заданы на полных гейтинговых алгебрах-топологиях τ некоторых топологических пространств, связанных с исходной системой K. Такому пучку $F(\bullet)$ соответствует следующая оценка $[\bullet]_\tau$, определенная на множестве всех формул $\phi(k_1,...,k_n)$ с параметрами $k_1,...,k_n \in K$. А именно, $[k = t] = \sup\{u \in \Omega | \rho_u^1(k) = \rho_u^1(t)\}$ и аналогично для других атомарных формул; и $[\phi \wedge \psi] = \inf\{[\phi], [\psi]\}$, $[\exists x\phi] = \sup\{[\phi(k)] \mid k \in K\}$ и аналогично для других связок. Эта оценка замкнута относительно только интуиционистской выводимости (это означает: если $[\phi]_\tau = 1$ и ψ интуиционистски выводима из ϕ, то $[\psi]_\tau = 1$). Поэтому особый интерес представляют пучки $F(\bullet)$, определенные на полных булевых алгебрах B. В этом случае мы имеем: если $[\phi]_B = 1$, и ψ выводима из ϕ, то $[\psi]_B = 1$, т.е. соответствующая пучку оценка замкнута относительно классической выводимости. Оценка $[\bullet]$, определенная в связи с алгебраической системой K, называется еще семантическим оцениванием в алгебраической системе K. В работе строятся пучки $F(\bullet)$, представляющие *l*-группы и определенные на полных булевых алгебрах B, связанных с исходной алгебраической системой. Изучаются семантические оценивания (оценки) $[\bullet]_B$, соответствующие этим пучкам $F(\bullet)$. На этой основе изучаются хорновы и другие теории разных классов *l*-групп.

Структурные пучки решеточно упорядоченных групп на полных булевых алгебрах

Пусть G – решеточно-упорядоченная группа (*l*-группа). Обозначим B(G) множество всех ее дополняемых *l*-идеалов. Это множество является булевой алгеброй относительно операций: $N_1 \wedge N_2 = N_1 \cap N_2$, $N_1 \vee N_2 = N_1 + N_2$, $\neg N = N^\perp$, причем наибольшим элементом 1_G является вся *l*-группа G и наименьшем элементом 0_G (нулевой *l*-идеал), где

$N^{\perp} = \{x \in G | \forall n \in N \ (|n| \wedge |x| = 0)\}$. Буква N с индексом или без него везде обозначает произвольный элемент алгебры B(G).

l-группу G назовем B-группой, если булева алгебра B(G) является полной. *l*-группа G называется ортополной, если существует sup M для любого ортогонального множества M положительных элементов группы G. *l*-группа G называется проективной, если выполняется $G = g^{\perp} + g^{\perp\perp}$ для всех $g \in G$, где $g^{\perp} = \{x \in G \,|\, |x| \wedge |g| = 0\}$ и $g^{\perp\perp} = (g^{\perp})^{\perp}$. *l*-группа G называется квазирегулярной, если выполняется $G = \langle g \rangle \cap g^{\perp}$ и $\langle g \rangle \cap g^{\perp} = 0$ для всех $g \in G$, где $\langle g \rangle$ – главный *l*-идеал, порожденный элементом $g \in G$.

Для любой *l*-группы G определяется предпучок $F(\bullet)$ на булевой алгебре B(G). А именно F(N)=N; если $N_1 \leq N_2$, то $\rho_{N_1}^{N_1}(g) \Leftrightarrow N_1 g$ для всех $g \in N_2$, где $g = N_1(g) + N_1^{\perp}(g)$, $N_1(g) \in N_1$ и $N_1^{\perp}(g) \in N_1^{\perp}$. Этот предпучок $F(\bullet)$ назовем каноническим предпучком.

<u>Теорема 1.</u> Пусть G – любая ортополная B-группа. Тогда канонический предпучок $F(\bullet)$, представляющий G является пучком на полной булевой алгебре B(G).

Доказательство теоремы разобьем на четыре леммы. Предварительно докажем одно предложение.

Определим отображение $\varphi_N : G \to N$, положив $\varphi_N(a) = a_1$, если $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in N$, $a_2 \in N^{\perp}$. В силу дизъюнктности множеств N и $N^{\perp}$ такой a_1 однозначно определяется по a.

<u>Предложение 1.</u> Выполняются следующие свойства:

1) $\varphi_N(a + b) = \varphi_N(a) + \varphi_N(b)$ для любых $a, b \in G$.

2) $(a \geq b) \Rightarrow (\varphi_N(a) \geq \varphi_N(b))$ для любых $a, b \in G$.

3) $\varphi_N(\vee a_{\alpha}) = \vee \varphi_N(a_{\alpha})$, если $\vee a_{\alpha}$ существует в G.

Если $N = \vee N_{\alpha}$, $N \in B(G)$, $\{N_{\alpha}\} \subseteq B(G)$, то $\varphi_N(a) = \vee \varphi_N(a)$ для любого $a \in G^{+}$.

В дальнейшем будем обозначать $N(a) = \varphi_N(a)$ для всех $N \in B(G)$ и $a \in G$.

<u>Лемма 1.</u> Для всех N, $H \in B(G)$ и $a \in G$ выполняется $(N \wedge H)(a) = N(H(a)) = H(N(a))$.

Пусть N, $H \in B(G)$ и $N \subseteq H$. Обозначим через φ_N^H ограничение отображения ϕ_N на H, где $\phi_N : G \to N$.

Следствие. Пусть $N \subseteq H \subseteq R$ и N, H, R$\in$B(G). Тогда $\varphi_N^R = \varphi_N^H \bullet \varphi_H^R$, т.е. $\forall a \in R \left(\varphi_N^R(a) = \varphi_N^H(a) \bullet \varphi_H^R(a)\right)$. Другими словами, $N(a) = N(H(a))$ для всех $a \in R$.

Определение. Из этого следствия получаем, что по произвольной *l*-группе G однозначно определяется предпучок $F(\bullet)$ на булевой алгебре B=B(G), представляющий G (т.е. G=$F_B(1)$). А именно, предпучок $F(\bullet)$ на B определяется следующим образом: F(N)=N и если $N \subseteq H$, то φ_N^H(a)= N(a) для любого $a \in H$ и для любых N, $H \in B$. В дальнейшем этот предпучок $F(\bullet)$ будем называть каноническим предпучком.

Лемма 2. Предпучок $F(\bullet)$ является отделимым, а именно $\forall \{N_\alpha\} \subseteq B(G)$ $\forall N \in B(G)$ $\forall a_1 \in F(N)$ $\forall a_2 \in F(N)$ $\left(N = VN_\alpha \wedge (\forall\alpha(a_1) = N_\alpha(a_2))\right) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Лемма 3. Пусть G – ортополная B-группа. Тогда $\forall N, N_\alpha \in B(G)$ $(N=VN_\alpha \wedge \forall a_\alpha \in N_\alpha^+ \forall a_\beta \in N_\beta^+ (((N_\alpha \wedge N_\beta)(a_\alpha))=((N_\alpha \wedge N_\beta)(a_\beta)) \Rightarrow \exists! a \in N^+(\forall\alpha\in\wedge(N_\alpha(a)=a_\alpha)))$

Лемма 4. Пусть G – ортополная B-группа. Тогда $\forall N, N_\alpha \in B(G)$ $\left(N = VN_\alpha \wedge \forall a_\alpha \in N_\alpha\ \forall a_\beta \in N_\beta\ \left(\left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\alpha) = \left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\beta) \Rightarrow\right)\right)$ $\exists! a \in N\left(\forall\alpha \in \left(N_\alpha(a) = a_\alpha\right)\right)$

Доказательство. Пусть $a_\alpha \in N_\alpha$, $a_\beta \in N_\beta$ и $\left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\alpha) = \left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\beta)$. Тогда легко показать, что $\left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\alpha^+) = \left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\beta^+)$ и $\left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\alpha^-) = \left(N_\alpha \wedge N_\beta\right)(a_\beta^-)$. Из леммы 3 имеем $\exists!\, b \in N^+\ \forall\alpha \in \Lambda$ $\left(N_\alpha(b) = a_\alpha^+\right)$ и $\exists!\, c \in N^+\ \forall\alpha \in \Lambda$ $\left(N_\alpha(c) = a_\alpha\right)$. Возьмем за a=b-c, $a \in N$. Тогда $N_\alpha(a) = N_\alpha(b)\text{-}N_\alpha(c) = a_\alpha^+ - a_\alpha^- = a_\alpha$. Единственность такого элемента a следует из самого доказательства леммы. Мы доказали теорему 1.

Булевы оценки в структурном пучке решеточно упорядоченных групп

Для любой ортополной B-группы G определим отображение Я(G) $\to$B(G), где Я(G) – множество всех предложений в языке *l*-групп с множеством G в качестве множества параметров. Это отображение называется B-оценкой и обозначается $[\bullet]_B$. Для атомарного предложения g=h оценка определяется следующим образом: $[g = h]_B = V\{N \in B(G) | N(g) = N(h)\}$. Затем это отображение продолжается на все множество Я(G) обычным образом $[\phi \wedge \psi]_B = [\phi]_B \wedge [\psi]_B$, $[\exists\, x\, \phi] = \mathrm{V}\left\{[\phi(g)]_B \mid g \in G\right\}$ и аналогично для всех других пропозициональных связок и для квантора $\forall$. Оценка $[\bullet]_B$ замкнута относительно классической выводимости в теории *l*-групп, т. е. выполняется, во-первых, $[\phi]_B = 1_G$ для всех классических аксиом ϕ; и, во-вторых, если $[\phi]_B = 1_G$ и $[\psi]_B = 1_G$, а υ получается из φ, ψ по одному из правил вывода, то $[\upsilon]_B = 1_G$. Поэтому $\vdash \phi$ òî ãäà è òî ëüêî òî ãäà, êî ãäà $[\phi]_B = 1_G$, ãäå $\vdash$ – обозначает классическую выводимость (в некоторой подразумеваемой теории).

Определение. *l*-группа G называется нормальной, если выполняется свойство: $\forall\, g \in G\, \exists\, N_g \in B(G)\ \forall N \in B(G)\ \left(N(g) = 0 \Leftrightarrow N \subseteq N_g\right)$.

Предложение 2. Выполняется свойство: $\forall\, g, h \in G\ \left([g = h] \in B(G)\right)$ тогда и только тогда, когда *l*-группа G нормальная.

Теорема 2. Пусть G – ортополная B-группа. Тогда выполняется следующее:

а) G – проективная l-группа тогда и только тогда, когда $[G-$ линейно упорядоченная группа $]=1_G$, где 1_G – наибольший элемент булевой алгебры $B(G)$;

б) G – квазирегулярная l группа тогда и только тогда, когда $[G-\ l$-простая линейно упорядоченная группа $]=1_G$, где 1_G – наибольший элемент булевой алгебры $B(G)$.

Доказательство. а) Пусть G – проективная l-группа. Тогда имеем $[g = 0] = g^{\perp}$ для любого $g \in G$. Действительно, эквивалентны следующие соотношения $N(g) = 0$, $g \in N^{\perp}$ и $N = N^{\perp\perp} \subseteq g^{\perp}$ для любых $N \in B(G)$ и $g \in G$. Вычислим оценку $[G$ – линейно упорядоченная группа $] = \bigcap\limits_{x,u \in G}([x \le y] \cup [x \ge y]) = \bigcap\limits_{x,y \in G}([x - y \le 0] \cup [x - y \ge 0]) = .$

$= \bigcap\limits_{g \in G}([g \le 0] \cup [g \ge 0])$. Пусть $g \in G$. Тогда $[g \le 0] \cup [g \ge 0] = [g \vee 0 = 0] \cup [g \wedge 0 = 0] = (g \vee 0)^{\perp} \cup (g \wedge 0)^{\perp}$. Легко показать, что $(g \vee 0) \perp (g \wedge 0)$. Значит $g \wedge 0 \in (g \vee 0)^{\perp}$. Отсюда получаем

$(g \vee 0)^{\perp\perp} \subseteq \quad \subseteq (g \wedge 0)^{\perp}$. Следовательно, для любого $g \in G$ имеем $\left[g \le 0 \right] \cup \left[g \ge 0 \right] \supseteq (g \vee 0)^{\perp} \cup (g \vee 0)^{\perp\perp} = (g \vee 0)^{\perp} + (g \vee 0)^{\perp\perp} == G$.

Обратно, пусть G – ортополная B-группа и $\big[G -$ линейно упорядоченная группа $\big] = 1_G$. Проверим, что G – проективная l-группа. Условие «быть проективной l-группой» записывается хорновой формулой, а именно $\forall g_1, g_2 \in G\ \exists h_1, h_2 \in G\ \forall h \in G\ \big((|h_1| \wedge |g_2| = 0) \wedge \wedge (|h| \wedge |g_2| = 0 \Rightarrow |h_2| \wedge |h| = 0) \wedge (g_1 = h_1 + h_2) \big)$. Обозначим эту формулу φ. Пусть $\psi \leftrightharpoons \forall g_1\ h\big((g \le h) \vee (g \ge h) \big)$, которая выражает свойство, что l-группа есть линейно упорядоченная группа. Заметим, что любая линейно упорядоченная группа является проективной l-группой. Тогда по теореме 2 $\left[\psi \Rightarrow \phi \right]_G = 1$. и по условию $\left[\psi \right]_G = 1$. Значит, $\left[\phi \right]_G = 1$. Из предложения 2 получаем $G \models \varphi$.

б) Пусть $G = \langle g \rangle + g^{\perp}$ и $\langle g \rangle \cap g^{\perp} = \{0\}$ для любого $g \in G$. Отсюда получим $g^{\perp\perp} = \langle g \rangle$ для любого $g \in G$, т.е. G – проективная l-группа. Следовательно, из предыдущего пункта имеем $\big[G$ – линейно упорядоченная группа $\big] = 1_G$. Условие «быть l-простой группой» имеет вид $\forall g \in G\ \big((g = 0) \vee \forall t \in G\ \exists n \in N\ \exists g_1, \ \ldots, \exists g_n \in G \big(|t| \le . \sum_{i=1}^{n} |-g_i + g + g_i| \big) \big)$. Вычислим оценку $\big[\forall g \in G \quad ((g = 0) \vee \forall t \in G \quad \exists n \in N \quad \exists g_1, \ldots, g_n \in G$ $(|t| \le \sum_{i=1}^{n} |-g_i + g + g_i|) \big] = \bigcap_{g \in G} ([g = 0] \cup (\bigcap_{t \in G} \bigcup_{n \in N} (\bigcup_{\langle g_1, \ldots, g_n \rangle \in G^n} (\big[|t| \le \quad \le \sum_{i=1}^{n} |-g_i + g + g_i| \big]))$. Пусть $g, t \in G$. Проверим, что $\bigcup_{n \in N} (\bigcup_{\langle g_1, \ldots, g_n \rangle \in G^n} \big[|t| \le$ $\bigcup_{n \in N} (\bigcup_{\langle g_1, \ldots, g_n \rangle \in G^n} |t| \le \sum_{i=1}^{n} |-g_i + g + g_i| \big]) \ge [g \ne 0] = \langle g \rangle$. Действительно, по условию $G = \langle g \rangle + g^{\perp}$ для любого $g \in G$. Поэтому существуют $t_1, t_2 \in G$ такие, что $|t| = t_1 + t_2$, где $t_1 \in \langle g \rangle$, $t_2 \in g^{\perp}$. Заметим $t_1 \wedge t_2 = 0$. Имеем $|t| = t_1 + t_2 \le |t_1| + |t_2| \le \sum_{i=1}^{m} |-g_i + g + g_i| + |t_2|$ для некоторых $g_1, \ \ldots, g_m \in G$. Отсюда получим $0 \le |t| - |t| \wedge \big(\sum_{i=1}^{m} |-g_i + g + g_i| \big) = = |t| + (-|t|) \vee - \big(\sum_{i=1}^{m} |-g_i + g + g_i| \big) = 0 \vee \big(|t| - \big(\sum_{i=1}^{m} |-g_i + g + g_i| \big) \big) \le 0 \vee |t_2| = |t_2| = t_2 \in \in g^{\perp}$. Следовательно, $\big(|t| - |t| \wedge \big(\sum_{i=1}^{m} |-g_i + g + g_i| \big) \big)^{\perp} \supseteq g^{\perp\perp} = \langle g \rangle$. Получим

$\bigcup_{n\in N}\ \bigcup_{\langle g_1,\ldots,g_n\rangle\in G^n} \llbracket |t|\le\sum_{i=1}^{n}|-g_i+g+g_i| \rrbracket \ge \left(|t|-|t|\wedge\left(\sum_{i=1}^{m}|-g_i+g+g_i|\right)\right)^{\perp}\ge\langle g\rangle$.

Обратно, свойство квазирегулярности записывается формулой $\forall g\ \forall h\ \exists g_1\ \exists n\ \exists h_1,\ \ldots,\ \exists h_n\ \left(\left(|g_2|\wedge|h|=0\right)\wedge\left(|g_1|\le\sum_{i=1}^{n}|-h_i+h+h_i|\right)\wedge\left(g=g_1+g_2\right)\right)$, где n – переменная по всем натуральным числам, и, строго говоря, вместо $h_1,\ \ldots,\ h_n$ нужно написать переменную h нового сорта, пробегающую не G, а множество всех конечных последовательностей из элементов G. По условию $\left[\forall g\ \forall t\ \exists n\ \exists g_1,\ldots,g_n\ ((g=0)\vee(|t|\le\sum_{i=1}^{n}|-g_i+g+g_i|))\right]=1_G$ и G – ортополная B-группа. Пусть $g,t\in G$. Обозначим $\overline{g}=\langle g_1,\ \ldots,\ g_n\rangle$ и дл. ($\overline{g}$) длину кортежа $\overline{g}$. Тогда $\left[\exists n\in N\right.$ $\exists\overline{g}$ ((дл. $\left(\overline{g}\right)=n)\wedge((g=0)\vee(|t|\le\sum_{i=1}^{n}|-g_i+g+g_i|)))]=1_G$. Согласно лемме 1 существует кортеж $\overline{g}$ длины n_0 из элементов G такой, что $\left[g=0\right]\vee\left[|t|\le\sum_{i=1}^{n}|-g_i+g+g_i|\right]=1_G.$ Пусть $\left[g=0\right]=N$ и $\left[|t|\le\sum_{i=1}^{n_0}|-g_i+g+g_i|\right]=N_i$. Тогда $N+N_1=G$. Отсюда из предложения 5 параграфа 1 имеем $N(g)=0$ и $N_1\left(|t|\right)\le\sum_{i=1}^{n_0}N_1\left(|-g_i+g+g_i|\right)$. Из $N+N_1=G$ имеем $N^{\perp}\subseteq N_1$. Следовательно, $N^{\perp}\left(|t|\right)\le\sum_{i=1}^{n_0}\left(-N^{\perp}(g_i)+N^{\perp}\left(|g|\right)+N^{\perp}(g_i)\right)$. По свойству главного l-идеала получим $N^{\perp}\left(|t|\right)\in\langle N^{\perp}(g)\rangle$. Значит, $N^{\perp}\left(|t|\right)\in\langle g\rangle$. Из $N(g)=0$ получим $g\in N^{\perp}$. Поэтому $N\subseteq g^{\perp}$. Отсюда имеем $N\left(|t|\right)\in g^{\perp}$. В силу разложения $|t|=N\left(|t|\right)+\ +N^{\perp}\left(|t|\right)$ имеем $|t|\in g^{\perp}+\langle g\rangle$. Значит, $G=g^{\perp}+\langle g\rangle$. Из предыдущего пункта а) имеем $G=g^{\perp}+g^{\perp\perp}$. Отсюда следует, что $g^{\perp\perp}$ является l-идеалом и по свойству поляр имеем $\langle g\rangle\subseteq g^{\perp\perp}$. Значит, $\langle g\rangle\cap g^{\perp}=\{0\}$, так как $g^{\perp}\cap g^{\perp\perp}=\{0\}$.

Поскольку все известные теоремы о линейно упорядоченных группах могут быть доказаны в ZFC, то их булевы оценки равны 1_B. Данное обстоятельство позволяет в силу теоремы 2 переносить некоторые результаты о линейно упорядоченных группах на ортополные проективные l-группы. Здесь приведем лишь простейшее следствие.

Следствие. Хорновы теории в языке l-групп следующих пар классов l-групп совпадают:

а) ортополных проективных l-групп и линейно упорядоченных групп;

б) ортополных квазирегулярных l-групп и линейно упорядоченных l-простых групп.

Заключение

Все сказанное без изменений переносится на случай, если язык l-групп расширить новыми предикатными и функциональными символами.

Литература

1. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Булевозначный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С.Л. Соболева, 2003. 386 с.
2. Любецкий В.А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа / УМН. 1989. Т. 44. Вып.4.
3. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990. 344 с.
4. Антонов В.И. Связь канонического пучка с пучком Каймела на стоуновом пространстве булевой алгебры прямых факторов решеточно упорядоченного кольца // Вестник БГУ. Математика и информатика. 2008. Вып.9. С. 102–105.
5. Антонов В.И. Булевозначные оценки в канонических пучках, представляющих ортогональные B-кольца. М., 1989. Деп. В.ВИНИТИ, №790-В89.

Антонов Вячеслав Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой алгебры Бурятского государственного университета. 670000. г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а. E-mail: antonov_vi_52@mail.ru

Antonov Vyacheslav Iosifovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, head of department of algebra, Buryat State University.670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24a.

УДК 519.71

© С.А. Бадмаев, И.К. Шаранхаев

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ БЕСПОВТОРНЫМИ ФОРМУЛАМИ В ОДНОМ БАЗИСЕ

Изучается реализация булевых функций в классе формул. Доказано необходимое и достаточное условие выразимости булевых функций бесповторными формулами в специальном базисе.

Ключевые слова: *булева функция, бесповторная функция, базис, формула.*

S.A. Badmaev, I.K. Sharankhaev

ON REPRESENTATION OF BOOLEAN FUNCTIONS BY REPETITION-FREE FORMULAS IN THE SAME BASIS

The realization of Boolean functions in the class of formulas is studied. The necessary and sufficient condition of Boolean functions representation has been proved by repetition-free formulas in special basis.

Keywords: *Boolean function, repetition-free function, basis, formula.*

Введение

Настоящая работа посвящена нахождению условия, равносильного бесповторности булевых функций в одном базисе.

Под *базисом* понимаем конечное полное множество булевых функций, содержащее константы.

Формула Φ над базисом *B* называется *бесповторной*, если каждая переменная входит в нее не более одного раза.

Функция *f* называется *бесповторной* в базисе *B*, если существует бесповторная формула Φ над *B*, представляющая функцию *f*. В противном случае *f* называется *повторной* в *B*.

Функция, получаемая из $f(x_1,...,x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ, называется *остаточной* и обозначается $f_{x_i}^{\sigma}$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Назовем переменную x_i функции *f* *фиктивной*, если $f_{x_i}^0 = f_{x_i}^1$, и *существенной* в противном случае. Множество всех существенных переменных функции *f* обозначим через $\rho(f)$, а множество всех фиктивных переменных функции *f* через $\delta(f)$.

Функция *f* называется *слабоповторной* в базисе *B*, если любая остаточная функция от функции *f* является бесповторной, а сама *f* повторна в базисе *B*. Через S_B обозначим множество всех слабоповторных функций в базисе B.

Базис B_0={$\vee$, $\cdot$, $-$, 0, 1} называется элементарным, а базис $B_0 \cup \{f\}$, где f слабоповторна в B_0, называется предэлементарным.

Описание всех предэлементарных базисов следует из [2]. В работе [3] введены следующие обозначения для таких базисов:

$$B_n = B_0 \cup \{g_n\},\ n=2,3,4,$$

где

$$g_2 = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3,$$
$$g_3 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3,$$
$$g_4 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2\overline{x}_3.$$

В работах [4-8] описаны условия, равносильные бесповторности булевых функций для бинарных базисов B_0 и B_1={$\vee$, $\cdot$, $-$, 0, 1, $\oplus$}, а для B_2, B_3, B_4 в работе [3]. В данной статье получены необходимые и достаточные условия бесповторности булевых функций в базисе $\overline{B}_3$={$\vee$, $\cdot$, $-$, 0, 1, g_1, g_2, g_3}.

Будем говорить, что функции f и g *связаны отношением* $\prec$, и писать $f \prec g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется $f(\tilde{\sigma}) \leq g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется *обобщенно монотонной по переменной* x, если выполняется либо $f_x^0 \prec f_x^1$, либо $f_x^0 \succ f_x^1$. Для краткости записи обобщенную монотонность функции f по переменной x будем обозначать так: $f \in M_x$.

Функции f и g называются *обобщенно однотипными*, если

$$f(x_1,...,x_n) = g^{\sigma}(x_{i_1}^{\sigma_1},...,x_{i_n}^{\sigma_n}),$$

где $(i_1,...,i_n)$ – некоторая перестановка чисел от 1 до n. Очевидно, что на множестве всех булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Производной функции $f(x_1,...,x_n)$ по переменной x_i называется функция

$$f_{x_i}^{/} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}^0 \oplus f_{x_i}^1.$$

Понятие производной функции по переменной распространяется индуктивно на множество переменных следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_s}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_{s-1}}}\right)}{\partial x_{i_s}}.$$

Функция называется *нечетной*, если число наборов, на которых функция равна 1, является нечетным, и *четной* в противном случае.

Множество булевых функций P, содержащее тождественную функцию, называется *наследственным*, если для любой функции $f \in P$ любая остаточная функция $f_x^\sigma \in P$.

Множество булевых функций P называется *инвариантным*, если для любых функций $f(\tilde{u}, y)$, $g(\tilde{v}) \in P$, где $\tilde{u} \cap \tilde{v} = \varnothing$, справедливо включение $f(\tilde{u}, g(\tilde{v})) \in P$.

Все неопределяемые понятия можно найти, например, в [1].

1. Вспомогательные утверждения

Предложение 1 [8]. Множество булевых функций P является наследственным и инвариантным тогда и только тогда, когда P есть множество всех бесповторных функций над некоторым базисом B.

Следствие 1. Если для наследственного и инвариантного множества булевых функций P и базиса B верно, что $B \subseteq P$ и $S_B \cap P = \varnothing$, то $P_B = P$.

Таким образом, для доказательства того, что некоторое множество булевых функций P совпадает с множеством всех бесповторных функций над некоторым базисом B, достаточно показать, что P обладает свойствами наследственности и инвариантности, и проверить, что все слабоповторные в B функции не входят в P.

Предложение 2 [9]. Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению к обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_2:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4);$$
$$x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2\ldots x_k,\ k \geq 3;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3\ldots x_k) \vee x_2\overline{x}_3\ldots\overline{x}_k,\ k \geq 3;$$
$$x_1\ldots x_k \vee \overline{x}_1\ldots\overline{x}_k,\ k \geq 2,\ k \neq 3;$$
$$\overline{x}_1 g_2(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2x_3x_4;$$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2\,\overline{g}_2(x_3,x_4,x_5) \vee x_1x_2x_3x_4x_5;$$
$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\, g_2(x_4,x_5,x_6) \vee x_1x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Предложение 3 [9]. Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению к обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_3:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4);$$

$$x_1(x_2 \vee ... \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k,\ k>3;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2 \overline{x}_3 \ldots \overline{x}_k,\ k \geq 3;$$
$$x_1 \ldots x_k \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_k,\ k \geq 2;$$
$$\overline{x}_1 g_3(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2x_3x_4;$$
$$\overline{x}_1 g_3(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4);$$
$$\overline{x}_1 g_3(x_2, x_3,x_4) \vee x_1x_2;$$
$$\overline{x}_1 x_2g_3(x_3,x_4,x_5) \vee x_1((x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_5).$$

Предложение 4 [10]. Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению к обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_4:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5 (x_3 \vee x_2x_4);$$
$$x_1(x_2 \vee ... \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k,\ k \geq 3;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2 \overline{x}_3 \ldots \overline{x}_k,\ k >3;$$
$$x_1 \ldots x_k \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_k,\ k \geq 2;$$
$$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1g_4(\overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4);$$
$$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2 \overline{x}_3x_4;$$
$$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4);$$
$$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2x_3.$$

Предложение 5. Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению к обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в базисе $\overline{B}_3$:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5 (x_3 \vee x_2x_4);$$
$$x_1(x_2 \vee ... \vee x_k) \vee x_2 \ldots x_k,\ k>3;$$
$$x_1(x_2 \vee x_3 \ldots x_k) \vee x_2 \overline{x}_3 \ldots \overline{x}_k,\ k>3;$$
$$x_1 \ldots x_k \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_k,\ k \geq 2,\ k \neq 3;$$
$$\overline{x}_1 g_2(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2x_3x_4;$$
$$\overline{x}_1 \overline{x}_2\ \overline{g}_2 (x_3,x_4,x_5) \vee x_1x_2x_3x_4x_5;$$
$$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 g_2(x_4,x_5,x_6) \vee x_1x_2x_3x_4x_5x_6;$$
$$\overline{x}_1 g_3(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2x_3x_4;$$
$$\overline{x}_1 g_3(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4);$$
$$\overline{x}_1 g_3(x_2, x_3,x_4) \vee x_1x_2;$$

$\overline{x}_1 x_2 g_3(x_3,x_4,x_5) \vee x_1((x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_5)$;

$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1 g_4(\overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$;

$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$;

$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4)$;

$\overline{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1 x_2 x_3$.

Доказательство. Непосредственно следует из предложений 1, 2 и 3.

2. Основная теорема

В этом разделе доказано необходимое и достаточное условие бесповторности булевых функций в базисе $\overline{B}_3$.

Функцию f будем называть *b-функцией*, если либо rank $f < 2$, либо для любой переменной $x \in \rho(f)$ выполняется одно из условий:

1. $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) = \delta(f_x^1)$;

2. $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) = \delta(f_x^0)$;

3. $\delta(f) = \delta(f_x^0) = \delta(f_x^1)$ и найдется переменная $y \in \rho(f)$ такая, что справедливо строгое включение $\delta(f_x^/) \subset \delta((f_x^/)_y^/)$;

4. $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$, $f \notin M_x$, и существует переменная $y \in \rho(f)$ такая, что справедливо строгое включение $\delta(f_x^/) \subset \delta((f_x^/)_y^/)$;

5. $\delta(f) \subset \delta(f_x^/)$, причем это строгое включение не выполняется для всех существенных переменных функции f одновременно.

Функцию f будем называть *наследственной b-функцией*, если сама функция и все ее остаточные функции являются *b-функциями*.

Теорема. Булева функция f бесповторна в базисе $\overline{B}_3$, тогда и только тогда, когда она является наследственной b-функцией.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом, основанным на предложении 1.

Обозначим через P множество всех наследственных b-функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u},\tilde{v}) = g(\tilde{u},h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u},y)$, $h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \varnothing$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h, поэтому является наследственной b-функцией. Далее считаем, что $\tilde{u} \neq \varnothing$ или $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если выполняется одно из строгих включений $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ или $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$, то, соответственно, либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Рассмотрим $f_x^/ = g_y^/(\widetilde{u}, y)h_x^/(\widetilde{v})$. Ясно, что существует переменная $z \in \widetilde{v}$ такая, что $\delta(h_x^/) \subset \delta((h_x^/)^/{}_z)$. Так как $(f_x^/)^/{}_z = g_y^/(\widetilde{u}, y)(h_x^/)^/{}_z(\widetilde{v})$, легко заметить, что $\delta(f_x^/) \subset \delta((f_x^/)^/{}_z)$.

Пусть $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$, $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$. Докажем, что $f \notin M_x$. В силу того, что $h \notin M_x$, найдутся наборы $\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ такие, что $|\widetilde{\tau}_i| = |\widetilde{\gamma}_i|$ для любого i выполняются соотношения:

$$0 = h(\widetilde{\tau}_1, 0, \widetilde{\tau}_2) < h(\widetilde{\tau}_1, 1, \widetilde{\tau}_2) = 1,\ 1 = h(\widetilde{\gamma}_1, 0, \widetilde{\gamma}_2) > h(\widetilde{\gamma}_1, 1, \widetilde{\gamma}_2) = 0.$$

Переменная $y \in \rho(g)$, следовательно, найдется набор $\widetilde{\sigma}$ такой, что $g(\widetilde{\sigma}, 0) \neq g(\widetilde{\sigma}, 1)$. Пусть для определенности $g(\widetilde{\sigma}, 0) < g(\widetilde{\sigma}, 1)$. Заменив константы, получаем, что

$$g(\widetilde{\sigma}, h(\widetilde{\tau}_1, 0, \widetilde{\tau}_2)) < g(\widetilde{\sigma}, h(\widetilde{\tau}_1, 1, \widetilde{\tau}_2)),$$
$$g(\widetilde{\sigma}, h(\widetilde{\gamma}_1, 0, \widetilde{\gamma}_2)) > g(\widetilde{\sigma}, h(\widetilde{\gamma}_1, 1, \widetilde{\gamma}_2)).$$

Отсюда следует, что $f \notin M_x$.

Пусть $\delta(h) \subset \delta(h_x^/)$. Так как справедливо равенство $f_x^/ = g_y^/(\widetilde{u}, y)h_x^/(\widetilde{v})$, выполняется строгое включение $\delta(f) \subset \delta(f_x^/)$.

2. Пусть $x \in \widetilde{u}$. В случае выполнения одного из строгих включений $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ или $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$ справедливо ровно одно из строгих включений $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$ или $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Рассмотрим $f_x^/ = g_x^/(\widetilde{u}, h(\widetilde{v}))$. Если для функции $g_x^/(\widetilde{u}, y)$ существует переменная z, отличная от y, такая, что $\delta(g_x^/) \subset \delta((g_x^/)^/{}_z)$, тогда справедливо строгое включение $\delta(f_x^/) \subset \delta((f_x^/)^/{}_z)$. В противном случае выберем произвольным образом переменную $z_1 \in \widetilde{v}$ и рассмотрим $(f_x^/)^/{}_{z_1} = (g_x^/)^/{}_y(\widetilde{u}, y)h_{z_1}^/(\widetilde{v})$. Из справедливости строгого включения $\delta(g_x^/) \subset \delta((g_x^/)^/{}_y)$ следует справедливость строгого включения $\delta(f_x^/) \subset \delta((f_x^/)^/{}_{z_1})$.

Пусть $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$, $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$. Доказательство того, что $f \notin M_x$ аналогично доказательству в случае $x \in \widetilde{v}$.

Пусть $\delta(g) \subset \delta(g_x^/)$. Ясно, что $\delta(f) \subset \delta(f_x^/)$.

Очевидно, что условие 5 из определения b-функции не выполняется для всех переменных функции f одновременно. Таким образом, инвариантность P доказана.

Теперь для наследственного инвариантного множества P найдем порождающий его базис. Очевидно, что $\overline{B}_3 \subseteq P$. Проверим, что все слабоповторные функции в базисе $\overline{B}_3$ не принадлежат P. Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 5, так как если свойство быть b-функцией не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

$$f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4. \tag{1}$$

Тогда $f_{x_1}^{0} = x_3x_4$, $f_{x_1}^{1} = x_2 \vee x_3$, $f_{x_1}^{/} = x_2(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee x_3\overline{x}_4$.

Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную, существенную в f, $f_{x_1}^{/}$ существенна и $f \in M_x$, поэтому $f \notin P$.

$$f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4). \tag{2}$$

Тогда $f_{x_4}^{0} = x_1x_2 \vee x_3x_5$, $f_{x_4}^{1} = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3)$, $f_{x_4}^{/} = x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_5 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_5$.

Легко заметить, что $f_{x_4}^{0}, f_{x_4}^{1}, f_{x_4}^{/}$, а также производная функции $f_{x_4}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = x_1(x_2 \vee \ldots \vee x_k) \vee x_2\ldots x_k, \text{ где } k>3. \tag{3}$$

Тогда $f_{x_1}^{0} = x_2\ldots x_k$, $f_{x_1}^{1} = x_2 \vee \ldots \vee x_k$, $f_{x_1}^{/} = \overline{x_2\ldots x_k \vee \overline{x}_2\ldots\overline{x}_k}$.

Функции $f_{x_1}^{0}, f_{x_1}^{1}, f_{x_1}^{/}$ и производная функции $f_{x_1}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = x_1(x_2 \vee x_3\ldots x_k) \vee x_2\overline{x}_3\ldots\overline{x}_k, \text{ где } k>3. \tag{4}$$

Тогда $f_{x_3}^{0} = x_2(x_1 \vee \overline{x}_4\ldots\overline{x}_k)$, $f_{x_3}^{1} = x_1(x_2 \vee x_4\ldots x_k)$, $f_{x_3}^{/} = \overline{x}_1x_2\overline{x}_4\ldots\overline{x}_k \vee x_1\overline{x}_2x_4\ldots x_k$.

Функции $f_{x_3}^{0}, f_{x_3}^{1}, f_{x_3}^{/}$ и производная функции $f_{x_3}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = x_1\ldots x_k \vee \overline{x}_1\ldots\overline{x}_k, \text{ где } k \geq 2. \tag{5}$$

При $k = 2$ $f_{x_1}^{0} = \overline{x}_2$, $f_{x_1}^{1} = x_2$, $f_{x_1}^{/} = 1$, $f_{x_2}^{0} = \overline{x}_1$, $f_{x_2}^{1} = x_1$, $f_{x_2}^{/} = 1$.

Для любой переменной остаточные функции существенны, а производные не существенны, поэтому $f \notin P$. При $k > 3$ справедливы равенства

$$f_{x_1}^{0} = \overline{x}_2\ldots\overline{x}_k,\ f_{x_1}^{1} = x_2\ldots x_k,\ f_{x_1}^{/} = x_2\ldots x_k \vee \overline{x}_2\ldots\overline{x}_k.$$

Функции $f_{x_1}^{0}, f_{x_1}^{1}, f_{x_1}^{/}$ и производная функции $f_{x_1}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = \overline{x}_1g_2(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3x_4. \tag{6}$$

Тогда $f_{x_1}^{0} = g_2(x_2, x_3, x_4)$, $f_{x_1}^{1} = x_2x_3x_4$, $f_{x_1}^{/} = \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$.

Функции $f_{x_1}^{0}, f_{x_1}^{1}, f_{x_1}^{/}$ и производная функции $f_{x_1}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{g}_2(x_3, x_4, x_5) \vee x_1x_2x_3x_4x_5. \tag{7}$$

Справедливы равенства

$$f_{x_3}^0 = \bar{x}_1\bar{x}_2(x_4 \vee x_5),\ \ f_{x_3}^1 = \bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \vee x_1x_2x_4x_5,$$

$$f_{x_3}^{/} = x_1x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5.$$

Остаточные функции $f_{x_3}^0$ и $f_{x_3}^1$ существенны. В силу того, что представление $f_{x_3}^{/}$ является совершенной дизъюнктивной нормальной формой, нетрудно видеть, что функция $f_{x_3}^{/}$ нечетна, то есть существенна. Очевидно, что производная нечетной функции по любой переменной есть нечетная функция, поэтому $f \notin P$.

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\, g_2(x_4,x_5,x_6) \vee x_1x_2x_3x_4x_5x_6. \tag{8}$$

Тогда $f_{x_1}^0 = \bar{x}_2\bar{x}_3g_2(x_4,x_5,x_6),\ \ f_{x_1}^1 = x_2x_3x_4x_5x_6,$

$f_{x_1}^{/} = x_2x_3x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6.$

Ситуация аналогична предыдущему случаю.

$$f = \bar{x}_1\, g_3(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2x_3x_4. \tag{9}$$

Тогда $f_{x_1}^0 = g_3(x_2,x_3,x_4),\ \ f_{x_1}^1 = x_2x_3x_4,\ \ f_{x_1}^{/} = x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4.$

Функции $f_{x_1}^0, f_{x_1}^1, f_{x_1}^{/}$ и производная функции $f_{x_1}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = \bar{x}_1\, g_3(x_2,x_3,x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4). \tag{10}$$

Тогда $f_{x_1}^0 = g_3(x_2,x_3,x_4),\ \ f_{x_1}^1 = x_2(x_3 \vee x_4),\ \ f_{x_1}^{/} = \bar{x}_2x_3x_4.$

Функции $f_{x_1}^0, f_{x_1}^1, f_{x_1}^{/}$ и производная функции $f_{x_1}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = \bar{x}_1\, g_3(x_2, x_3,x_4) \vee x_1x_2. \tag{11}$$

Тогда $f_{x_3}^0 = x_2(\bar{x}_1x_4 \vee x_1),\ \ f_{x_3}^1 = \bar{x}_1x_4 \vee x_2,\ \ f_{x_3}^{/} = \bar{x}_1\bar{x}_2x_4.$

Функции $f_{x_3}^0, f_{x_3}^1, f_{x_3}^{/}$ и производная функции $f_{x_3}^{/}$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = \bar{x}_1x_2g_3(x_3,x_4,x_5) \vee x_1((x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_5). \tag{12}$$

В этом случае

$$f_{x_2}^0 = x_1(x_3x_4 \vee x_5),\ f_{x_2}^1 = g_3(x_5, x_1 \vee x_3, x_4),$$

$$f_{x_2}^{/} = \bar{x}_1x_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4x_5 \vee x_1\bar{x}_3x_4\bar{x}_5.$$

Ситуация аналогична (11).

$$f = \bar{x}_1\, g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1g_4(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4). \tag{13}$$

Тогда

$$f_{x_1}^0 = g_4(x_2,x_3,x_4),\ f_{x_1}^1 = g_4(\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4),\ f_{x_1}^{/} = x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,$$

$$f_{x_2}^0 = g_4(x_1,\bar{x}_4,\bar{x}_3),\ f_{x_2}^1 = g_4(\bar{x}_1,x_4,x_3),\ f_{x_2}^/ = x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_4,$$

$$f_{x_3}^0 = g_4(x_1,x_4,\bar{x}_2),\ f_{x_3}^1 = g_4(\bar{x}_1,\bar{x}_4,x_2),\ f_{x_3}^/ = x_1 x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4,$$

$$f_{x_4}^0 = g_4(\bar{x}_2,x_3,x_1),\ f_{x_4}^1 = g_4(x_2,\bar{x}_3,\bar{x}_1),\ f_{x_4}^/ = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3.$$

Легко увидеть, что по любой переменной остаточные функции существенны, а производные не существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = \bar{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4\,. \tag{14}$$

Тогда $f_{x_1}^0 = g_4(x_2,x_3,x_4),\ \ f_{x_1}^1 = x_2\bar{x}_3 x_4,\ \ f_{x_1}^/ = x_3(x_2 \vee \bar{x}_4).$

Нетрудно заметить, что функции $f_{x_1}^0, f_{x_1}^1, f_{x_1}^/$ и производная функции $f_{x_1}^/$ по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

$$f = \bar{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4). \tag{15}$$

Тогда $f_{x_1}^0 = g_4(x_2,x_3,x_4),\ \ f_{x_1}^1 = x_2(x_3 \vee x_4),\ \ f_{x_1}^/ = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4.$

Ситуация аналогична предыдущему случаю.

$$f = \bar{x}_1 g_4(x_2,x_3,x_4) \vee x_1 x_2 x_3. \tag{16}$$

В этом случае $f_{x_1}^0 = g_4(x_2,x_3,x_4),\ f_{x_1}^1 = x_2 x_3,\ f_{x_1}^/ = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4.$

Функция f не принадлежит множеству P, так как функции $f_{x_1}^0, f_{x_1}^1, f_{x_1}^/$ и производная функции $f_{x_1}^/$ по любой переменной существенны.

Таким образом, $S_{\overline{B}_3} \cap P = \varnothing,\ \ \overline{B}_3 \subseteq P.$

Теорема доказана.

В данной работе получено описание класса булевых функций, представимых бесповторными формулами в базисе, эквивалентом (в смысле сложности представления функций формулами) базису, содержащему все функции от трех переменных за исключением линейных функций ранга 2 и 3.

Литература

1. Перязев Н.А. Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 1999. 112 с.
2. Стеценко В.А. О предплохих базисах в P_2 // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1992. Вып.4. С. 139–177.
3. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3 // Дискретная математика. 2005. Т. 17, Вып.2. С. 127–138.
4. Субботовская Б. А. О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, №4. С. 784–787.
5. Гурвич В. А. Критерии бесповторности функций алгебры логики // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, №3. С. 532–537.
6. Перязев Н. А. Реализация булевых функций бесповторными формулами в некоторых базисах // Сб. Алгебра, логика и приложения. Иркутск, 1994. С. 143–154.

7. Перязев Н. А. Реализация булевых функций бесповторными формулами // Дискретная математика. 1995. Т. 7, №3. С. 61–68.
8. Кириченко К. Д. О критериях бесповторности булевых функций в различных базисах // Оптимизация, управление, интеллект. Иркутск, 2000. Вып. 4. С. 93–101.
9. Кириченко К. Д. Слабоповторные булевые функции в некоторых предэлементарных базисах // Иркутский университет. Сер.: Дискретная математика и информатика. Иркутск, 2000. Вып. 13. 60 с.
10. Шаранхаев И.К. Слабоповторные булевые функции в некоторых базисах // Иркутский университет. Сер.: Дискретная математика и информатика. Иркутск, 2003. Вып. 17. 64 с.

Шаранхаев Иван Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры Бурятского государственного университета, E-mail: goran5@mail.ru

Бадмаев Сергей Александрович, студент Института математики и информатики Бурятского государственного университета, E-mail: badmaevsa@mail.ru

Sharankhaev Ivan Konstantinovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of algebra, Buryat State University.

Badmaev Sergey Alexandrovich, student, Institute of Mathematics and Information, Buryat State University.

V. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.523

© **Б.Д. Цыдыпов**

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕРМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ

В работе представлены результаты решения нелинейной тепловой задачи для осесимметричного катодного узла генераторов низкотемпературной плазмы.

Ключевые слова: *оптимизационная задача, тепловой поток, энергообмен, генератор, низкотемпературная плазма.*

B.D. Tsydypov

NONLINEAR THERMAL PROBLEM FOR THE SYSTEM OF CONJUGATE ELEMENTS. RESULTS OF SOLUTION

The article presents the results of solution of a nonlinear thermal problem for an axis-symmetrical cathode assembly in low-temperature plasma generators.

Keywords: *optimization problem, heat flux, energy exchange, generator, low-temperature plasma.*

Введение

В работе [1] приведена математическая постановка задачи о теплофизическом состоянии составных катодных узлов сильноточных плазменных систем (рис. 1).

Удельный тепловой поток из плазмы q_0 и его эффективный радиус r_0 определяются из эксперимента или же из совместного решения замкнутой системы уравнений катодных и прикатодных процессов [2].

Температурное поле в осесимметричном катодном узле находится совместным решением уравнения нестационарной теплопроводности

$$c_k \rho_k \frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda_k(T)\frac{\partial T_k}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_k(T)\frac{\partial T_k}{\partial z}\right] + j_k^2 / \sigma_k(T) \quad (1)$$

и нелинейного уравнения непрерывности тока

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sigma_k(T)\frac{\partial U_k}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma_k(T)\frac{\partial U_k}{\partial z}\right]=0 \qquad (2)$$

для вставки (k = 1) и обоймы (k = 2).

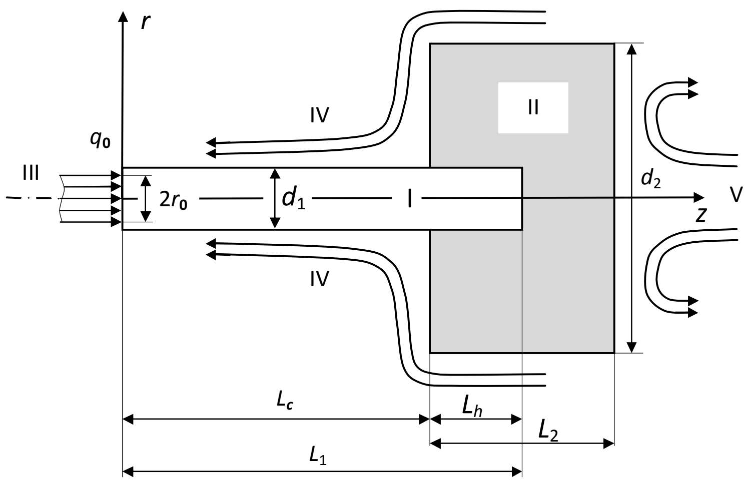

Рис. 1. Схема составного катодного узла плазменных устройств.
I – катод (вставка), II – корпус узла (обойма), III – плазма разряда,
IV – плазмообразующий газ, V – теплоотвод (жидкость)

Для решения уравнений применялся метод конечных разностей [3]. Сформулированная разностная задача решалась методом установления. При прогонке по локально-одномерной схеме вся область интегрирования I – II разбивалась на несколько простых областей и смежные области «сшивались» едиными граничными условиями [4]. Составленный численный алгоритм позволяет рассчитать стационарные температурные поля $T_{1,2}(r, z)$ во всей электродной системе «вставка – обойма».

Результаты решения и обсуждение

Рассмотрим температурное поле в составном осесимметричном катодном узле (рис. 1), состоящем из системы лантанированный вольфрам (I) – медь (II): L_h =1 см, L_2 = 1,5 см, радиусы катода и обоймы соответственно R_1 = 0,5 см и R_2 = 1,5 см, давление аргона p = 1,01 · 10^5 Па, рабочий ток I = 600 А, кондуктивный тепловой поток Q_T = 2050 Вт [5].

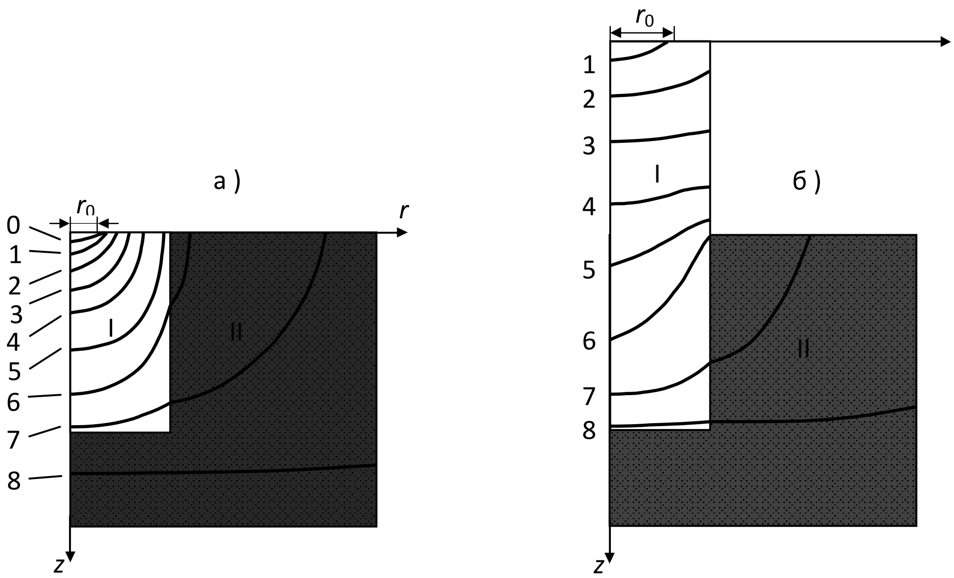

Рис. 2. Температурное поле в катодном узле. 0 – 8 – изотермы 3400, 2900, 2500, 1900, 1300, 950, 700, 400, 350 K соответственно. а) L_c= 0, r_0 = 0,15 см б) L_c= 1 см, r_0 = 0,31см

На рисунке 2 представлены изотермы в симметричной половине осевого сечения катодного узла при L_c = 0 и L_c = 1 см. Уровень температур в катоде, запрессованном заподлицо с обоймой (рис. 2а), значительно выше, чем в катоде с вылетом (рис. 2б), так как вследствие интенсивного охлаждения происходит контрагирование привязки дугового разряда. При этом существенно возрастают плотности теплового потока и тока, что приводит к резкому увеличению уровня и градиента температуры в опорном пятне и его окрестности. Анализ изотерм катодного узла показал, что тепловой поток, поступающий в электрод, большей частью отводится через боковую поверхность, контактирующую с обоймой. Увеличение диаметра обоймы d_2 значительно снижает уровень всего поля температур вставки, за исключением температуры в пятне. Увеличение же длины обоймы L_2 при L_h = const ведет к росту интегральной температуры катода, особенно на поверхности контакта двух металлов. Кроме геометрии корпуса обоймы, на тепловой режим катодного узла оказывает сильное влияние диаметр самой вставки d_1. Показано, что варьированием геометрических размеров, прежде всего отношением d_1 / d_2, можно найти оптимальный температурный режим электрода.

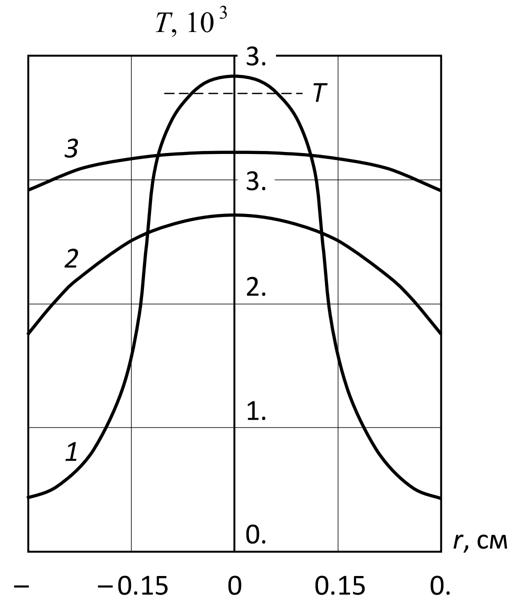

Рис. 3. Зависимость температуры рабочего торца от длины вылета катода.
R_1 = 0,3 см, I = 400 А, 1 – L_c = 0,2 см, 2 – L_c = 1,2 см, 3 – L_c = 6 см

Кривые, представленные на рисунке 3, наглядно иллюстрируют термическое состояние рабочей поверхности электрода в зависимости от длины вылета L_c. Увеличение L_c в пределах 0-6 см приводит к нелинейному изменению температуры горячего торца. Температура в пятне сначала уменьшается от 3 659 К (L_c= 0) до ~ 2700 К, затем, начиная с $L_c \geq 2$ см, плавно повышается до 3 164 К (L_c = 6 см). Одновременно с этим уровень температур в других точках торца монотонно возрастает. Это приводит, как и в случае увеличения токовой нагрузки, к выравниванию температурного профиля торца и увеличению среднего уровня температуры катода. Как уже отмечалось, такой характер изменения профиля температуры связан с действием джоулева тепловыделения в объеме вставки. При малых значениях L_c его вклад в энергобаланс катода не значителен, но с увеличением длины вставки доля объемного источника тепла возрастает. По характеру распределения изотерм можно предположить, что тепловой поток, поступающий в электрод, большей частью отводится через боковую поверхность вставки. Этот вывод подтверждается результатами расчетов. Увеличение диаметра медной обоймы d_2 значительно снижает уровень всего поля температур вставки, за исключением температуры в пятне. Увеличение длины обоймы L_2 при L_h = const ведет к росту уровня температурного поля катода, особенно на поверхностях контакта двух металлов. Это сопровождается большим нагревом меди, что может привести к прогоранию конструкции.

Представляет большой интерес изучение влияния джоулева источника тепла и радиационного излучения с поверхности электрода на термическое состояние катодного узла. Расчет проведен для составного катодного узла со следующими геометрическими размерами и тепло-и электрофизическими свойствами:

$L_1 = 3$ см, $L_h = 1$ см, $L_c = 2$ см, $R_1 = 0{,}25$ см, $L_2 = 1{,}5$ см, $R_2 = 1{,}5$ см;

$\lambda_1 = 118$ Вт/м·К; $\lambda_2 = 352$ Вт/м·К; $c_1 = 130$ Дж/кг·К;

$c_2 = 380$ Дж/кг·К; $\varepsilon_1 = 0{,}3$; $\alpha_g = 370$ Вт/м^2·К; $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/м^2·К^4.

Плотности материалов электрода и обоймы равны соответственно: $1{,}9\cdot10^4$ кг·м$^{-3}$ и $8{,}93\cdot10^3$ кг·м$^{-3}$. Данные остальных параметров в численных расчетах учитывались в виде их температурных зависимостей [6]. Дуговой разряд горит в атмосфере аргона при $p = 10^5$ Па и токовой нагрузке $I =$ 300 А, интегральный тепловой поток $Q = 340$ Вт [7].

Графики на рисунке 4 наглядно иллюстрируют роль объемного источника и нелинейных граничных условий на цилиндрической и рабочей поверхностях электрода в тепловой задаче. Осевые распределения температуры позволяют выявить вклад этих составляющих (при различном их сочетании) в энергообмен термоэмиссионного катода. Они получены варьированием тепло- и электрофизических коэффициентов в уравнениях и граничных условиях задачи. Температурное поле, рассчитанное с учетом джоулева тепловыделения и теплообмена путем конвекции и излучения (в уравнениях (1), (2) и соответствующих граничных условиях задачи [4] удельное сопротивление $\rho_1 \neq 0$, степень черноты $\varepsilon_1 \neq 0$ и коэффициент теплоотдачи газу $\alpha_g \neq 0$), согласуется с экспериментальным распределением $T_1(R_1, z)$ [7–9] (кривая *1*), что свидетельствует о правильной постановке задачи. При упрощенной постановке задачи без учета всех рассматриваемых составляющих энергобаланса катода ($\rho_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_g = 0$) появляются значительные погрешности в определении термического режима катода (кривая *2*). Температура горячего торца в этих вариантах различается на 716 К. Однако учет по отдельности только объемного источника тепла ($\rho_1 \neq 0$, $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_g = 0$; кривая *3*), или же конвективного и лучистого теплообменов с поверхности электрода ($\rho_1 = 0$, $\varepsilon_1 \neq 0$, $\alpha_g \neq 0$; кривая *4*), приводит к еще большим ошибкам в расчете температурного поля. Например, разность максимальной температуры $T_1(0, 0)$ на кривых *1* и *3* достигает 1 704 К. Графики *3* и *4* отражают противоположный характер влияния джоулева нагрева в объеме и комбинированного теплообмена с боковой поверхности на тепловое состояние термоэмиссионного катода. Установлено, что роль этих тепловых процессов в энергобалансе зависит от геометрии электрода и величины разрядного тока. Вклад теплообмена на границах для рассматриваемой геометрии катодного узла при токовой нагрузке $I < 300$ А и плотности тока $j < 1.5\cdot10^3$ А/см^2 заметно больше влияния джоулева тепловыделения. С увеличением тока доля последнего фактора в энергобалансе катода повышается, и при $I > 500$ А джоулево тепловыделение существенно превышает конвективную и лучистую составляющие теплоотдачи с поверхности.

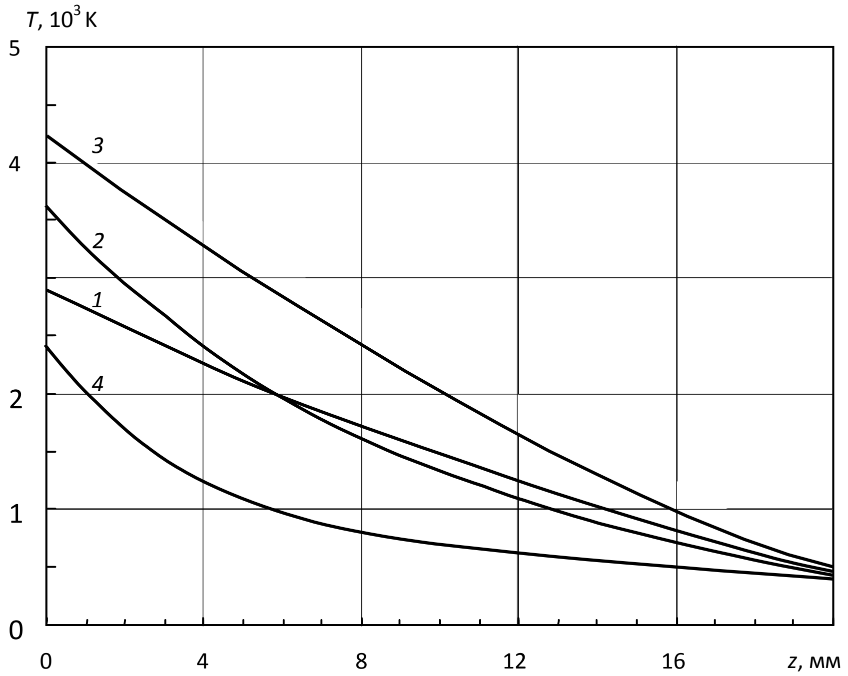

Рис. 4. Осевые распределения температур катода

Заключение

Исследовано влияние геометрических размеров и условия теплообмена катодного узла, параметров дугового разряда на тепловое состояние термоэмиссионных катодов. Установлено, что основными факторами, определяющими уровень и характер распределения температурного поля в электродном узле, являются джоулев нагрев и геометрические размеры составных элементов конструкции. Показано, что варьированием геометрией и токовой нагрузкой катодного узла можно найти его оптимальный тепловой режим. Результаты проведенных расчетов находятся в согласии с экспериментальными данными, что свидетельствует о корректности постановки и решения задачи.

Литература

1. Цыдыпов Б.Д., Баргуев С.Г. Постановка нелинейной термической задачи для системы сопряженных элементов // Вестник БГУ. 2010. Вып. 9. С. 189–193.
2. Цыдыпов Б.Д. Катодные и прикатодные процессы сильноточных плазменных систем. Saarbrucken: Lambert Academics Publishing, 2012. 272 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
4. Цыдыпов Б.Д. Нелинейная термическая задача для системы сопряженных элементов. Метод решения // Вестник БГУ. 2011. Вып. 9. С. 280–284.
5. Экспериментальное исследование динамики процессов на активированных катодах / А.М. Зимин, Н.П. Козлов, В.И. Хвесюк, Б.Д. Цыдыпов // Известия СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1982. №8. Вып. 2. С. 37–43.
6. Теория и расчет приэлектродных процессов / И.Г. Паневин, В.И. Хвесюк, И.П. Назаренко и др. Новосибирск: Наука, 1992. 197 с.
7. Оптимизация теплового состояния и ресурса стержневого термокатода / А.С. Аньшаков, Э.К. Урбах, Б.Д. Цыдыпов // Теплофизика и аэромеханика. 1995. Т.2. №2. С. 167−171.
8. Тепловой режим работы термокатода / М.Ф. Жуков, А.С. Аньшаков, Г.-Н.Б. Дандарон // Приэлектродные процессы и эрозия электродов плазмотронов. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1977. С. 61−84.
9. Распределение температуры на термокатоде / М.Ф. Жуков, А.С. Аньшаков, Г.-Н.Б. Дандарон, Ж.Ж. Замбалаев // Тез. докл. VIII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Новосибирск, 1980. Т. 2. С. 12−15.

Цыдыпов Балдандоржо Дашиевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН. Тел.: (3012) 432282, e-mail: lmf@pres.bscnet.ru

Tsydypov Baldandorzho Dashievich, candidate of technical sciences, senior research fellow, Institute of Physical Materials Science SB RAS.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

1. Статья представляется только в doc-файле, набранная в текстовом редакторе Microsoft Word XP/2003 (не допускается в других версиях Word). Формат страниц: A5 (ширина 148 мм, длина 210 мм). Поля: все поля по 1 см. Текст статьи оформляется в одну колонку. Межстрочный интервал – одинарный. Абзацный отступ – 0.5 см. Тип шрифта: Times New Roman. Размер кегля: везде 11 пт. Нумерация страниц в нижнем колонтитуле, по центру.

2. В начале статьи ставится подробный индекс УДК согласно действующим в настоящее время классификаторам. Далее следуют инициалы и фамилии авторов (полужирный курсив, выравнивание по правому краю), название статьи (заглавными буквами полужирным шрифтом, выравнивание по центру), аннотация, ключевые слова и перевод перечисленных частей текста на английский язык. В конце документа после списка литературы приводятся сведения об авторах и их перевод на английский язык (фамилия, имя отчество полностью, ученая степень, ученое звание, должность, место работы (указываются официально принятые названия организаций), контактный адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail). Ссылки на гранты приводятся в сноске на первой странице.

3. Статья должна быть структурирована и содержать введение, ряд разделов с возможными подразделами, заключение, список литературы.

4. Набор формул осуществляется в редакторе формул Microsoft Equation 3/4 или MathType 5/6. Не допускается использование стандартного редактора формул Word 2007/2010 (следует использовать редактор MathType). Не допускается: набор формул как текста (включая таблицу символов, надстрочные и подстрочные индексы), а также с применением автофигур; вставка формул как рисунков; сжатие формулы как рисунка. Все формулы, на которые в тексте даются ссылки, выносятся в отдельную строку с нумерацией в круглых скобках в тексте по правому краю страницы (строка выравнивается по правому краю). Основной размер шрифта в формулах: 11 пт. Размер шрифта в формулах для индексов вычисляется автоматически, но в случае сложной иерархии индексов отдельные символы могут быть недостаточно различимы, и в этом случае требуется ручная коррекция размера символа.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАТЬИ И ОПЛАТА ПУБЛИКАЦИИ

1. Статья представляется в электронном виде. В названии файла статьи указывается фамилия первого автора.

2. Стоимость опубликования одной статьи, частично покрывающая расходы на издание журнала, услуги почты по пересылке статей членам редколлегии и экземпляров журнала иногородним и иностранным авторам, составляет за 1 страницу размера 173 на 237 мм для сотрудников БГУ 150 р., для остальных – 300 р.

3. Оплата за публикацию статьи, авторами которой являются только аспиранты, не взимается. Должна прилагаться справка учреждения, подтверждающая, что авторы являются аспирантами этого учреждения.

4. Оплата производится после уведомления редакцией о принятии статьи к опубликованию и производится почтовым переводом на указанный в уведомлении адрес. При оплате переводом необходимо выслать копию квитанции о переводе по e-mail.

5. Статьи, не соответствующие требованиям оформления, редколлегией не рассматриваются. Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ. Математика, информатика». Корректура авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются. Гонорары авторам не выплачиваются. Редакция не располагает возможностью для переписки с автором по вопросам рецензирования статьи, не обосновывает причину отказа публикации.

Почтовый адрес:

670000, Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, Институт математики и информатики БГУ, каб. 1201, кафедра прикладной математики.
Тел. 8(3012) 21-77-33.
E-mail: vestnik_bsu_math@rambler.ru

Редактор
Р.В. Хабдаева
Компьютерная верстка
Н.Ц. Тахинаевой

Подписано в печать 17.10.12. Формат 70 × 100 1/16.
Усл. печ. л. 8,12. Уч.-изд. л. 3,52.
Тираж 1000. Заказ 279.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
riobsu@gmail.com