

Учредитель
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

ВЕСТНИК

БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015/4



Математика, информатика

Журнал издается
с 2012 года

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-48732 от 28 февраля
2012 г. Федеральная служба по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
(Роскомнадзор)

Ответственные за выпуск
Д. О. Трунин, И.-Х. Д. Хишектуева

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. С. Булдаев, д-р физ.-мат. наук, проф.
(гл. редактор, Улан-Удэ)
С. Н. Васильев, акад. РАН, проф. (Москва)
В. И. Гурман, д-р техн. наук, проф. (Москва)
Ж. Г. Дамбаев, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)
А. В. Данеев, д-р техн. наук, проф. (Иркутск)
А. И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф.
(Новосибирск)
А. В. Лакеев, д-р физ.-мат. наук (Иркутск)

А. Д. Мижидон, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)
Ни Минь Кань, д-р наук, проф. (КНР, Шанхай)
Б. Очирбат, д-р наук, проф. (Монголия,
Улан-Батор)
В. А. Срочко, д-р физ.-мат. наук, проф. (Иркутск)
Д. Ш. Ширапов, д-р физ.-мат. наук, проф.
(Улан-Удэ)
Р. Энхбат, д-р наук, проф. (Монголия,
Улан-Батор)

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ,
ул. Смолина, 24а
☎ 21-77-33, vbsumi@yandex.ru

✉ АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ,
ул. Смолина, 24а
☎ 21-95-57, riobsu@gmail.com

GH

1. Математическое моделирование и обработка данных

УДК 532.135

© *Б.Б. Бадмаев, Б.Б. Дамдинов, Ч.С. Лайдабон*

АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПРОПИТОЧНЫХ РАСТВОРАХ¹

Работа посвящена резонансному методу исследования сдвиговых вязкоупругих свойств жидкостей. Приведено решение задачи взаимодействия пьезокварц – прослойка вязкоупругой жидкости – накладка. С помощью пьезокварцевого резонатора были измерены комплексный модуль сдвига и вязкость ряда пропиточных растворов при различных температурах.

Ключевые слова: жидкость, пропиточные растворы, вязкость, модуль сдвига, резонансный метод.

© *B.B. Badmaev, B.B. Damdinov, Ch.S. Laidabon*

ANALYSIS OF PROPAGATION OF SHEAR WAVES IN IMPREGNATE SOLUTIONS

Paper deals with the resonance method for liquids shear viscoelastic properties measurement. The problem of interaction of the system piezoquartz – viscoelastic liquid – cover-plate has been solved. Complex shear modulus and viscosity of impregnate solutions have been measured by piezoquartz resonator at different temperatures.

Keywords: liquid, impregnate solutions, viscosity, shear modulus, resonance method.

Введение

С целью получения новых качеств пористо-капиллярные тела подвергаются пропитке специальными растворами. При разработке технологии пропитки раньше учитывалось только взаимодействие жидкости со стенками капилляра. Вязкоупругие свойства пропиточных растворов, являющиеся определяющими факторами в большинстве технологических процессов, не рассматривались. В настоящей работе проведено исследование вязкоупругих свойств пропиточных растворов резонансным методом. Акустические методы остаются основным инструментом, позволяющим получить значения модулей сдвиговой упругости (G' и G''), характеризующих вязкоупругое поведение жидкости.

¹ Работа выполнена в рамках госзадания БГУ и при финансовой поддержке грантов РФФИ, проекты № 15-02-08204_а, №15-42-04319_р_сибирь_а

Резонансный метод

Сущность резонансного метода измерения сдвиговой упругости жидкостей заключается в следующем. Пьезокварцевый кристалл в виде прямоугольного бруска контактирует своей верхней горизонтальной поверхностью с прослойкой жидкости, накрытой твердой накладкой [1,2]. Накладка с прослойкой жидкости находится на одном из концов пьезокварца. При тангенциальных колебаниях пьезокварца в прослойке исследуемой жидкости распространяются сдвиговые волны. При этом наблюдается влияние прослойки жидкости на резонансные характеристики пьезокварца. Действие добавочной связи, осуществляемой прослойкой исследуемой жидкости, с находящейся на ней накладкой будет выражаться в изменении резонансной частоты пьезокварца и затухания, т.е. в изменении волнового числа пьезокварца. Комплексный сдвиг резонансной частоты пьезокварца находится приравниванием импедансов жидкости и пьезокварца. Импеданс жидкости равен отношению силы F_0 , действующей со стороны жидкости на пьезокварц, к скорости частиц жидкости v_0 у поверхности пьезокварца.

$$F_0 = SG^* \left. \frac{\partial \xi(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (1)$$

где S - площадь контакта, G^* - комплексный модуль сдвига жидкости, $\partial \xi(z,t)/\partial z|_{z=0}$ - градиент смещения частиц жидкости у поверхности пьезокварца. Для определения смещения частиц жидкости ξ как функции времени t и расстояния z от поверхности пьезокварца решается волновое уравнение

$$\rho_l \frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial t^2} = G^* \frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Из уравнения получается следующее выражение для смещения частиц:

$$\xi(z,t) = A[\exp(ikz) + a \exp(-ikz)] \exp(-i\omega t). \quad (3)$$

Здесь κ - комплексное волновое число жидкости, ω - циклическая частота пьезокварца, A и a - постоянные, зависящие от граничных условий. Для определения постоянной a рассмотрим взаимодействие жидкой пленки с накладкой. Сила, действующая со стороны жидкости на накладку массы m , имеет вид:

$$F = -SG^* \left. \frac{\partial \xi(z,t)}{\partial z} \right|_{z=H} = m \frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где $\partial \xi(z,t)/\partial z|_{z=H}$ - градиент смещения частиц у поверхности накладки, H - толщина жидкой пленки. При решении для a получается

$$a = \frac{im_1 - m\kappa H}{im_1 + m\kappa H} \exp(2i\kappa H), \quad (5)$$

где m_1 - масса жидкой прослойки. Подставляя (5) в (4) для $\xi(z,t)$, получим

$$\xi(z, t) = A[\exp(ikz) + \frac{im_l - m\kappa H}{im_l + m\kappa H} \exp(2i\kappa H - ikz)] \exp(-i\omega t). \quad (6)$$

Учитывая (6), импеданс жидкости равен

$$Z_l = \frac{im_l \omega}{\kappa H} \tan(\kappa H + \arctan \frac{m\kappa H}{m_l}). \quad (7)$$

Импеданс пьезокварца определяется отношением силы Φ , действующей со стороны пьезокварца на жидкость к скорости элементов пьезокварца q_0 в месте контакта с жидкостью. Смещение частиц пьезокварца выражается формулой $U = U_0 \sin kx \exp(-i\omega t)$, где k - комплексное волновое число пьезокварца. Сила Φ определяется так

$$\Phi = E \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} \cdot Q = U_0 E k Q \cos kl \exp(i\omega t), \quad (8)$$

где E - модуль Юнга, Q - поперечное сечение пьезокварца, l - половина его длины. Учитывая, что $k = \omega/c$ и $\tilde{n} = \sqrt{E/\rho_q}$, где c - скорость продольных волн в пьезокварце, ρ_q - его плотность, получим:

$$\Phi = U_0 Q \omega \rho_q c \cos kl \exp(i\omega t). \quad (9)$$

Скорость элементов пьезокварца на его конце равна

$$q_0 = \partial U(x, t) / \partial t \Big|_{x=l} = U_0 i \omega \sin kl \exp(i\omega t).$$

Для импеданса пьезокварца получим следующее выражение

$$Z_q = icQ\rho_q c \tan kl. \quad (10)$$

В последнем выражении волновое число пьезокварца считается комплексным, поскольку взаимодействие с пленкой жидкости и накладкой изменяет как резонансную частоту, так и его затухание. Это приводит к изменению фазы колебания, т.е. должно выполняться равенство: $kl - \varepsilon = \pi/2$. Изменение фазы можно выразить через комплексный сдвиг частоты пьезокварца $\varepsilon = \Delta\omega/c$. Следовательно, $kl = \pi/2 + \Delta\omega/c$. Подставляя это выражение в (10) и приравняв с выражением для импеданса жидкости (7) для комплексного сдвига частоты пьезокварца, получим:

$$\Delta\omega = -\frac{2m_l \omega}{M\kappa H} \tan(\kappa H + \arctan \frac{m\kappa H}{m_l}), \quad (11)$$

где $M = 2lQ\rho_q$ - масса пьезокварца. Считаем, что масса накладки достаточно велика, что ее можно считать практически покоящейся и формула (11) преобразуется к более простому виду:

$$\Delta\omega = \frac{2SG * \kappa}{M\omega} \cdot \frac{1 + \cos(2\kappa H - \varphi)}{\sin(2\kappa H - \varphi)}. \quad (12)$$

Здесь $\varphi = \varphi' + i\varphi''$ комплексный сдвиг фазы, который происходит при отражении сдвиговой волны от границы жидкость - накладка. Если же жидкость с накладкой находится только на одном конце, как обычно бы-

вает в эксперименте, то в формулах исчезнет коэффициент 2.

Учитывая, что $G^* = \omega^2 \rho / \kappa^2$, $\kappa = \beta - i\alpha$, и, перейдя к линейным частотам, из выражения (12) получим действительную и мнимую части сдвигов частот:

$$\Delta f' = \frac{S}{4\pi^2 Mf_0} \cdot \frac{(G' \beta + G'' \alpha) \sin 2\beta H + (G' \alpha - G'' \beta) \operatorname{sh} 2\alpha H}{ch 2\alpha H - \cos 2\beta H}, \quad (13)$$

$$\Delta f'' = \frac{S}{4\pi^2 Mf_0} \cdot \frac{(G'' \beta - G' \alpha) \sin 2\beta H + (G'' \alpha + G' \beta) \operatorname{sh} 2\alpha H}{ch 2\alpha H - \cos 2\beta H}. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) предельно упрощаются при малой толщине пленки жидкости, когда $H \ll \lambda$. При таком условии для действительной и мнимой частей комплексного модуля сдвига жидкости получаются следующие простые выражения:

$$G' = \frac{4\pi^2 Mf_0 \Delta f' H}{S}, \quad G'' = \frac{4\pi^2 Mf_0 \Delta f'' H}{S}. \quad (15)$$

Тангенс угла механических потерь равен отношению мнимого модуля к действительному:

$$\tan \theta = \frac{G''}{G'} = \frac{\Delta f''}{\Delta f'}. \quad (16)$$

Таким образом, по измеренным сдвигам частот колебательной системы нами были рассчитаны сдвиговые вязкоупругие свойства ряда пропиточных растворов [3,4]. Например, нами было проведено исследование температурной зависимости вязкоупругих свойств креозота. Эксперименты показали, что модуль упругости креозота уменьшается экспоненциально в зависимости от температуры [5]. Зависимость тангенса угла механических потерь имеет два максимума, что говорит, вероятно, о наличии двух релаксационных частот, связанных с двумя видами релаксации в креозоте. Зависимость мнимого сдвига от температуры проходит через максимум, что говорит о том, что при этой температуре наблюдается максимум поглощения.

Заключение

В работе показано, что акустический резонансный метод – достаточно прост и удобен для измерения вязкоупругих свойств различных жидкостей, в том числе пропиточных растворов. Установлено, что все исследованные пропиточные растворы обладают низкочастотной упругостью, что свидетельствует о структурированности жидкости. Показано, что модуль сдвига исследованных растворов уменьшается с увеличением температуры.

Литература

1. Базарон У.Б., Дерягин Б.В., Будаев О.Р. Измерение комплексного модуля сдвига жидкостей // ДАН СССР. - 1972. - Т.205, №6. - С.1326-1329.
2. Badmaev B., Damdinov B., Dembelova T., Makarova D., Budaev O. Influence of surface wettability on the accuracy of measurement of fluid shear modulus // Colloids and Surfaces A: Phys.Chem. and Eng. Aspects. - 2011. -

V.383, Issues 1-3. - P.90-94.

3. Лайдабон Ч.С., Дамдинов Б.Б., Алексеев Ю.С., Бадмаев Б.Б. Исследование вязкоупругих свойств пропиточных растворов // Сборник трудов 10-й сессии Российского акустического общества. - М.: ГЕОС, 2000. - С. 48-51.

4. Damdinov B.B., Laidabon Ch.S., Badmaev B.B. Dynamical properties of impregnate solutions // Proceedings of II Congress of the Slovenian Acoustical Society. 2000. Ljublyana. Slovenia. - P. 205-208.

5. Дамдинов Б.Б. Вязкоупругая релаксация в жидкостях при низких частотах: дис. ... док. физ.-мат. наук / Бурятский госуниверситет. - Улан-Удэ, 2012. - 187 с.

References

1. Bazaron U.B., Derjaguin B.V, Budaev O.R. Measuring of complex shear modulus of liquids //Doklady AN SSSR. - 1972. - V.205, №6. - P.1326-1329.

2. Badmaev B., Damdinov B., Dembelova T., Makarova D., Budaev O. Influence of surface wettability on the accuracy of measurement of fluid shear modulus // Colloids and Surfaces A: Phys.Chem. and Eng. Aspects. - 2011. - V.383, Issues 1-3. - P.90-94.

3. Laidabon Ch.S., Damdinov B.B., Alekseev Yu.S., Badmaev B.B. Research of viscoelastic properties of impregnate solutions // Proceedings of 10th Session of Russian Acoustical Society. - М.: GEOS, 2000. - P.48-51.

4. Damdinov B.B., Laidabon Ch.S., Badmaev B.B. Dynamical properties of impregnate solutions // Proceedings of II Congress of the Slovenian Acoustical Society. 2000. Ljublyana. Slovenia. - P.205-208.

5. Damdinov B.B. Viscoelastic relaxation in liquids at low frequencies: Diss. ... doct. phys.math.nauk. / Buryat State University. - Ulan-Ude, 2012. - 187 p.

Бадмаев Бадма Банзаракцаевич, доктор технических наук, заведующий лабораторией ИФМ СО РАН; профессор ВСГУТУ, e-mail: lma@ipms.bsnet.ru.

Дамдинов Баир Батуевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией БГУ; старший научный сотрудник ИФМ СО РАН, e-mail: dababa@mail.ru.

Лайдабон Чимит Сандабович, доктор технических наук, профессор ВСГУТУ, e-mail: lma@ipms.bsnet.ru.

Badmaev Badma Banzaraktsaevich, DSc, Head of Lab of the IPMS SB RAS; Professor of the ESSUTM, e-mail: lma@ipms.bsnet.ru.

Damdinov Bair Batuevich, DSc, Head of Lab of the BSU; Senior Researcher of the IPMS SB RAS, e-mail: dababa@mail.ru.

Laidabon Chimit Sandabovich, DSc, Professor of the ESSUTM, e-mail: lma@ipms.bsnet.ru.

УДК 530.1:528.871.6

© *А. В. Дмитриев, Т. Н. Чимитдоржиев, П. Н. Дагуров*

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ СИГНАТУРЫ НА ОСНОВЕ ПОЛЯРИМЕТРИЧЕСКИХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ДАННЫХ¹

Предложен метод построения нового типа поляризационных сигнатур для радарного зондирования земных покровов. Разработанные сигнатуры позволяют определить степень пространственных вариаций коэффициента обратного рассеяния на основе фрактального подхода.

Ключевые слова: радиолокационное зондирование, поляризационная сигнатура, фрактальная размерность.

© *A. V. Dmitriev, T. N. Chimitdorzhiev, P. N. Dagurov*

A METHOD OF CONSTRUCTING FRACTAL SIGNATURES FOR PARAMETRIC RADAR DATA

A method for constructing the new type of polarization signatures for radar imaging of the earth's cover is proposed. These signatures allow to determine the degree of spatial variations of the backscattering coefficient on the basis of the fractal approach.

Keywords: radar imaging, polarization signature, fractal dimension.

Введение

Развитие и активное использование поляриметрических радиолокационных систем дистанционного зондирования земли требует разработки новых подходов к процессам обработки космической информации [1]. Применение поляриметрических методов исследования земных покровов направлено на выявление физических механизмов обратного радарного рассеяния, позволяющее выполнить достоверную интерпретацию данных зондирования. Ранее, в работах [2,3] был использован фрактальный подход для анализа неоднородной природной среды в виде лесного массива в случае линейной поляризации излучения. Далее рассматривается метод построения фрактальной сигнатуры, обобщающий этот подход для любых состояний поляризации.

1. Метод построения фрактальной сигнатуры

Основной идеей предлагаемого метода является применение фрактального анализа в процессе создания поляризационной сигнатуры.

¹ Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО и при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 15-47-04386 р_сибирь_a

Оценка фрактальной размерности (ФР) является основным способом описания фрактальных свойств изучаемых объектов. Одним из способов такой оценки является использование случайного стохастического процесса - фрактального броуновского движения (ФБД). ФБД часто используется для моделирования поверхностей с фрактальными свойствами. Поверхность $I(x,y)$, описываемая ФБД, должна удовлетворять следующему соотношению [4]:

$$E(|I(x_2, y_2) - I(x_1, y_1)|) \propto \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right)^H, \quad (1)$$

где $E(\dots)$ обозначает операцию усреднения, H – коэффициент Херста ($0 < H < 1$). Эта фрактальная поверхность обладает свойством самоподобности, а ее размерность равна $D = 3 - H$.

Уравнение (1) можно переписать в виде $E(\Delta I_{\Delta r}) = K \Delta r^H$, где $\Delta I_{\Delta r} = |I(x_2, y_2) - I(x_1, y_1)|$, $\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, K – постоянная. Логарифмируя обе части последнего уравнения, получим:

$$\log(E(\Delta I_{\Delta r})) = H \log(\Delta r) + K. \quad (2)$$

Уравнение (2) используется для оценки фрактальной размерности следующим образом. Сначала вычисляется величина $E(\Delta I_{\Delta r})$ при различных значениях Δr . Затем строится график $\log(E(\Delta I_{\Delta r}))$ в зависимости от $\log(\Delta r)$. Далее, используя линейную регрессию, оценивается наклон полученной кривой, который представляет собой коэффициент H . Зная величину H мы можем рассчитать фрактальную размерность $D = 3 - H$. Программа для расчета ФР данным методом приведена в [5].

На рис. 1 показана блок-схема построения фрактальной поляризационной сигнатуры на основе полностью поляриметрических радиолокационных данных. На первом этапе, как и в работе [6], синтезируются радиолокационные изображения для всех возможных комбинаций углов наклона ψ и эллиптичности χ эллипса поляризации (на согласованной или кросс-поляризации). Затем, каждое синтезированное изображение трансформируется в фрактальное изображение, в котором каждый пиксель представляет собой ФР, рассчитанную в заданной окрестности пикселя исходного изображения. Далее, ФР в исследуемой области усредняются. Полученный набор значений фрактальной размерности для каждой комбинации углов ψ и χ образует фрактальную поляризационную сигнатуру (рис. 2).

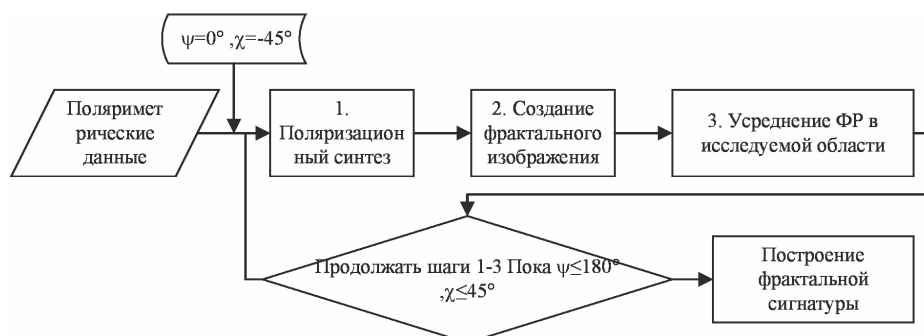


Рис. 1. Блок-схема построения фрактальной поляризационной сигнатуры

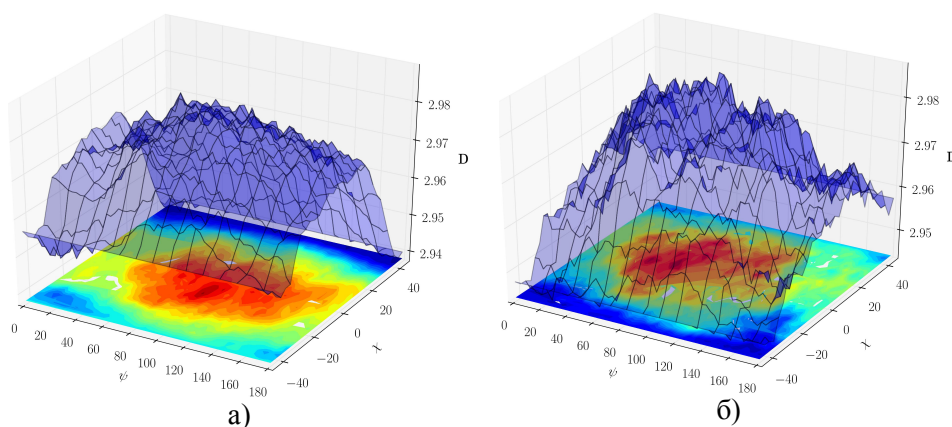


Рис. 2 Фрактальная поляризационная сигнатура PCA ALOS PALSAR-1 для а) восходящей и б) нисходящей орбит.

2. Результаты

Для построения сигнатур были использованы данные космического поляриметрического радара с синтезированной апертурой (PCA) ALOS PALSAR-1, выполнявшего съемку в 2006-2009 гг. Для исходных данных с целью устранения спекл-шума проводилось некогерентное накопление. В результате размер пиксела на изображениях составлял 24x24 м. В качестве тестового был выбран равнинный участок преимущественно соснового леса на побережье оз. Байкал. На рис. 2 представлены сигнатуры, построенные для восходящей и нисходящей орбиты пролета PCA соответственно. Анализ показывает, что имеющееся различие в сигнатурах на различных орбитах связано с неоднородным азимутальным распределением ветвей деревьев.

Заключение

Предложен метод построения фрактальной поляризационной сигнатуры. Данная сигнатура позволяет оценить степень неоднородности зондируемых объектов. Анализ сигнатуры лесного массива выявил неоднородное азимутальное распределение ветвей деревьев.

Литература

1. Mironov V.L., Chimitdorzhiev T.N., Dagurov P.N., Dmitriev A.V. Coprocessing of radar coherence and spectral optical data. // IGARSS 2005 Proceedings. – 2005. – P. 3913 – 3915.
2. Чимитдоржиев Т.Н., Архинчеев В.Е., Дмитриев А.В., Цыдыпов Б.З. Фрактальный анализ радиолокационных поляриметрических данных для классификации земных покровов // Исслед. Земли из космоса. - 2007. - № 4. - С. 27 - 33.
3. Чимитдоржиев Т.Н., Архинчеев В.Е., Дмитриев А.В. Поляриметрическая оценка пространственных флуктуаций радарных изображений для восстановления структуры лесного полога // Исслед. Земли из космоса. - 2007. - № 5. - С. 80 – 82.
4. C.-C. Chen, J.S. DaPonte, M.D. Fox. Fractal feature analysis and classification in medical imaging. //IEEE Trans. on Medical Imaging. - 1989. – Vol. 8, No.2. – P. 133-142.
5. N. Tustison and J. Gee. “Stochastic Fractal Dimension Image,” URL: <http://hdl.handle.net/1926/1525>.
6. J.J. VanZyl, H.A. Zebker and C. Elachi. Imaging radar polarization signatures: theory and observation. // Radio Sci. – 1987. – Vol. 22, No. 4. – P. 529 –534.

References

1. Mironov V.L., Chimitdorzhiev T.N., Dagurov P.N., Dmitriev A.V. Coprocessing of radar coherence and spectral optical data. // Proceedings of IGARSS 2005. – 2005. – P. 3913 – 3915.
2. Chymitdorzhiev T.N., Arkhincheev V.E., Dmitriev A.V., Tsydyпов B.Z. Fractal Analysis of Polarimetric Radar Data // Issledovanie Zemli iz kosmosa. - 2007. - № 4. - P. 27 - 33.
3. Chymitdorzhiev T.N., Arkhincheev V.E., Dmitriev A.V. Polarimetric Estimation of Spatial Fluctuations for Earth Covers Classification // Issledovanie Zemli iz kosmosa. - 2007. - № 5. - P. 80 – 82.
4. C.-C. Chen, J.S. DaPonte, M.D. Fox. Fractal feature analysis and classification in medical imaging. //IEEE Trans. on Medical Imaging. - 1989. – Vol. 8, No.2. – P. 133-142.
5. N. Tustison and J. Gee. “Stochastic Fractal Dimension Image,” URL: <http://hdl.handle.net/1926/1525>.
6. J.J. van Zyl, H.A. Zebker and C. Elachi. Imaging radar polarization signatures: theory and observation. // Radio Sci. – 1987. – Vol. 22, No. 4. – P. 529 –534.

Дмитриев Алексей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН, e-mail: dav@ipms.bscnet.ru.

Чимитдоржиев Тумэн Намжилович, доктор технических наук, зам. директора Института физического материаловедения СО РАН, e-mail: scidir@ipms.bscnet.ru.

Дагуров Павел Николаевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН, e-mail: dav@ipms.bscnet.ru.

Dmitriev Aleksey Valerevich, PhD, Senior research fellow of Institute of Physical Materials Science, SB RAS, e-mail: dav@ipms.bscnet.ru.

Chimitdorzhiev Tumen Namzhilovich, DSc, Deputy director of Institute of Physical Materials Science, SB RAS, e-mail: scidir@ipms.bscnet.ru.

Dagurov Pavel Nikolaevich, DSc, Leading research fellow of Institute of Physical Materials Science, SB RAS, e-mail: dav@ipms.bscnet.ru.

УДК 517.925.41

© *В.В. Мачулис*

ИЗМЕНЕНИЕ АМПЛИТУДЫ СЕЗОННЫХ МИГРАЦИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ

В данной работе исследуются свойства решений, близких к основному резонансному, дифференциального уравнения движения в математической модели миграции животных. Получена кривая частотной характеристики, исследованы ее свойства, определены участки устойчивости резонансных решений. Также найдены условия многозначности частотной характеристики, что обосновывает наличие скачков амплитуды.

Ключевые слова: кривая частотной характеристики, амплитуда колебаний, резонанс, математическая модель миграции животных.

© *V.V. Machulis*

CHANGE OF AMPLITUDE OF SEASONAL MIGRATIONS IN NEIGHBOURHOODS OF STEADY SOLUTIONS

In this paper, we study the properties of solutions, close to primary resonance, differential equation of motion in mathematical model of animal migration. Frequency response curve is obtained, studied its properties, defined sustainability sites of resonant solutions. Also check the conditions of frequency characteristic that justifies the presence of amplitude jumps.

Keywords: frequency response curve, amplitude, resonance, mathematical model of animal migration.

Введение

Крупномасштабные перемещения групп организмов, или миграции, давно привлекают внимание ученых. Исследований, посвященных этому вопросу, довольно много, но большинство относятся к стационарной среде. В работе [1], где предложенная модель миграции рассматривается в нестационарной среде, показано, что миграционные перемещения могут возникнуть как ответ только на пространственно-временную экологическую разнородность, без физиологических различий. В указанной статье предложена модель эволюции миграции животных в не зависящей от плотности популяции среде, где движение особей основано на потреблении единственного неистощимого ресурса, который изменяется в пространстве и времени. Авторы используют теорию оптимального управления, чтобы найти оптимальные движения в нескольких различных ситуациях.

В качестве критерия оптимальности в модели авторов работы [1] используется число

$$R_d = \int_0^{\infty} [\Theta(x(t), t) - \gamma(\dot{x}(t))] e^{-\delta t} dt, \quad (1)$$

характеризующее физическую форму отдельной особи после пройденного пути $x(t)$. Стратегия движения будет оптимальной при достижении максимума (1). Модель включает в себя также дифференциальное уравнение затрат на перемещение

$$\gamma''(\dot{x})\ddot{x} = \delta\gamma'(\dot{x}) - \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \quad (2)$$

при условиях

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \arg \max_u (\lambda u - \gamma(u)), \\ \delta\lambda - \dot{\lambda} &= \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \quad \dot{x} = u^*. \end{aligned} \quad (3)$$

В модели приняты следующие обозначения: $\Theta(x, t)$ – функция распределения ресурса, зависящая как от времени (t), так и от позиции особи ($x(t)$); $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ – скорость особи в момент t ; $\gamma(\dot{x})$ – затраты на перемещение; $u = \dot{x}$ – управляющий параметр; $\lambda(t)$ – вспомогательная функция; $\gamma' = \frac{d\gamma}{dx}$ – скорость изменения затрат относительно позиции; δ – относительная значимость краткосрочного прироста ресурса по сравнению с долгосрочным.

Предполагается, что функция распределения ресурса $\Theta(x, t)$ допускает представление в виде суммы постоянных и периодических компонент:

$$\Theta(x, t) = \psi(x) + \omega(x, t), \quad (4)$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \Theta(x, t) dt \quad \text{и} \quad \omega(x, t) = \Theta(x, t) - \psi(x). \quad (5)$$

Это позволяет характеризовать природу оптимальной стратегии с помощью коэффициента полезности движения γ' , коэффициента относительной значимости δ и амплитуды пространственных изменений доступности ресурса, состоящей из сезонного изменения ресурса ω и среднего уровня ресурса ψ .

Известно, что если пространственные и временные вариации являются независимыми и разделяемыми $\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0\right)$, то сезонность не влияет на оптимальное перемещение. Другие наблюдения говорят о том, что потенциальные масштабы пространственных перемещений ограничены эффективностью этих перемещений. С учетом этих обстоятельств, авторы рабо-

ты [1] классифицировали оптимальные стратегии перемещений шестью режимами, в зависимости от относительных значений перечисленных характеристик. Более подробно об этом упоминается в статье [2].

1. Краткий анализ модели и постановка задачи

В данной работе мы рассматриваем в качестве объекта исследования следующую функцию распределения ресурса

$$\Theta(x, t) = a_0 + a_2 x^2 - a_4 x^4 + a_1 \cos(2\pi t)x, \quad (6)$$

где $a_i > 0$. Здесь $\psi(x) = a_0 + a_2 x^2 - a_4 x^4$ – пространственная компонента, а $\omega(x, t) = a_1 \cos(2\pi t)x$ – сезонная компонента. Мы предполагаем, что закон стоимости движения $\gamma(u)$ является параболическим и имеет вид

$\gamma(u) = \frac{1}{2}hu$, где h – константа. Тогда после подстановки и упрощений уравнение (2) примет вид

$$x'' = \delta x' - a_1 \cos(2\pi t) - 2a_2 x + 4a_4 x^3. \quad (7)$$

Уравнение (7) мы рассматриваем как необходимое условие оптимальности.

Полученное уравнение есть уравнение Дюффинга, которое обычно записывается в форме

$$x'' + bx' + k_1 x + k_2 x^3 = A \cos \varphi.$$

В последнем уравнении $b > 0$ – вязкость, а k_1 и k_2 могут принимать различные по знаку значения. Это уравнение исследовалось достаточно подробно долгое время как модель вынужденных нелинейных колебаний в механике. Однако, отличительной особенностью (7) является отрицательная «вязкость». В настоящее время существует не так много работ, где изучается уравнение Дюффинга с отрицательной «вязкостью».

Целью нашего исследования является выяснение свойств решений уравнения (7), близких к основному резонансному, определение соотношений между параметрами, а также получение кривой частотной характеристики. Для реализации указанной цели применяем метод многомерного шкалирования ([3]).

Основной резонанс происходит в случае совпадения собственной частоты уравнения $\sqrt{2a_2}$ и частоты внешнего воздействия 2π . Введем т.н. коэффициент расстройки σ , который будет определять близость между частотами

$$2\pi = \sqrt{2a_2} + \varepsilon\sigma,$$

где $\varepsilon \ll 1$, $|\sigma| = O(1)$. Если $\sigma = 0$, то система подвергается неограниченным по амплитуде колебаниям, которые в реальности сдерживаются нелинейностью. Для отыскания приближенного решения положим

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (8)$$

где $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$. Мы также переобозначим остальные коэффициенты уравнения (7), чтобы иметь возможность варьировать их. Пусть $a_1 = -\varepsilon k = -K$, $a_4 = -\frac{\varepsilon \alpha}{4}$, $\delta = -2\varepsilon \mu$, где $\mu < 0$, α – любое. Зададим возмущение и в сезонной компоненте

$$-a_1 \cos 2\pi t \sim \varepsilon k \cos(\sqrt{2a_2}t + \sigma \varepsilon t) = K \cos(\sqrt{2a_2}T_0 + \sigma T_1). \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) в (7) и сгруппируем по степеням ε . Приравняв коэффициенты при нулевой и первой степенях ε , получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + 2a_2 x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2a_2 x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 2\mu \frac{\partial x_0}{\partial T_0} - \alpha x_0 + k \cos(\sqrt{2a_2}T_0 + \sigma T_1) \end{cases}. \quad (10)$$

После преобразований и с учетом того, что вековые члены в приближенном решении должны исчезнуть, мы приходим к первому приближению решения (7) в виде

$$x = a \cos(\sqrt{2a_2}t + b) + O(\varepsilon), \quad (11)$$

где a и b – действительные функции, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} a' = -\mu a + \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{2a_2}} \sin(\sigma T_1 - b) \\ ab' = \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\sqrt{2a_2}} a^3 - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{2a_2}} \cos(\sigma T_1 - b) \end{cases}. \quad (12)$$

Если сделать замену переменной $g = \sigma T_1 - b$, то система (12) станет автономной

$$\begin{cases} a' = -\mu a + \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{2a_2}} \text{sing} \\ a g' = \sigma a - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\sqrt{2a_2}} a^3 + \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{2a_2}} \text{cosg} \end{cases}. \quad (13)$$

2. Исследование частотной характеристики

Для выяснения свойств решений системы (13) вначале найдем ее неподвижные точки, приравняв правые части уравнений к нулю

$$\begin{cases} -\mu a + \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{2a_2}} \operatorname{sing} = 0 \\ \sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\sqrt{2a_2}} a^2 + \frac{1}{2a} \frac{k}{\sqrt{2a_2}} \operatorname{cosg} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

В результате решения системы получается две группы неподвижных точек с отрицательным и положительным a и периодически изменяющимся g (с периодом 2π). На Рис.1 представлен фазовый портрет системы при следующих значениях параметров: $a_1 = 0,1$, $a_2 = 1,99\pi^2$, $a_4 = 0,01$, $\delta = 0,005$, $\sigma = 0,9$, $\varepsilon = 0,017475$. В данном случае все неподвижные точки – неустойчивые фокусы.

Совершив эквивалентные преобразования над правыми частями (13), мы придем к соотношению

$$\left[\frac{1}{64} \frac{\delta^2 \alpha^2}{a_4^2} + \left(\sigma - \frac{3}{16} \frac{\alpha \sqrt{2a^2}}{\sqrt{a_2}} \right)^2 \right] a^2 = \frac{1}{128} \frac{a_1^2 \alpha^2}{a_4^2 a_2}. \quad (15)$$

Это соотношение неявно задает амплитуду как функцию расстройки σ (т.е., частоты возмущения); оно является уравнением частотной характеристики. Как известно, график a как функции от σ для заданных k и μ называется кривой частотной характеристики. Если разрешить (15) относительно σ , то получится равенство

$$\sigma = \frac{3}{16} \frac{\alpha \sqrt{2a^2}}{\sqrt{a_2}} \pm \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2a_1^2 \alpha^2}{a_4^2 a_2 a^2} - \frac{4\delta \alpha^2}{a_4^2}}. \quad (16)$$

При $\alpha < 0$, как и ожидалось, пик кривой сгибается влево и симметричная кривая искажается. На Рис. 2 приведен график кривой частотной характеристики при значениях параметров $a_1 = 0,1$, $a_2 = 1,99\pi^2$, $a_4 = 0,01$, $\delta = 0,005$, $\varepsilon = 0,017475$. В этом случае формируется промежуток многозначности зависимости $a(\sigma)$.

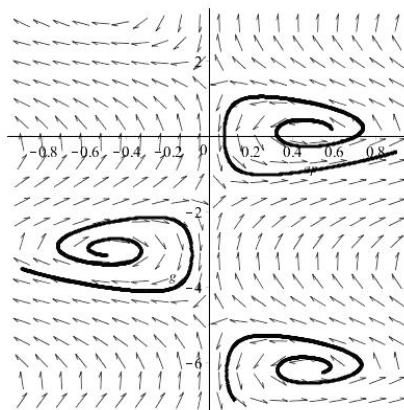


Рис. 1

Геометрическое место точек максимумов амплитуд задается параболой

$\sigma = \frac{3}{16} \frac{\alpha \sqrt{2} a^2}{\sqrt{a_2}}$. Ее правая часть показана пунктиром на Рис. 2. Если

$\mu = -\frac{\delta}{2\varepsilon}$ достаточно близко к нулю, то кривая частотной характеристики состоит из двух ветвей, которые асимптотически приближаются к кривой

$\sigma = \frac{3}{16} \frac{\alpha \sqrt{2} a^2}{\sqrt{a_2}}$ при убывании σ (как на рисунке).

Мнозначность зависимости $a(\sigma)$ имеет значение для интерпретации движений в математической модели, т.к. приводит к «скачкам» амплитуды. Наличие многозначности можно связать с существованием максимума левой ветви кривой, если рассматривать ее как функцию $\sigma(a)$. Необходимое условие для максимума этой функции сводится к уравнению

$$36\alpha^2 \mu^2 \omega_0^2 a^8 - 9\alpha^2 k^2 a^6 + 4k^4 = 0 \tag{17}$$

относительно a . Область определения функции $\sigma(a)$ представляет собой

промежуток $\left(0, \frac{k}{\mu\omega_0}\right]$. Можно доказать, что если уравнение (17) имеет

положительный корень, меньший, чем $\frac{k}{\mu\omega_0}$, то функция $\sigma(a)$ имеет мак-

симум, а значит, существует промежуток, где кривая частотной характеристики многозначна.

Исследование устойчивости отдельных участков кривой частотной характеристики можно провести несколькими способами. Определение типа неподвижных точек традиционным методом затруднительно ввиду чрезвычайно громоздких формул. Поэтому положим

$$a = a_0 + a_1, \quad g = g_0 + g_1.$$

Подставляя эти равенства в (13) и учитывая, что a_0 и g_0 удовлетворяют (14), выделим линейные члены относительно a_1 и g_1 и получим

$$\begin{cases} a_1' = -\mu a_1 + \left(\frac{k}{2\omega_0} \cos g_0 \right) g_1 \\ g_1' = -\left(\frac{3\alpha a_0}{4\omega_0} + \frac{k}{2\omega_0 a_0^2} \cos g_0 \right) a_1 - \left(\frac{k}{2\omega_0 a_0} \sin g_0 \right) g_1 \end{cases} \quad (18)$$

Устойчивость отдельных участков частотной характеристики зависит от собственных значений матрицы коэффициентов при a_1 и g_1 в системе (18). Легко показать, что установившийся режим будет устойчивым, если выполнится условие

$$\left(\sigma - \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0} \right) \left(\sigma - \frac{9\alpha a_0^2}{8\omega_0} \right) + \mu^2 > 0. \quad (19)$$

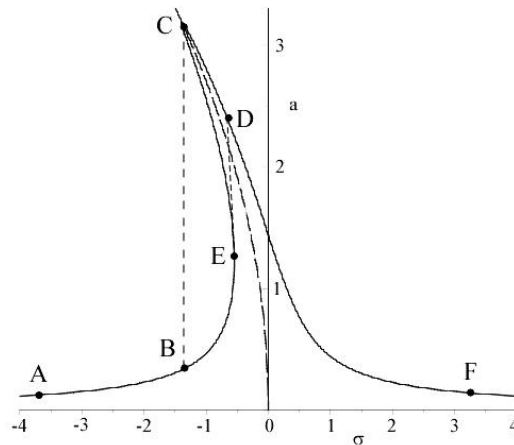


Рис. 2

Численные расчеты показывают, что критерий (19) выполняется на участках AE и CF , что соответствуют устойчивым решениям, а участок EC – неустойчивым. Поэтому при возрастании σ в окрестности $\sigma_0 \approx -0,55$ происходит резкое увеличение амплитуды колебаний (мгновенное перемещение из точки E в точку D). При убывании σ наоборот, движение скачком уменьшает амплитуду (перемещение из точки C в точку B). Все это означает, что в рассматриваемых областях значений параметров малые изменения коэффициента расстройки могут привести к резким изменениям амплитуды сезонных миграций.

Подобные свойства наблюдаются только при весьма малых значениях параметра $\delta < \delta_0$ ($\delta_0 \approx 0,01$). Если $\delta > \delta_0$, кривая частотной характеристики изменяет форму и участок BC меняет направление выпуклости, при

этом неустойчивый режим исчезает. Следовательно, чем больше значимость долгосрочного прироста ресурса, тем более вероятен рассматриваемый вариант миграционного поведения.

Заключение

Результаты исследования приводят к следующим выводам.

1. В рассматриваемой модели возможно возникновение резонанса.
2. При малых коэффициентах a_1 , a_4 и $\delta < \delta_0$ кривая частотной характеристики многозначна, что обуславливает наличие скачка амплитуды при плавном изменении параметра расстройки.
3. При $\delta > \delta_0$ кривая частотной характеристики однозначна и скачка амплитуды не происходит.
4. Наличие скачков амплитуды сезонных миграций зависит от коэффициента значимости краткосрочного прироста ресурса. Чем меньше эта значимость, тем более вероятны скачки амплитуды.

Литература

1. Timothy C. Regula, Allison K. Shaw. Optimal migratory behavior in spatially-explicit seasonal environments // Discrete and continuous dynamical system. Series B. – 2014. - Vol. 19, N. 10. - P. 3359-3378.
2. Мачулис В.В. Путь между двумя пиками ресурса в математической модели миграции животных // Вестник Бурятского государственного университета. – 2015. - Выпуск 9. – С. 62-67.
3. Ali H. Nayfeh, Dean T. Mook. Nonlinear Oscillations. – Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004. - 704 p.

References

1. Timothy C. Regula, Allison K. Shaw. Optimal migratory behavior in spatially-explicit seasonal environments // Discrete and continuous dynamical system. Series B. – 2014. - Vol. 19, N. 10. - P. 3359-3378.
2. Machulis V.V. The path between the two peaks of the resource in the mathematical model of animal migration // Bulletin of the Buryat State University. – 2015. - Issue 9. – P. 62-67.
3. Ali H. Nayfeh, Dean T. Mook. Nonlinear Oscillations. – Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004. - 704 p.

Мачулис Владислав Владимирович, доцент кафедры математического моделирования Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, e-mail: mareliks@gmail.com.

Machulis Vladislav Vladimirovich, Associate Professor, Department of mathematical modeling of the Institute of mathematics and computer science of the Tyumen State University, e-mail: mareliks@gmail.com.

2. Информационные системы и технологии

УДК 004.75

© *А.С. Гаченко, Г.М. Ружников, А.Е. Хмельнов*

СОЗДАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕСУРСОВ НА ОСНОВЕ WEB-РЕШЕНИЙ

Статья посвящена актуальным проблемам создания и развития геоинформационных систем в сфере управления городскими муниципалитетами.

Ключевые слова: ГИС «Инвестор», метаданные, информационные системы, географические электронные карты.

© *A.S. Gachenko, G.M. Ruzhnikov, A.E. Hmelnov*

CREATION OF FUNDS AVAILABLE FOR INVESTMENT ON THE BASIS OF WEB-SOLUTIONS

This article describes an approach of maps of Irkutsk city creation that will allow to invest in the area development.

Keywords: GIS «Investment», metadata, information systems, GIS.

Введение

Инвестиции являются важной составляющей успешного развития городской экономики. Консалтинговые и оценочные компании, девелоперы, предприниматели используют ГИС инвестиционного характера для получения информации об экономическом потенциале территорий, повышения скорости превращения инвестиционной идеи в работающий бизнес.

Данные ГИС «Инвестор», как правило, уникальны, поскольку содержат специфичные для каждого города: пространственные и тематические данные, а их структура и функциональность определяется особенностями территориального управления.

Структура ГИС «Инвестор»

В городе Иркутск ГИС «Инвестор» интегрирует актуальные общедоступные пространственные и тематические данные об объектах территориальной инфраструктуры города, которые формируются профильными комитетами и подведомственными им организациями, участвующими в инвестиционном процессе [2-4].

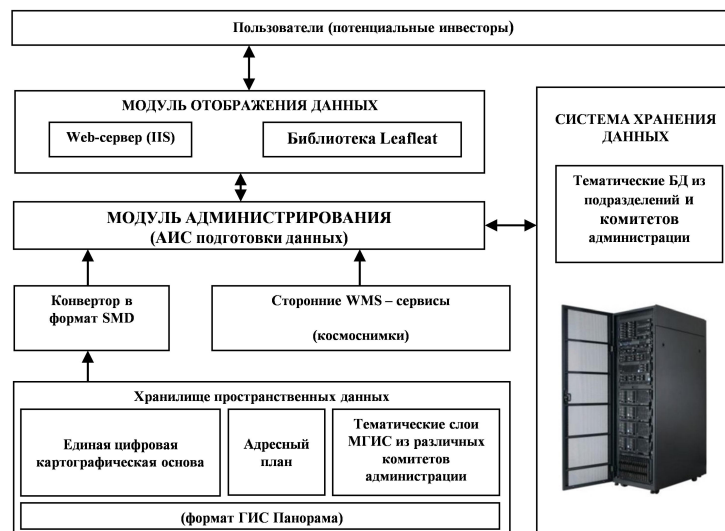


Рис. 1. Структура ГИС «Инвестор».

Структурно ГИС «Инвестор» включает: Web-браузер, модуль отображения данных (Web-сервер под управлением Internet Information Services, библиотека Leaflet), модуль администрирования (АИС подготовки данных), конвертор из различных форматов в формат SMD, WMS сервисы (космоснимки сторонних организаций), хранилище пространственных данных (ЕЦКО, адресный план, тематические слои подразделений), система хранения (тематические БД подразделений и ГИС «Инвестор»).

Функционально ГИС «Инвестор» обеспечивает визуализацию всех доступных для отображения слоёв существующей муниципальной геоинформационной системы (МГИС) города Иркутска, с возможностью их включения/отключения, выбора и поиска объекта или группы объектов, отображения семантической информации, интегрированной по всем включённым в выборку слоям карты.

Основным элементом ГИС «Инвестор» является модуль отображения данных, который разработан с использованием технологии декларативных спецификаций. Остальные элементы структуры системы предназначены для администрирования и организации взаимодействия с тематическими муниципальными информационными системами и БД (рис. 1).

В качестве базовой топоосновы используется цифровой «Адресный план» г. Иркутска, который регулярно обновляется на основе «Дежурного цифрового топографического плана» города [4]. Информация для ГИС «Инвестор» автоматически формируется из тематических слоёв муниципальной геоинформационной системы г. Иркутска (МГИС). Кроме того, у системы существует собственная БД, которая предназначена для хранения служебной информации, а также для быстрого добавления табличных данных, получаемых из подразделений администрации г. Иркутска и других внешних источников.

Большинство цифровых тематических карт, используемых в г. Иркутске, представлены в формате ГИС «КАРТА», которые для ускорения обработки Web-модулем конвертируются в формат SMD.

ГИС «Инвестор» использует следующие цифровые тематические карты (слои):

- Адресный план (официальная утвержденная выверенная карта города)
- Кадастровое деление
- Правила землепользования и застройки
- Проекты планировок
- Транспортный слой
- Слой расположение торговых организаций

Разработан удобный интерфейс управления узлами и слоями, то есть можно управлять не только каждым слоем, но и их группами, устанавливать степень прозрачности слоев на карте и менять очередность их отображения.

Состав отображаемой табличной информации ГИС «Инвестор»:

Таблица 1.
Данные ГИС «Инвестор»

Название узла с данными	Содержание
1. Коммерческие объекты	<ul style="list-style-type: none">• Гостиницы• Магазины• Торговые центры
2. Население	<ul style="list-style-type: none">• Агрегированные данные по жителям г. Иркутска
3. Социальные объекты	<ul style="list-style-type: none">• Дополнительное образование• Дошкольное образование• Объекты здравоохранения• Культурные объекты• Спортивные объекты• Муниципальные образовательные учреждения
4. Торги муниципального имущества	<ul style="list-style-type: none">• Объекты муниципальной недвижимости выставленные на торги
5. Транспорт	<ul style="list-style-type: none">• Автобусные остановки

При выборе на интерактивной карте конкретного объекта недвижимости автоматически отображается информация о нём.

Формирование и наполнение хранилища пространственных данных осуществляется с использованием геокодирования. Также существует возможность обновления данных в режиме добавления на карту новых слоев с уже существующей в них семантической информацией.

Модуль отображения данных

Пользовательский интерфейс представления прост и визуально компактно организован. Основным элементом интерфейса является цифровой «Адресный план» города.

Для отображения цифровых карт в ГИС «Инвестор» используется библиотека Leaflet [5], которая представляет собой JavaScript библиотеку для публикации карт в мобильных и настольных браузерах. Leaflet предоставляет возможность разделения на модули и применения различных расширений. Клиентская часть ГИС «Инвестор» включает в себя:

- Модуль работы с картой
- Модуль поиска
- Модуль управления слоями
- Модуль выбор источника данных
- Модуль отображения слоев

Модуль поиска позволяет получать координаты о географическом объекте по его адресу и выставить позиционирование карты по центру найденного объекта. В данном модуле реализована поддержка API геокодирования Web-сервисов:

- Карты Google
- Карты Яндекс
- 2 Гис

Пользователь может отметить на карте любой объект и получить по нему в отдельном окне имеющуюся о нём информацию из Адресного плана, а так же и из публичных источников: кадастровой карты, 2 Гис.

В ГИС «Инвестор» для публикации картографических данных на стороне клиента используется формат представления векторных данных SMD (Static Map Data). Данный формат позволяет эффективно (по времени отображения и загрузки информации в память) визуализировать пространственные объекты. Перед публикацией данных подсистема «Администрирования» автоматически проводит конвертацию картографических материалов именно в SMD.

Панель управления пользовательского интерфейса содержит элементы управления ГИС функциональностью (навигация, масштабирование, измерение расстояния между объектами), выбора объектов карты, в том числе по произвольному контуру, отображения легенды слоев карты, отображения семантической информации в области отчётов, поиска объектов на карте по адресу и другим атрибутам.

Пользователи в ГИС «Инвестор» имеют возможность дополнительно просматривать фрагменты на космоснимках. Разработана технология мониторинга данных на картографических сервисах, которая позволяет просматривать выбранный фрагмент карты на сторонних картографических онлайн-сервисах:

- Карты Google

- Карты Яндекс
- OpenStreetMap (OSM) – свободная, бесплатная вики-карта мира
- Публичная кадастровая карта

При выборе необходимого участка карты в системе, пользователь может сделать выбор в пользу нужного картографического сервиса, и ему будут предоставлены данные со сторонних карт.

Наиболее ресурсоёмким и информативным инструментом, реализованным в интерфейсе пользователя, является блок построения запросов, который позволяет создавать отчетные выборки. Для вывода информации об объектах из базы данных используется технология декларативных спецификаций [1]. Одной из разновидностей запросной системы является выборка по произвольной (ограничивающий многоугольник) области (рис. 2). При выполнении такого запроса формируется отчет по объектам карты указанной области из отмеченных в дереве информационных слоёв. По каждому из выбранных слоёв вычисляются итоговые значения, а также может отображаться список объектов данного слоя, если выборка выполняется по ограниченной области, содержащей не слишком много таких объектов. При выводе информации об объектах слоя в отчет включаются карточки записей из связанной со слоем таблицы БД. Для формирования таких карточек также используются декларативные спецификации структуры БД [1-4].

В целях исключения длительного формирования отчетных данных, в связи с выбором большого количества объектов, разработан блок прогнозирования времени формирования отчетов и оптимизации запросов с предоставлением пользователю информации о количестве объектов включенных в его запрос.

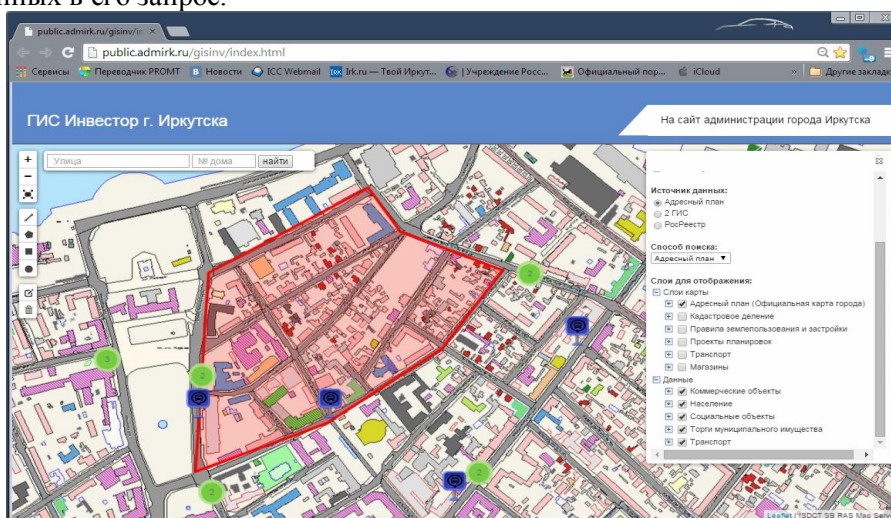


Рис. 2. Запросная система ГИС «Инвестор».

Модуль администрирования ГИС «Инвестор»

Модуль предназначен для конфигурирования модуля отображения данных и подготовки информации для него из различных тематических и

графических баз данных. Для этого применяется инструментальная среда «ГеоАРМ», созданный в ИДСТУ СО РАН механизм, который создан с использованием декларативных спецификаций. Основные функции модуля администрирования:

- управление логической и физической структурой графической и связанной с ней информацией тематических баз данных для публикации и управления конфигурацией созданного Интернет-ресурса;
- автоматическая загрузка данных в БД из таблиц Excel;
- редактирование табличных данных;
- загрузка новых слоев картографических данных для отображения в Web-интерфейсе;
- просмотр слоёв в подготовленном к публикации виде и фиксация определенной информации от ответственного лица, подтверждающей проведенный контроль слоя и его готовность к публикации (дата, время, реквизиты ответственного лица).

Под декларативными спецификациями БД ГИС «Инвестор» понимается метаинформация, описывающая структуру этой БД [1]. Декларативные спецификации используются при загрузке и отображении табличной информации с помощью подсистемы «Администрирование». При получении новой таблицы система создает метаописание таблицы в файле настроек и связывает ее с другими таблицами при необходимости. Автоматически создаются html-шаблоны на основе этих метаописаний для отображения табличных данных в Web-интерфейсе. Далее исполняемая библиотека обрабатывает эти метаописания и отображает данные в удобном для пользователя виде. Также на основе этого описания создаются определенные связи для использования информации из таблиц при создании пользовательских запросов.

В подсистеме «Администрирование» реализована функция загрузки пользовательских слоев, которая проходит в несколько этапов: пользователь выбирает новый слой в формате ГИС «КАРТА», после этого слой при помощи специального конвертора преобразуется в оригинальный формат SMD. Далее слой в формате SMD перепроецируется в проекцию WGS84. Это обеспечивает совместимость отображаемой информации со сторонними WMS сервисами (Google, OpenStreetMap и т.д.), так как их карты представлены в этой проекции.

В подсистеме «Администрирование» реализована публикация информации из слоев с ограниченным (служебным) доступом об инженерной инфраструктуре города и возможности подключения к её объектам. С помощью специального конвертора генерируется бинарный файл в формате OMR (object-relational mapping), в котором хранится информация о наличии объектов в квадрате или их отсутствии, этот файл не хранит в себе метрику и семантику. Данные из этого файла отображаются при формировании отчета по заданной области. Для этого карта разбивается на квадраты с регулярной сеткой шагом в 200 метров. По запросу пользователя формируется текущий номер квадрата и отчет в виде максимального,

минимального расстояния до объектов инженерной инфраструктуры в данном квадрате. Сконвертированные слои инженерной инфраструктуры невидимы для пользователей и могут использоваться для формирования отчетов. Данная информация включается в состав отчетов только, если активирован слой инженерной инфраструктуры в списке слоев ГИС «Инвестор» подсистемы Web-публикации.

ГИС «Инвестор» города Иркутска внедрен в эксплуатацию и обеспечивает простое, доступное наращивание информационной составляющей для публикации путём настройки файлов конфигурации. Это полноценный аналитический инструмент в сети Интернет, который позволяет провести комплексный анализ текстовых и картографических данных об инфраструктуре города (<http://public.admirk.ru/gisinv/index.html>), что значительно упрощает принятие решений об инвестиционной привлекательности различных объектов.

Литература

1. Бычков И. В., Гаченко А. С., Хмельнов А. Е., Фереферов Е. С. Система создания автоматизированных рабочих мест с возможностью взаимодействия с пространственными данными на основе метаописаний структур баз данных // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Спецвыпуск ИрГУПС.* — 2008. — С. 12 – 17.
2. Бычков И. В., Ружников Г. М., Хмельнов А. Е., Фёдоров Р. К., Гаченко А. С., Шигаров А. О., Парамонов В. В. Формирование компонентов инфраструктуры пространственных данных для управления территориальным развитием // *Вестник Кемеровского государственного университета.* — 2012. — Т. 52, № 4. — С. 30 – 37.
3. Бычков И. В., Плюсин В. М., Ружников Г. М., Хмельнов А. Е., Фёдоров Р. К., Гаченко А. С. Создание инфраструктуры пространственных данных в управлении регионов // *География и природные ресурсы.* — 2013. — № 2. — С. 145 – 150.
4. Гаченко А. С., Ружников Г. М., Хмельнов А. Е. Применение ГИС и WEB-технологий для создания интегрированных информационно-аналитических систем // *Инфраструктура научных информационных ресурсов и систем* — Москва: 2014. — Т. I, — С. 190 – 200.
5. Leaflet is a modern open-source JavaScript library for mobile-friendly interactive maps url: <http://leafletjs.com/>.

References

1. Bychkov I.V., Gachenko A. S., Hmelnov A. E., Fereferov E. S. System of creation of the automated workplaces with possibility of interaction with spatial data on the basis of metadata of structures of databases // *Modern technologies. System analysis. Modeling. Special issue of IRGUPS.* — 2008. — P. 12 – 17.
2. Bychkov I.V., Rugnikov G. M., Hmelnov A. E., Fedorov R. K., Gachenko A. S., Shigarov A. O., Paramonov V. V. Creation of spatial data for

management of territorial development // Bulletin of the Kemerovo State University.— 2012. — Т. 52, № 4. — P. 30 – 37.

3. Bychkov I. V., Plusnin V. M., Rugnikov G. M., Hmelnov A. E., Fedorov R. K., Gachenko A. S. Creation of infrastructure of spatial data in management of regions // Geography and natural resources. — 2013. — № 2. — P. 145 – 150.

4. Gachenko A. S., Rugnikov G. M., Hmelnov A. E. Application of GIS and WEB technologies for creation of the integrated information and analytical systems // Infrastructure of scientific information resources and systems — Moscow: 2014. — Т. I, — P. 190 – 200.

5. Leaflet is a modern open-source JavaScript library for mobile-friendly interactive maps url: <http://leafletjs.com/>.

Ружников Геннадий Михайлович, доктор технических наук, зав. отделения ИДСТУ СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел. (395-2) 453006, e-mail: rugnikov@icc.ru.

Хмельнов Алексей Евгеньевич, кандидат технических наук, зам. директора ИДСТУ СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел. (395-2) 453071, e-mail: hmelnov@icc.ru.

Гаченко Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел. (395-2) 453103, e-mail: gachenko@icc.ru.

Ruzhnikov Gennady Mikhailovich, DSc of Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, e-mail: rugnikov@icc.ru.

Hmelnov Alexey Evgenievich, PhD of Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, e-mail: hmelnov@icc.ru.

Gachenko Andrey Sergeevich, PhD of Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, e-mail: gachenko@icc.ru.

УДК 004.75

© *Р.К. Федоров, А.С. Шумилов*

СОЗДАНИЕ И ПУБЛИКАЦИЯ WPS-СЕРВИСОВ НА ОСНОВЕ ОБЛАЧНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ¹

Статья рассказывает о проектировании и реализации инфраструктуры виртуальных машин для разработки и публикации WPS-сервисов. Создание виртуальных серверов доступно пользователям специализированного Геопортала ИДСТУ СО РАН, на котором производится дальнейшая публикация создаваемых сервисов.

Ключевые слова: виртуализация, облачные вычисления, виртуальная инфраструктура, веб-сервисы, оркестрация сервисов, WPS, распределенные вычисления

© *R.K. Fedorov, A.S. Shumilov*

DEVELOPMENT AND PUBLICATION OF WPS-SERVICES USING THE CLOUD INFRASTRUCTURE

Article tells about modeling and development of the virtual machines infrastructure for the development and publication of WPS-services. Creation of virtual servers is available for users of the Geoportal of ISDCT SB RAS, the Geoportal is used for actual publication of created services.

Keywords: virtualization, cloud computing, virtual infrastructure, web-services, service orchestration, WPS, distributed computations

Введение

С развитием компьютерных технологий все чаще возникает ситуация, когда решение какой-либо сложной научной вычислительной задачи требует совместного использования множества программных систем. Но в силу того, что разные программные системы реализованы на отличающихся платформах, написаны на разных языках программирования и имеют отличные друг от друга интерфейсы, возникает проблема их совместного использования.

В силу развития интернет-технологий все чаще приложения и вычислительные сервисы становятся доступными или полностью мигрируют в веб-среду, то есть становятся доступными через сеть интернет на основе определенных протоколов. Одним из часто используемых протоколов, используемых для публикации вычислительных сервисов, является протокол Web Processing Service, специализирующемся на работе с геодан-

¹ Работа поддержана РФФИ, грант 14-07-00166-а, программой Президиума РАН «Фундаментальные проблемы математического моделирования»

ными. На основе данного протокола производится работа с распределёнными WPS-сервисами на Геопортале ИДСТУ СО РАН – веб-приложении, предоставляющим набор инструментов для работы с геоинформацией.

Однако, наряду с проблемой взаимной интеграции уже существующих сервисов и программных систем существует проблема развертывания стандартизированных окружений для разработки сервисов, так как нередко возникает ситуация, когда для написания одного сервиса требуется установить набор из нескольких средств разработки, хранения данных и компиляции кода, а также средств для публикации сервиса в сети интернет. Таким образом, возникает проблема предоставления стандартизированного окружения, которое бы содержало наиболее часто используемые инструменты для разработки и публикации веб-сервисов.

Данная работа предлагает развертку инфраструктуры с настроенным окружением и тесной интеграцией с Геопорталом для упрощения, удешевления и ускорения разработки и публикации веб-сервисов на основе WPS протокола.

1. Стандарт WPS

Для определения параметров разрабатываемой среды разработки необходимо определить специфику протокола WPS, а также сервисов, разрабатываемых в соответствии с этим стандартом.

Стандарт WPS (Web Processing Service)[1] разработан консорциумом OGC[2] и предназначен для организации доступа к сервисам посредством протокола HTTP и основан на стандарте XML. Данный стандарт используется для описания служб сервисов (программных средств, предоставляющих централизованный доступ к набору WPS-сервисов), описания самих сервисов, а также осуществления запросов на выполнение сервисов.

Так как стандарт основан на протоколе HTTP, необходимым условием является либо наличие WPS службы, которая бы транслировала сервис в виде веб-приложения, либо чтобы сам сервис мог взаимодействовать через сеть интернет.

В данный момент существует несколько программных реализаций WPS-служб

- deegree WPS [3]. Проект позволяет публикацию алгоритма на Java по определенным стандартам с использованием deegree классов и модулей, созданных разработчиками.

- ZOO Project WPS [4]. Проект позволяет пользователям публиковать алгоритмы, написанные на разных языках (Java, C/C++, Python и Perl), и связывать алгоритмы в цепочки анализа данных с использованием JavaScript.

- GeoServer WPS [5]. В данном проекте не предусмотрена возможность публикации собственного процесса в виде исходного кода, но проект GeoServer объединяет в себе реализацию нескольких стандартов OGC, включая WMS, WFS и WCS, и ориентирован на публикацию данных.

- pyWPS [6]. Проект поддерживает публикацию алгоритмов на языке Python.

- 52° North WPS [7]. В проекте поддерживаются алгоритмы из геоинформационных систем: GRASS GIS, Sextante, ArcGIS. 52°

В силу того, что предполагаемая WPS-служба, публикующая сервисы в создаваемом окружении должна охватывать как можно больший набор реализаций сервисов, ZOO Project был выбран в качестве используемой службы.

2. Выбор программного обеспечения

Программное обеспечение, необходимое для создания среды разработки и публикации WPS-сервисов, было разделено на следующие группы:

1. WPS службы – как было упомянуто выше, ZOO Project был выбран в качестве WPS-службы в силу поддержки большого количества вариантов программной реализации сервисов;

2. Средства разработки – для языков C/C++ был выбран пакет Microsoft Visual Studio / компилятор gcc, для скриптовых языков (PHP, Python, JavaScript и т.д.) был выбран текстовый редактор с подсветкой синтаксиса;

3. Веб-сервер – для работы ZOO Project был выбран веб-сервер Apache2 в силу своей конфигурируемости и стабильности;

4. Примеры WPS-сервисов – исходный код либо готовые для компиляции проекты стандартных сервисов, которые дают представление о необходимом для публикации программном интерфейсе разрабатываемых сервисов.

3. Архитектура инфраструктуры

В процессе проектирования инфраструктуры разработки и публикации сервисов было выделено два варианта её реализации:

1. Многопользовательская среда с необходимым набором программ – конфигурация среды происходит одновременно, при обновлении какого-либо программного пакета обновление становится доступно сразу всем пользователям. Однако, пользователи системы не полномочны, существуют определенные ограничения на установку программных пакетов, и управление веб-сервером.

2. Создание заранее сконфигурированных виртуальных машин и их предоставление пользователям – пользователи полностью контролируют выделенную виртуальную машины, а также пользователь может выбрать операционную систему для своей машины. Однако, доставка обновлений программных средств затруднена.

Соотнеся все преимущества и недостатки всех перечисленных выше вариантов реализации, было принято решение о реализации среды в виде инфраструктуры виртуальных машин, решающим фактором была изоляция и свобода действий пользователя в случае предоставления отдельной виртуальной машины.

4. Реализация инфраструктуры

Виртуальная инфраструктура среды разработки и публикации WPS-сервисов располагается на одном физическом сервере, находящемся под управлением системы VMware ESXi. Данная система предоставляет низкоуровневый API для управления объектами виртуальной инфраструктуры. На данном физическом сервере, помимо создаваемых клиентских виртуальных машин, находятся следующие сервисные виртуальные машины:

1. VMware vCenter [8] – виртуальная машина на основе Windows Server 2008 R2, которая предоставляет API для управления физическим сервером VMware. vCenter имеет более широкий набор возможностей по управлению инфраструктурой, нежели низкоуровневая подсистема VMware ESXi;

2. Openstack Controller – виртуальная машина на основе Ubuntu Linux 14.04 LTS, занимающаяся управлением и координацией окружения Openstack [9]. Openstack – открытая технология, упрощающая и стандартизирующая доступ и управление различными средствами виртуализации;

3. Openstack Compute – виртуальная машина на основе Ubuntu Linux 14.04 LTS, занимающаяся управлением определенного виртуального кластера, в данном случае – кластера под управлением VMware vCenter.

Процесс создания виртуальной машины по запросу клиента Геопортала состоит из следующих шагов:

1. Клиент заполняет специальную форму на Геопортале и определяет необходимые настройки виртуальной машины – тип операционной системы, параметры виртуального аппаратного обеспечения. Далее определенные клиентом настройки отправляются на виртуальную машину Openstack Controller посредством специального Openstack API;

2. Openstack Controller на основе сообщенных параметров определяет соответствующий узел Openstack Compute, который должен будет создать виртуальную машину. Так как в данный момент в системе присутствует только один узел Compute, связанный с VMware vCenter, задача по созданию виртуальной машины направляется ему;

3. Openstack Compute на основе сообщенных параметров инициирует создание виртуальной машины, используя API VMware vCenter;

4. VMware vCenter создает виртуальную машину, обращаясь напрямую к подсистеме ESXi. Далее он возвращает всю необходимую информацию касательно новой виртуальной машины вверх по цепочке для предоставления клиенту таких параметров, как IP-адрес машины и статус её готовности к работе.

Стоит заметить, что в целях безопасности сервисные виртуальные машины доступны только из внутренней подсети, в то время как создаваемым клиентским виртуальным машинам присваиваются внешние статические IP-адреса, таким образом, WPS-сервисы, развернутые на клиентских виртуальных машинах, доступны из любой точки Интернет.

Виртуальные машины создаются на основе шаблонов (в терминологии VMware это "template", в Openstack это "image"), где заранее установлены и сконфигурированы Zoo Project и 52° North WPS, которые реализуют стандарт WPS. Сервер ZOO Project позволяет пользователям публиковать алгоритмы, написанные на разных языках (Java, C/C++, Python и Perl). В 52° North WPS поддерживаются алгоритмы из геоинформационных систем: GRASS GIS, Sextante, ArcGIS.

WPS-служба ZOO Project, описанная ранее, была модифицирована — добавлена реализация запуска консольных приложений. Подключение в ZOO Project различных библиотек осуществляется с помощью конфигурационных файлов. В конфигурационном файле можно указать шаблон запуска консольного приложения. Шаблон включает директивы для передачи параметров. Передачу значений параметров и файловых данных осуществляет Zoo Project. Консольное приложение работает с передаваемыми данными в обычном режиме — с файлами в локальной файловой системе.

Пользователь может установить собственное программное обеспечение, настроить доступ к нему через WPS, используя расширение ZOO Project.

После создания и публикации сервис может быть как зарегистрирован на Геопортале, так и использован как стандартный WPS-сервис из любой точки мира.

5. Апробация

Рассматриваемая в работе инфраструктура была протестирована в рамках задачи создания и публикации сервиса сложения двух растровых файлов формата GeoTIFF. Сервис сложения растров выполнен в виде консольного приложения, которое принимает на вход два файла и возвращает путь до сгенерированного файла.

Для создания и публикации сервиса разработчик предпринял следующие шаги:

1. Разработчик самостоятельно создал виртуальную машину под управлением операционной системы Windows Server 2008 посредством специальной веб-страницы Геопортала;

2. Разработчик с помощью среды Microsoft Visual Studio, а также библиотек для работы с геоданными GDAL и OGR [10] написал консольное приложение и протестировал его;

3. Разработчик написал специальный конфигурационный файл для WPS-службы ZOO Project, в котором описал свой сервис, а также указал входные и выходные параметры своего сервиса.

4. Консольное приложение стало доступно в виде WPS-сервиса, доступного по неизменному IP адресу из любой точки мира.

Заключение

Результатом данной работы является реализация инфраструктуры виртуальных машин, предназначенных для разработки и публикации WPS-сервисов. Пользователи Геопортала ИДСТУ СО РАН могут создавать виртуальные машины в зависимости от поставленной задачи – доступен как выбор операционной системы, так и выбор аппаратных характеристик создаваемых машин. Благодаря предустановленному набору специализированного программного обеспечения и наглядным примерам исходных кодов имеющихся сервисов пользователи могут незамедлительно приступить к разработке и публикации собственных WPS-сервисов.

Литература

1. OpenGIS Web Processing Service (WPS) Implementation Specification, v1.0.0. Release date: June 08, 2007. – URL: <http://www.opengeospatial.org/standards/wps> [15 февраля 2012].
2. OGC 05-007r7, OpenGIS® Web Processing Service / редактор: Peter Schut [Open Geospatial Consortium, Inc., 2007]. - URL: <http://www.opengeospatial.org/standards/wps> (дата обращения: 21.10.2014).
3. Deegree [Электронный ресурс]: Deegree open source software for spatial data infrastructures and the geospatial web. - Режим доступа: <http://www.deegree.org> (дата обращения: 10.08.2014).
4. ZOO Project Documentation [Электронный ресурс] / редактор: Nicolas Bozon (ZOO Community). - Режим доступа: <http://zoo-project.org/docs/ZOOProject.pdf> (дата обращения: 22.07.2014).
5. GeoServer [Электронный ресурс]: Open source software server. - Режим доступа: <http://geoserver.org> (дата обращения: 22.07.2014).
6. Python Web Processing Service [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://pywps.wald.intevation.org> (дата обращения: 22.07.2013).
7. 52°North [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://52north.org> (дата обращения: 22.07.2014).
8. VMware [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.vmware.com/> (дата обращения: 21.01.2015).
9. Openstack [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://www.openstack.org/> (дата обращения: 22.07.2014).
10. GDAL [Электронный ресурс]: GDAL - Geospatial Data Abstraction Library. - Режим доступа: <http://www.gdal.org/> (дата обращения: 22.01.2014).

References

1. OpenGIS Web Processing Service (WPS) Implementation Specification, v1.0.0. Release date: June 08, 2007. – URL: <http://www.opengeospatial.org/standards/wps> [15 fevralja 2012].
2. OGC 05-007r7, OpenGIS® Web Processing Service / redaktor: Peter Schut [Open Geospatial Consortium, Inc., 2007]. - URL: <http://www.opengeospatial.org/standards/wps> (data obrashhenija: 21.10.2014).

3. Deegree [Jelektronnyj resurs]: Deegree open source software for spatial data infrastructures and the geospatial web. - Rezhim dostupa: <http://www.deegree.org> (data obrashhenija: 10.08.2014).
4. ZOO Project Documentation [Jelektronnyj resurs] / redaktor: Nicolas Bozon (ZOO Community). - Rezhim dostupa: <http://zoo-project.org/docs/ZOOPROJECT.pdf> (data obrashhenija: 22.07.2014).
5. GeoServer [Jelektronnyj resurs]: Open source software server. - Rezhim dostupa: <http://geoserver.org> (data obrashhenija: 22.07.2014).
6. Python Web Processing Service [Jelektronnyj resurs]. - Rezhim dostupa: <http://pywps.wald.intevation.org> (data obrashhenija: 22.07.2013).
7. 52°North [Jelektronnyj resurs]. - Rezhim dostupa: <http://52north.org> (data obrashhenija: 22.07.2014).
8. VMware [Jelektronnyj resurs]. - Rezhim dostupa: <http://www.vmware.com/> (data obrashhenija: 21.01.2015).
9. Openstack [Jelektronnyj resurs]. - Rezhim dostupa: <https://www.openstack.org/> (data obrashhenija: 22.07.2014).
10. GDAL [Jelektronnyj resurs]: GDAL - Geospatial Data Abstraction Library. - Rezhim dostupa: <http://www.gdal.org/> (data obrashhenija: 22.01.2014).

Федоров Роман Константинович, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, e-mail: fedorov@icc.ru.

Шумилов Александр Сергеевич, аспирант, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, e-mail: alexshumilov@yahoo.com.

Fedorov Roman Konstantinovich, PhD, leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), e-mail: fedorov@icc.ru.

Shumilov Alexander Sergeevich, Postgraduate, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), e-mail: alexshumilov@yahoo.com.

3. Управляемые системы и методы оптимизации

УДК 517.977

© А.С. Булдаев

МЕТОДЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ПРИНЦИПА МАКСИМУМА¹

Необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления в форме принципа максимума представляются как специальные задачи о неподвижных точках конструируемых операторов управления. На основе предлагаемого подхода рассматриваются методы поиска управлений, удовлетворяющих принципу максимума.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, задача о неподвижной точке.

© A.S. Buldaev

METHODS OF FIXED POINTS OF MAXIMUM PRINCIPLE

Necessary optimality conditions for optimal control problems in the form of the maximum principle are represented as a special problem of the fixed points of the constructed control operators. On the basis of the proposed approach are considered methods of searching controls, satisfying the maximum principle.

Keywords: optimal control, maximum principle, fixed point problem

Введение

Распространенным подходом к решению задач оптимального управления является поиск экстремальных управлений (удовлетворяющих принципу максимума). При этом классический подход заключается в построении краевой задачи принципа максимума, трудности решения которой общеизвестны [1]. Другой подход состоит в последовательном решении задач локального улучшения, в результате которого строится релаксационная последовательность управлений, сходящаяся при определенных условиях к экстремальному управлению [2,3]. К этому типу относятся, например, известные градиентные методы [2]. В статье предлагается новый подход к поиску экстремальных управлений, заключающийся в поиске неподвижных точек специальных операторов в пространстве управлений. Рассматриваемые методы иллюстрируются в рамках задачи оптимального управления со свободным правым концом.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-01-03680

1. Задачи о неподвижной точке принципа максимума

Рассматривается задача оптимального управления

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ - вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ - вектор управления. В качестве допустимых управлений рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в выпуклом компактном множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы.

Предполагаются выполненными следующие условия:

1) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на R^n , функция $F(x, u, t)$, векторная функция $f(x, u, t)$ и их производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x, u, t) на множестве $R^n \times U \times T$;

2) функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|.$$

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t, v)$, $t \in T$ системы (2) для любого допустимого управления $v \in V$.

Рассмотрим функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$

$$H(\psi, x, u, t) = \langle f(x, u, t), \psi \rangle - F(x, u, t).$$

Для допустимого управления $v \in V$ обозначим $\psi(t, v)$, $t \in T$ - решение стандартной сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1))$$

при $u(t) = v(t)$, $x(t) = x(t, v)$, $t \in T$.

Рассмотрим отображение

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi, x, w, t), \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad t \in T. \quad (3)$$

Предположим, что данное отображение является кусочно-непрерывным по совокупности своих аргументов на $R^n \times R^n \times T$, т.е. имеет конечное число поверхностей разрыва. Каждая поверхность разрыва задается уравнением вида $s(\psi, x, t) = 0$, где $s(\psi, x, t)$ дифференцируема по совокупности аргументов ψ , x и непрерывна по t на множестве $R^n \times R^n \times T$. Допустим, что в рассматриваемом классе задач операция на максимум (3) допускает аналитическое решение, т.е. управление $u^*(\psi, x, t)$ представляется в явном виде по соответствующей формуле.

Известное необходимое условие оптимальности (принцип максимума) [1-3] для управления $v \in V$ можно представить в следующей форме

$$v(t) = u^*(\psi(t, v), x(t, v), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (5)$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (6)$$

Краевая задача (5), (6) в пространстве состояний является эквивалентной задаче (4) на множестве допустимых управлений в следующем смысле.

Пусть пара $(x(t), \psi(t))$, $t \in T$ является решением краевой задачи (5),(6). Тогда формируемое по правилу (3) выходное управление $v(t) = u^*(\psi(t), x(t), t)$ удовлетворяет условию (4). Обратно, пусть управление $v \in V$ является решением задачи (4). Тогда формируемая пара функций $(x(t, v), \psi(t, v))$, $t \in T$ удовлетворяет краевой задаче (5),(6).

В общем случае правые части краевой задачи разрывны и многозначны по фазовым переменным x , ψ . Стандартные методы для ее численного решения (метод стрельбы, метод линеаризации, конечно-разностный метод) даже в случае гладкости и однозначности правых частей задачи, как правило, оказываются вычислительно неустойчивыми, что обуславливается наличием положительных вещественных значений собственных чисел соответствующей матрицы Якоби.

Используемая система обозначений решений фазовой и сопряженной систем в форме явной зависимости от управления позволяет удобно интерпретировать задачу (4) как задачу о неподвижной точке некоторого оператора управления. Представим задачу о неподвижной точке (4) в канонической форме

$$v = G^*(v), \quad v \in V, \quad (7)$$

в которой оператор G^* можно определить в виде суперпозиции трех отображений.

Первое отображение Ψ определяется с помощью соотношения

$$\Psi(v) = \psi, \quad v \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, v), \quad t \in T.$$

Второе отображение X определяется аналогичным соотношением

$$X(v) = x, \quad v \in V, \quad x(t) = x(t, v), \quad t \in T.$$

Третье отображение V^* имеет вид

$$V^*(\psi, x) = v^*, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v^*(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), \quad t \in T.$$

В итоге оператор G^* записывается в виде композиции

$$G^*(v) = V^*(\Psi(v), X(v)).$$

Из принципа максимума (4) следует известное ослабленное необходимое условие оптимальности (дифференциальный принцип максимума) [1,2] для управления $v \in V$, рассматриваемое здесь в форме неравенства

$$\langle H_w(\psi(t, v), x(t, v), v(t), t), w - v(t) \rangle \leq 0, \quad w \in U, \quad t \in T. \quad (8)$$

Определим отображение w^α , $\alpha > 0$ с помощью соотношения

$$w^\alpha(\psi, x, u, t) = P_U(u + \alpha H_u(\psi, x, u, t)), \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad u \in U, \quad t \in T, \quad (9)$$

где P_U - оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

На основании условия Липшица для оператора P_U функция w^α непрерывна по совокупности $(\psi, x, u, t) \in R^n \times R^n \times U \times T$. При этом имеет место неравенство

$$\langle H_u(\psi, x, u, t), w^\alpha(\psi, x, u, t) - u \rangle \geq \frac{1}{\alpha} \|w^\alpha(\psi, x, u, t) - u\|^2.$$

Данная оценка определяется свойствами операции проектирования.

Дифференциальный принцип максимума (8) для управления $v \in V$ с помощью отображения (9) можно представить в следующей форме

$$v(t) = w^\alpha(\psi(t, v), x(t, v), v(t), t), \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \quad (10)$$

Отметим, что для выполнения (8) достаточно проверить условие (10) хотя бы для одного $\alpha > 0$. Обратное, из условия (8) следует выполнение (10) для всех $\alpha > 0$.

В линейной по управлению задаче (1), (2) (функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$ линейны по u) дифференциальный принцип максимума (10) эквивалентен принципу максимума (4).

Условие (10) можно интерпретировать как задачу о неподвижной точке соответствующего оператора управления

$$v = G^\alpha(v), \quad v \in V. \quad (11)$$

Введем вспомогательное отображение V^α соотношением

$$V^\alpha(\psi, x, v) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v \in V, \\ v^\alpha(t) = w^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), \quad t \in T.$$

Тогда с помощью рассмотренных ранее отображений Ψ , X и введенного отображения V^α оператор G^α записывается в виде суперпозиции

$$G^\alpha(v) = V^\alpha(\Psi(v), X(v), v), \quad v \in V.$$

2. Метод неподвижных точек принципа максимума

Для реализации задачи о неподвижной точке (4) предлагается использовать метод возмущений. Параметризуем условие принципа максимума (4) с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$ следующим образом.

Для этого выделим в задаче (1), (2) специальную линейную по состоянию часть с разделенными переменными по состоянию и управлению, в следующей форме

$$\Phi(u) = \langle c_0, x(t_1) \rangle + \varphi_1(x(t_1)) + \\ + \int_T (\langle a_0(t), x(t) \rangle + d_0(u(t), t) + F_1(x(t), u(t), t)) dt \rightarrow \min_{u \in V}, \quad (12)$$

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + b_0(u(t), t) + f_1(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \\ u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (13)$$

в которой матричная функция $A_0(t)$ и векторная функция $a_0(t)$ непрерывны на T , векторная функция $b_0(u, t)$ и функция $d_0(u, t)$ непрерывны по совокупности переменных u, t на множестве $U \times T$, c_0 - постоянный вектор.

На основе представления (12), (13) определим возмущенную задачу оптимального управления с параметром возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$

$$\Phi_\varepsilon(u) = \langle c_0, x(t_1) \rangle + \varepsilon \varphi_1(x(t_1)) + \int_T (\langle a_0(t), x(t) \rangle + d_0(u(t), t) + \varepsilon F_1(x(t), u(t), t)) dt \rightarrow \min_{u \in V}, \quad (14)$$

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + b_0(u(t), t) + \varepsilon f_1(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (15)$$

Задаче (14), (15) соответствует возмущенная функция Понтрягина

$$H_\varepsilon(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A_0(t)x + b_0(u, t) \rangle - \langle a_0(t), x \rangle - d_0(u, t) + \varepsilon (\langle \psi, f_1(x, u, t) \rangle - F_1(x, u, t)),$$

возмущенное отображение

$$u_\varepsilon^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} H_\varepsilon(\psi, x, w, t), \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad t \in T$$

и возмущенная сопряженная система

$$\dot{\psi}(t) = -A_0^T(t)\psi(t) + a_0(t) - \varepsilon (f_{1x}^T(x(t), u(t), t)\psi(t) - F_{1x}(x(t), u(t), t)), \quad \psi(t_1) = -c_0 - \varepsilon \varphi_{1x}(x(t_1)), \quad t \in T. \quad (16)$$

Обозначим $x_\varepsilon(t, v)$, $t \in T$ - решение возмущенной фазовой системы (15) при $u(t) = v(t)$; $\psi_\varepsilon(t, v)$, $t \in T$ - решение возмущенной сопряженной системы (16) при $u(t) = v(t)$, $x(t) = x_\varepsilon(t, v)$.

Условие принципа максимума для возмущенной задачи (14), (15)

$$v(t) = u_\varepsilon^*(\psi_\varepsilon(t, v), x_\varepsilon(t, v), t), \quad t \in T \quad (17)$$

определим в качестве возмущенного условия принципа максимума с параметром $\varepsilon \in [0, 1]$.

Исходная задача в форме (12), (13) и соответствующие функция Понтрягина H , отображение u^* , сопряженная система и условие принципа максимума (4) получаются, последовательно, из возмущенной задачи (14), (15), возмущенной функции Понтрягина H_ε , возмущенного отображения u_ε^* , возмущенной сопряженной системы (16) и возмущенного условия (17) при $\varepsilon = 1$.

Невозмущенному условию принципа максимума при $\varepsilon = 0$ соответствует невозмущенная задача оптимального управления

$$\Phi_0(u) = \langle c_0, x(t_1) \rangle + \int_T (\langle a_0(t), x(t) \rangle + d_0(u(t), t)) dt \rightarrow \min_{u \in V}, \quad (18)$$

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + b_0(u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1] \quad (19)$$

с невозмущенной функцией Понтрягина

$$H_0(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A_0(t)x + b_0(u, t) \rangle - \langle a_0(t), x \rangle - d_0(u, t),$$

невозмущенным отображением

$$u_0^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} H_0(\psi, x, w, t) \quad , \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad t \in T,$$

невозмущенной сопряженной системой

$$\dot{\psi}(t) = -A_0^T(t)\psi(t) + a_0(t), \quad t \in T, \quad p(t_1) = -c_0. \quad (20)$$

Для $v \in V$ обозначим $x_0(t, v)$, $t \in T$ - решение невозмущенной фазовой системы (19), $\bar{\psi}_0(t)$, $t \in T$ - решение невозмущенной сопряженной системы (20). Таким образом, невозмущенное условие принципа максимума принимает вид

$$v(t) = u_0^*(\bar{\psi}_0(t), x_0(t, v), t), \quad t \in T. \quad (21)$$

Невозмущенные задача оптимального управления, фазовая и сопряженная системы, функция Понтрягина H_0 , отображение u_0^* получаются из соответствующих возмущенных при $\varepsilon = 0$.

Отметим, что невозмущенная задача (18), (19) является линейно-выпуклой, для которой принцип максимума (21) является необходимым и достаточным условием оптимальности управления [2].

Трудоёмкость решения невозмущенного соотношения (21) определяется решением задачи Коши для сопряженной системы (20) и решением задачи Коши для фазовой системы

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + b_0(u_0^*(\bar{\psi}_0(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T. \quad (22)$$

Действительно, пусть $\bar{x}_0(t)$, $t \in T$ - решение задачи (22). Построим выходное управление $\bar{v}_0(t) = u_0^*(\bar{\psi}_0(t), \bar{x}_0(t), t)$, $t \in T$. Тогда $\bar{x}_0(t) = x_0(t, \bar{v}_0)$, $t \in T$ и, следовательно, $\bar{v}_0(t)$, $t \in T$ является решением невозмущенного условия (21).

Возмущенное условие (17) можно рассматривать как задачу о неподвижной точке соответствующего оператора G_ε^* , определяемого аналогично рассмотренному выше оператору G^* .

Для решения задачи (17) можно применить известный в вычислительной математике метод последовательных приближений и его модификации [5]. В частности, метод простой итерации при $k \geq 0$, имеющий форму

$$v^{k+1}(t) = u_\varepsilon^*(\psi_\varepsilon(t, v^k), x_\varepsilon(t, v^k), t), \quad t \in T. \quad (23)$$

В качестве начального приближения $v^0 \in V$ при $k=0$ для процесса (23) может выбираться невозмущенное решение \bar{v}_0 .

Трудоёмкость каждой итерации процесса (23) составляет две задачи Коши аналогично трудоёмкости решения невозмущенного условия (21).

Условия сходимости метода простой итерации для задач о неподвижной точке, рассматриваемых в канонических формах (7), (11), могут быть определены на основе известного принципа сжимающих отображений. Сформулируем аналог известной теоремы [5, с. 196-197].

Рассмотрим оператор $G:V \rightarrow V$, действующий на множестве V в полном нормированном пространстве функций, определенных на множестве T со значениями в компактном множестве $U \subset R^m$, с нормой $\|\cdot\|_V$.

Для решения операторного уравнения

$$v = G(v), \quad v \in V \quad (24)$$

рассматривается метод простой итерации

$$v^{k+1} = G(v^k), \quad k \geq 0. \quad (25)$$

Теорема 1. Пусть оператор G удовлетворяет условию Липшица в шаре $B(v_0, l) = \{v \in V : \|v - v_0\|_V \leq l, v_0 \in V, l > 0\}$ с константой $0 < M = M(v_0, l) < 1$:

$$\|G(v) - G(u)\|_V \leq M \|v - u\|_V, \quad v \in B(v_0, l), \quad u \in B(v_0, l), \quad (26)$$

причем выполняется условие

$$\|G(v_0) - v_0\|_V \leq (1 - M)l. \quad (27)$$

Тогда уравнение (24) имеет единственное решение $\bar{v} \in B(v_0, l)$ и метод простой итерации (25) сходится к \bar{v} в норме $\|\cdot\|_V$ при любом начальном приближении $v^0 \in B(v_0, l)$. Для погрешности метода справедлива оценка

$$\|v^k - \bar{v}\|_V \leq M^k \|v^0 - \bar{v}\|_V, \quad k \geq 0.$$

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству, приведенному в работе [5].

Отметим, что условие (27) вводится для обеспечения невыхода приближений итерационного процесса (25) за пределы множества $B(v_0, l)$, на котором выполняется условие Липшица (26).

Используя данную теорему, можно при определенных предположениях обосновать сходимость итерационного процесса (23) в пространстве измеримых функций $L_\infty(T)$ аналогично [4].

В качестве критерия останова итерационного процесса (23) может задаваться достижение заданного малого значения невязки возмущенного принципа максимума (17).

Расчет задач о неподвижной точке возмущенного принципа максимума повторяется с постепенным увеличением параметра возмущения $\varepsilon \in (0, 1]$. При этом в качестве начального приближения итерационного процесса принимается управление, полученное в задаче (17) с меньшим значением ε . Дойдя до значения $\varepsilon = 1$ получим решение исходной задачи.

3. Метод неподвижных точек дифференциального принципа максимума

Для реализации задачи о неподвижной точке (10) предлагается использовать метод простой итерации при $k \geq 0$

$$v^{k+1}(t) = P_U(v^k(t) + \alpha H_u(\psi(t, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t)), \quad t \in T. \quad (28)$$

Сходимость процесса (28) можно обосновать с помощью сформулированной выше теоремы 1 на множестве допустимых управлений $V = \{v \in C(T) : v(t) \in U, t \in T\}$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_C$.

Предположим, что на множестве V семейство фазовых траекторий системы (2) ограничено:

$$x(t, v) \in X, \quad t \in T, \quad v \in V, \quad (29)$$

где $X \subset R^n$ - выпуклое компактное множество. Тогда с учетом принятых предположений и линейности сопряженной системы на основе известного достаточного условия [6, с. 68] получаем условие ограниченности семейства сопряженных траекторий

$$\psi(t, v) \in P, \quad t \in T, \quad v \in V, \quad (30)$$

где $P \subset R^n$ - выпуклое компактное множество.

Дополнительно предположим, что функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных x , u , t на множестве $R^n \times U \times T$.

В сделанных предположениях операторы X , Ψ удовлетворяют условию Липшица с константой $C_1 > 0$

$$\|X(v) - X(u)\|_C \leq C_1 \|v - u\|_C, \quad v \in V, \quad u \in V,$$

$$\|\Psi(v) - \Psi(u)\|_C \leq C_1 \|v - u\|_C, \quad v \in V, \quad u \in V.$$

На основании условия Липшица для оператора проектирования P_U имеем

$$\begin{aligned} \|w^\alpha(p, x, u, t) - w^\alpha(q, y, v, t)\|^2 &\leq \|(u - v) + \alpha(H_u(p, x, u, t) - H_u(q, y, v, t))\|^2 \leq \\ &\leq \|u - v\|^2 + 2\alpha \langle u - v, H_u(p, x, u, t) - H_u(q, y, v, t) \rangle + \\ &+ \alpha^2 \|H_u(p, x, u, t) - H_u(q, y, v, t)\|^2, \\ &u, v \in U, \quad p, q \in P, \quad x, y \in X, \quad t \in T. \end{aligned}$$

Предположим, что для вектор-функции $H_u(\psi, x, u, t)$ выполняется условие

$$\langle u - v, H_u(p, x, u, t) - H_u(q, y, v, t) \rangle \leq -K \|u - v\|^2, \quad (31)$$

$$u, v \in U, \quad p, q \in P, \quad x, y \in X, \quad t \in T,$$

где $K = \text{const} > 0$.

В итоге, на основе (31) при достаточно малом $\alpha > 0$ получаем оценку

$$\|V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) - V^\alpha(\Psi(v), X(v), v)\|_C \leq (1 - 2\alpha K + \alpha^2 M)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|_C,$$

где $M = \text{const} > 0$.

Таким образом, в сделанных предположениях при достаточно малых $\alpha > 0$ оператор G^α удовлетворяет условию Липшица с константой мень-

ше единицы. В результате на основе теоремы 1 получаем следующее утверждение о сходимости процесса (28).

Теорема 2. Пусть

1) семейство фазовых траекторий в основной задаче (1), (2) ограничено: $x(t, u) \in X$, $t \in T$, $u \in V$, где $X \subset R^n$ - выпуклое компактное множество;

2) вектор-функция $f(x, u, t)$, функции $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных x, u, t на множестве $R^n \times U \times T$;

3) для вектор-функции $H_u(\psi, x, u, t)$ выполняется условие

$$\langle u - v, H_u(p, x, u, t) - H_u(q, y, v, t) \rangle \leq -K \|u - v\|^2, \\ u, v \in U, p, q \in P, x, y \in X, t \in T,$$

где $K = const > 0$, $P \subset R^n$ - выпуклое компактное множество, ограничивающее семейство сопряженных траекторий: $\psi(t, u) \in P$, $t \in T$, $u \in V$.

Тогда для достаточно малого параметра проектирования $\alpha > 0$

1) задача (10) имеет единственное решение $\bar{v}^\alpha \in V$;

2) итерационный процесс (28) сходится в норме $\|\cdot\|_C$ к решению \bar{v}^α для

любого начального приближения $v^0 \in V$.

Отметим, что рассматриваемый метод характеризуется тем, что экстремальное управление определяется условием (10) при любом значении проекционного параметра $\alpha > 0$.

Для сравнения предлагаемого метода последовательных приближений запишем в используемых обозначениях стандартный метод проекции градиента [2]

$$v^\alpha(t) = w^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t), t \in T, \\ \alpha > 0: \quad \Phi(v^\alpha) \leq \Phi(v^k) \Rightarrow v^{k+1} = v^\alpha.$$

Основное отличие предлагаемого метода от стандартного проекционного метода и его модификаций [2, 6] состоит в том, что параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется в итерационном процессе поиска последовательных приближений управления. В методах проекции градиента этот параметр варьируется на каждой итерации для обеспечения улучшения текущего управления по функционалу.

Заключение

Предлагаемые методы неподвижных точек принципа максимума выгодно характеризуются:

- отсутствием операции выпуклого или игольчатого варьирования управления в отличие от градиентных методов;
- вычислительной устойчивостью в отличие от методов решения краевой задачи принципа максимума.

В отличие от градиентных методов, требующих трудоемкую настройку процедур локального варьирования управления, методы неподвижных точек:

- не гарантируют релаксацию по целевому функционалу на каждой итерации;

- настройка сходимости методов неподвижных точек сводится к выбору только одного настроечного параметра.

Отсутствие операции локального варьирования управления также обуславливает на практике вычислений предлагаемыми методами получение реализуемых расчетных управлений, не содержащих участков резких амплитудных изменений управления.

Указанные свойства являются существенными факторами повышения вычислительной эффективности и качества решения задач оптимального управления.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
2. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. – 344 с.
3. Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 1984. – 232 с.
4. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятск. гос. ун-та, 2008. – 260 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432 с.
6. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. - М.: Физматлит, 2000. - 160 с.

References

1. Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishhenko E.F. Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov. – М.: Nauka, 1976. - 392 s.
2. Vasil'ev O.V. Lekcii po metodam optimizacii. – Irkutsk: Izd-vo Irkut. un-ta, 1994. – 344 s.
3. Metody reshenija zadach matematicheskogo programmirovanija i optimal'nogo upravlenija. – Novosibirsk: Nauka, 1984. – 232 s.
4. Buldaev A.S. Metody vozmushhenij v zadachah uluchshenija i optimizacii upravljaemyh sistem. – Ulan-Ude: Izd-vo Burjatsk. gos. un-ta, 2008. – 260 s.
5. Samarskij A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. - М.: Nauka, 1989. - 432 s.

6. Srochko V.A. Iteracionnye metody reshenija zadach optimal'nogo upravlenija. - M.: Fizmatlit, 2000. - 160 s.

Булдаев Александр Сергеевич, д-р физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики Бурятского государственного университета, директор Научно-образовательного инновационного центра системных исследований и автоматизации Бурятского государственного университета, e-mail: buldaev@mail.ru.

Buldaev Alexander Sergeevich, doctor of physical and mathematical sciences, professor of applied mathematics department of the Buryat State University, director of the Scientific and Educational Innovation Centre for System Studies and Automation in the Buryat State University, e-mail: buldaev@mail.ru.

УДК 517.97

© *И.-Х. Д. Хишектеуева*

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ С УЧЕТОМ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ¹

В работе рассматривается эколого-экономическая задача максимизации полезности от выпускаемой продукции с учетом отрицательного влияния загрязнения. Исследуемая модель относится к классу задач оптимизации управляющих параметров динамических систем. Для поиска ее оптимальных параметров применяется метод неподвижных точек. Он основан на решении специального операторного уравнения, построенного с помощью операции проектирования на допустимое множество значений управления, и представляющего систему условий улучшения для указанного класса задач. Решение данного уравнения позволяет получать улучшающие управления. Приводятся результаты численных экспериментов по оптимизации параметров модели.

Ключевые слова: параметрическая оптимизация, задача о неподвижной точке, эколого-экономическая задача.

© *I.-Kh. D. Khishektueva*

OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF OUTPUT MODEL WITH REGARD HARMFUL EMISSIONS

In this paper we consider the ecological-economic problem of maximization of output, taking into account the negative impact of pollution. The study model belongs to the class of parametric optimization problems of dynamic systems. To find the optimal parameters we use the fixed point method. It is based on the solving of special operator equation constructed by projection operation at admissible set of controls and it presents the system of improvement conditions for this class of problems. The solving of this equation allows to receive better controls. The results of numerical experiments on optimization of parameters of model are given.

Keywords: parametric optimization, problem of fixed point, ecological-economic problem.

Введение

Многие математические модели естественнонаучных и социальных процессов приводят к постановкам задач оптимального управления и оптимизации управляющих параметров. Поэтому разработка эффективных методов, технологий и алгоритмов, необходимых для численного решения сложных практических задач, не теряет своей значимости и актуаль-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-01-03680

ности. Применяемый в работе метод неподвижных точек может служить хорошим инструментом для решения таких задач, в частности, для задач параметрической оптимизации. Описание метода и его свойств дано в работах [4, 5]. Метод неподвижных точек обладает рядом существенных преимуществ, например, возможностью строго улучшения управлений, удовлетворяющих дифференциальному принципу максимума, что подтверждают численные расчеты на тестовых примерах [8, 9]. В статье метод применяется для оптимизации параметров модели выпуска продукции с учетом отрицательного влияния загрязнения. Она исследуется в работах [7, 10]. Ставится задача получить оптимальные расчетные значения модели указанным методом и сравнить полученные и известные результаты.

1. Метод решения

Рассматривается задача оптимизации управляющих параметров в следующей постановке

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u, t) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – вектор состояния, $u = (u_1, \dots, u_m)$ – вектор управляющих параметров со значениями в выпуклом множестве $U \subset R^m$. Начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы.

Предполагаются выполненными следующие условия:

- 1) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на R^n , вектор-функция $F(x, u, t)$, векторная функция $f(x, u, t)$ и их производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x, u, t) на множестве $R^n \times U \times T$;
- 2) функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|.$$

Строится релаксационная (улучшающаяся) последовательность управлений, определяемых на каждой итерации в ходе решения задач улучшения, формулируемых в следующей форме: для заданного управления $u \in U$ требуется найти управление $v \in U$ с условием $\Phi(v) \leq \Phi(u)$.

Для реализации задачи улучшения предлагается решить задачу о неподвижной точке (ЗНТ) [4, 5]:

$$v = P_U(u + \alpha(\int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s)), \quad u \in U, v \in U, s \in R^m, \quad (3)$$

где P_U - оператор проектирования на множество U в евклидовой норме, $\alpha > 0$ - параметр проектирования, $H(p, x, u, t)$ - функция Понтрягина, $x(t, v)$ - решение системы (2) при $u = v$, $p(t, u, v)$ - решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы вида

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -H_x(p(t), x(t, u), u, t) - r(t), \\ \langle H_x(p(t), x(t, u), u, t) + r(t), x(t, v) - x(t, u) \rangle &= \\ &= H(p(t), x(t, v), u, t) - H(p(t), x(t, u), u, t) \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} p(t_1) &= -\varphi_x(x(t_1, u)) - q, \\ \langle \varphi_x(x(t_1, u)) + q, x(t_1, v) - x(t_1, u) \rangle &= \varphi(x(t_1, v)) - \varphi(x(t_1, u)). \end{aligned}$$

Величина s определяется соотношением

$$\begin{aligned} \int_T (H(p(t, u, v), x(t, v), v, t) - H(p(t, u, v), x(t, v), u, t)) dt = \\ = \left\langle \int_T H_u(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s, v - u \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения задачи о неподвижной точке (3) используется итерационный алгоритм при $k \geq 0$:

$$v^{k+1} = P_U(u + \alpha(\int_T H_u(p(t, u, v^k), x(t, v^k), u, t) dt + s^k)), \quad v^0 \in U, \quad (5)$$

в котором величина s^k удовлетворяет соотношению (4) при $v = v^k$.

2. Модель выпуска продукции с учетом вредных выбросов

Рассмотрим модель выпуска продукции с учетом вредных выбросов, исследуемую в [7, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= (1 - \alpha - \beta)F(K) - \mu K, \\ \frac{dP}{dt} &= (1 - d\beta)F(K) - bP, \end{aligned} \quad (6)$$

где $K(t)$ – капитал; $P(t)$ – объем загрязнения; $F(K) = 10K^{0.5}$ – объем выпуска; $\alpha \geq 0$; $\beta \geq 0$ – доли выпуска на потребление и борьбу с загрязнением соответственно; μ – доля выбытия капитала; d – удельное загрязнение (ед. продукции); b – скорость очистки; r – ставка дисконтирования.

Ставится задача максимизации полезности (общего благосостояния) от выпускаемой продукции с учетом отрицательного влияния загрязнения:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^T e^{-rt} [(\alpha F(K))^{0.5} - P^{1.1} / 5000] dt \rightarrow \max. \quad (7)$$

Ограничения на управляющие параметры следующие:

$$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1. \quad (8)$$

Для ее численного решения приведем систему к виду, не содержащему интегралов:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= (1 - \alpha - \beta)10K^{0.5} - \mu K, \\ \dot{P} &= (1 - d\beta)10K^{0.5} - bP, \\ \dot{L} &= e^{-rt} \left((10\alpha)^{0.5} K^{0.25} - P^{1.1} / 5000 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Функционал примет вид

$$I(\alpha, \beta) = -L(T) \rightarrow \min. \quad (10)$$

Значения числовых параметров равны: $\mu = 0.06$; $b = 0.1$; $d = 10$; $r = 0.05$.

В статье [10] проведено аналитическое исследование и получены две пары приближенно-оптимальных решений данной задачи:

$$\alpha_1^* = 0.68462, \beta_2^* = 0.06992; \quad \alpha_2^* = 0.7264, \beta_2^* = 0.0.$$

Начальные условия для переменных состояния в [10] не задавались.

В данной работе при проведении численных расчетов задачи в качестве начального состояния выбиралось стационарное решение системы до воздействия на нее управлением. Для этого приравняем нулю управление ($\alpha = 0, \beta = 0$) и решим систему уравнений:

$$10K^{0.5} - \mu K = 0,$$

$$10K^{0.5} - bP = 0.$$

Решив систему относительно K, P , получаем следующие выражения:

$$K^* = 100 / \mu^2; P^* = 100 / (b\mu).$$

Далее модель приводилась к безразмерному виду заменой переменных:

$$y_1 = K / K^*; y_2 = P / P^*; y_3 = L.$$

Отсюда, $K = y_1 \cdot K^*$; $P = y_2 \cdot P^*$; $L = y_3$.

Система примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\dot{K}}{K^*} = \frac{(1-\alpha-\beta)10K^{0.5} - \mu K}{K^*} = \frac{(1-\alpha-\beta)10y_1^{0.5}(K^*)^{0.5} - \mu y_1 K^*}{K^*} = \\ &= \frac{(1-\alpha-\beta)10y_1^{0.5}}{(K^*)^{0.5}} - \mu y_1 = \frac{(1-\alpha-\beta)10y_1^{0.5}}{(100/\mu^2)^{0.5}} - \mu y_1 = (1-\alpha-\beta)\mu y_1^{0.5} - \mu y_1, \\ \dot{y}_2 &= \frac{\dot{P}}{P^*} = \frac{(1-d\beta)10K^{0.5} - bP}{P^*} = \frac{(1-d\beta)10y_1^{0.5}(K^*)^{0.5} - by_2 P^*}{P^*} = \\ &= \frac{(1-d\beta)10y_1^{0.5}(K^*)^{0.5}}{P^*} - by_2 = \frac{(1-d\beta)10y_1^{0.5}(100/\mu^2)^{0.5}}{100/(b\mu)} - by_2 = \\ &= (1-d\beta)by_1^{0.5} - by_2, \\ \dot{y}_3 &= \dot{L} = e^{-rt} \left((10\alpha)^{0.5} K^{0.25} - P^{1.1} / 5000 \right) = \\ &= e^{-rt} \left((10\alpha)^{0.5} y_1^{0.25} (K^*)^{0.25} - y_2^{1.1} \cdot (P^*)^{1.1} / 5000 \right) = \\ &= e^{-rt} \left((10\alpha)^{0.5} y_1^{0.25} (100/\mu^2)^{0.25} - y_2^{1.1} \cdot (100/b\mu)^{1.1} / 5000 \right) = \\ &= e^{-rt} \left(10\alpha^{0.5} y_1^{0.25} / \mu^{0.5} - y_2^{1.1} \cdot (100/(b\mu))^{1.1} / 5000 \right). \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (1 - \alpha - \beta)\mu y_1^{0.5} - \mu y_1, & y_1(0) &= 1, \\ \dot{y}_2 &= (1 - d\beta)by_1^{0.5} - by_2, & y_2(0) &= 1, \\ \dot{y}_3 &= e^{-rt} \left(10\mu^{-0.5}\alpha^{0.5}y_1^{0.25} - (100/(b\mu))^{1.1} \cdot (1/5000) \cdot y_2^{1.1} \right), & y_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

Для удобства перейдем в задаче к стандартным переменным x и u (обозначим y за x , α и β за u_1 и u_2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 - u_1 - u_2)\mu x_1^{0.5} - \mu x_1, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= (1 - du_2)bx_1^{0.5} - bx_2, & x_2(0) &= 1, \\ \dot{x}_3 &= e^{-rt} \left(10\mu^{-0.5}u_1^{0.5}x_1^{0.25} - (100/(b\mu))^{1.1} \cdot (1/5000) \cdot x_2^{1.1} \right), & x_3(0) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$F(u_1, u_2) = -x_3(T) \rightarrow \min.$$

Численные расчеты проводились с приведенной системой (11).

3. Численные эксперименты

В источниках [7, 10] не указано значение времени T . Поэтому расчетное значение T подбиралось таким образом, чтобы функционал благосостояния

$$F(u_1, u_2) = -\int_0^T e^{-rt} \left(10\mu^{-0.5}u_1^{0.5}x_1^{0.25} - (100/(b\mu))^{1.1} \cdot (1/5000) \cdot x_2^{1.1} \right) dt$$

практически не менялся при дальнейшем увеличении T (изменение не превышало 1%). Результаты представлены в таблице 1. Экспериментально было определено значение T , приближенно равное 80 единицам. Таким образом, оптимизация параметров модели проводилась на отрезке $[0, 80]$.

Таблица 1. Значения функционала благосостояния

T	Значение функционала приведенной модели (F)	$\frac{ F^{k+1} - F^k }{ F^k }$
1	-21,4872	
5	-112,7012	4,2450389069
10	-201,9331	0,7917564321
15	-270,8653	0,3413615697
20	-323,421	0,1940289140
25	-363,2181	0,1230504513
30	-393,2582	0,0827054048
40	-432,9987	0,1010544726
50	-455,6659	0,0523493489
60	-468,6847	0,0285709332

70	-476,224	0,0160860809
80	-480,6262	0,0092439692
90	-483,2158	0,0053879709
100	-484,7491	0,0031731164

Также был проведен численный анализ рассматриваемой задачи на выполнение свойства неотрицательности переменных состояния $x_1(t), x_2(t)$. По физическому смыслу они должны быть неотрицательными, так как обозначают объем капитала и загрязнения, соответственно. Анализ выполнялся путем численных расчетов задачи Коши для безразмерной модели при различных значениях параметров u_1, u_2 . В ходе численных расчетов было получено, что для $u_2 > 0.1$ при любых допустимых значениях u_1 переменная $x_2(t)$ на рассматриваемом интервале с некоторого момента принимает отрицательные значения. Поэтому допустимое множество было ограничено следующими условиями:

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_2 \leq 0.1, u_1 + u_2 \leq 1.$$

Отдельно решалась задача проектирования на указанное множество, при этом рассматривалось 9 областей, в которые может попасть проектируемая точка. Для каждой из этих областей легко определяется проекция точки (Рис. 1).

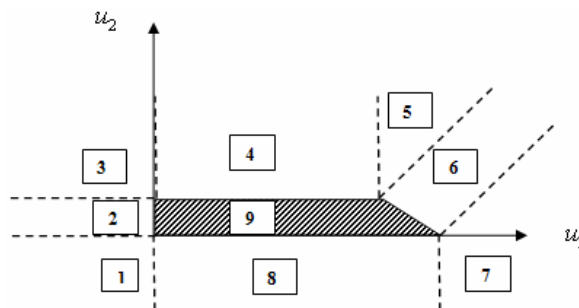


Рис. 1. Области проектирования на допустимое множество управлений

Функция Понtryгина и ее частные производные по состоянию и управлению имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 H &= p_1 \cdot ((1 - u_1 - u_2)\mu x_1^{0.5} - \mu x_1) + p_2 ((1 - du_2)bx_1^{0.5} - bx_2) + \\
 &+ p_3 e^{-rt} \left(10\mu^{-0.5} u_1^{0.5} x_1^{0.25} - (100 / (b\mu))^{1.1} \cdot (1 / 5000) x_2^{1.1} \right), \\
 H_{x_1} &= 0.5\mu(1 - u_1 - u_2)p_1 x_1^{-0.5} - \mu p_1 + 0.5b(1 - du_2)p_2 x_1^{-0.5} + \\
 &+ 2.5\mu^{-0.5} e^{-rt} u_1^{0.5} p_3 \cdot x_1^{-0.75}, \\
 H_{x_2} &= -bp_2 - (100 / (b\mu))^{1.1} \cdot (1.1 / 5000) e^{-rt} p_3 x_2^{0.1}, \\
 H_{x_3} &= 0,
 \end{aligned}$$

$$H_{u_1} = -\mu p_1 x_1^{0.5} + 5\mu^{-0.5} e^{-rt} u_1^{-0.5} p_3 x_1^{0.25},$$

$$H_{u_2} = -\mu p_1 x_1^{0.5} - bdp_2 x_1^{0.5}.$$

Задача о неподвижной точке (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} v &= P_U(u_1 + \alpha(\int_T H_{u_1}(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s_1), \\ &u_2 + \alpha(\int_T H_{u_2}(p(t, u, v), x(t, v), u, t) dt + s_2)), \\ u &= (u_1, u_2) \in U, v = (v_1, v_2) \in U, s = (s_1, s_2) \in R^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Дифференциально-алгебраическая сопряженная система:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -0.5\mu(1 - u_1 - u_2)p_1 x_1^{-0.5} + \mu p_1 - 0.5b(1 - du_2)p_2 x_1^{-0.5} - \\ &- 2.5\mu^{-0.5} e^{-rt} u_1^{0.5} p_3 \cdot x_1^{-0.75} - r_1(t), \end{aligned}$$

$$\dot{p}_2(t) = bp_2 + \left(\frac{100}{b\mu}\right)^{1.1} \frac{1.1}{5000} \cdot e^{-rt} p_3 x_2^{0.1} - r_2(t),$$

$$\dot{p}_3(t) = -r_3(t),$$

$$\begin{aligned} &(H_{x_1}(p(t), x(t, u), u, t) + r_1(t))(x_1(t, v) - x_1(t, u)) + \\ &+ (H_{x_2}(p(t), x(t, u), u, t) + r_2(t))(x_2(t, v) - x_2(t, u)) + \\ &+ (H_{x_3}(p(t), x(t, u), u, t) + r_3(t))(x_3(t, v) - x_3(t, u)) = \\ &= H(p(t), x(t, v), u, t) - H(p(t), x(t, u), u, t), \end{aligned}$$

$$p_1(T) = 0,$$

$$p_2(T) = 0,$$

$$p_3(T) = 1.$$

Программная реализация численного алгоритма осуществлялась на языке программирования Fortran PowerStation 4.0 (FPS). Численный итерационный алгоритм (5) для решения задачи о неподвижной точке (12) проводился до первого строгого улучшения управления $u \in U$. Далее строилась новая задача о неподвижной точке и итерационный алгоритм расчета повторялся. В качестве критерия остановки решения последовательных задач улучшения управления выбиралось условие $\|v^{k+1} - v^k\| \leq \varepsilon \|v^k\|$ в евклидовой норме, где $\varepsilon > 0$ - заданная точность, v^k - релаксационная последовательность генерируемых управлений. Блок-схема алгоритма представлена на рисунке 2. Численное интегрирование задач Коши для дифференциальных систем уравнений реализовывалось методом Рунге-Кутты-Вернера переменного (5-6) порядка и шага с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL FPS.

В качестве заданной точности расчетов выбиралось значение $\varepsilon = 10^{-5}$. Расчеты проводились для различных начальных значений параметров, в том числе, для приближенно-оптимальных значений, полученных в статье [10]. Расчеты проводились при различных значениях параметра α , ука-

занных в таблице. В итоге рассматриваемым методом неподвижных точек были получены расчетно-оптимальные значения параметров задачи $\hat{v}_1 = 0.9, \hat{v}_2 = 0.1$, которым соответствует значение функционала $\hat{F} = F(\hat{v}_1, \hat{v}_2) = -537,48$. Отметим, что полученным в работе [10] оптимальным параметрам соответствуют следующие значения функционала на рассматриваемом интервале наблюдения:

$$F(\alpha_1^*, \beta_1^*) = -480,78, \alpha_1^* = 0.68462, \beta_2^* = 0.06992,$$

$$F(\alpha_2^*, \beta_2^*) = -440,37, \alpha_2^* = 0.7264, \beta_2^* = 0.0.$$

Результаты расчетов представлены в таблице 2.

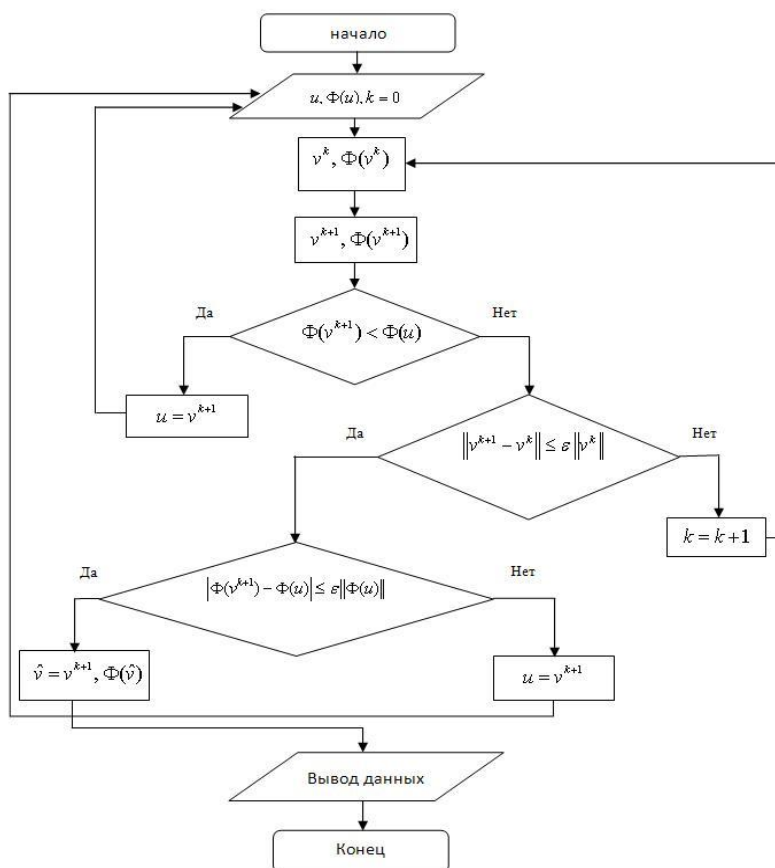


Рис. 2. Блок-схема алгоритма метода неподвижных точек

Таблица 2. Результаты расчетов параметров модели

α	u	v^0	\hat{v}	$F(\hat{v})$	Число ЗНТ
1	0.01	0.01	0.900	-537.48	3
	0.01	0.01	0.100		
	0.1	0.1	0.900	-537.48	3
	0.1	0.1	0.100		
	0.3	0.3	0.900	-537.48	2
	0.01	0.01	0.100		
	0.6	0.6	0.900	-537.48	2
	0.01	0.01	0.100		
	0.9	0.9	0.900	-537.48	2
	0.01	0.01	0.100		
	0.685	0.685	0.900	-537.48	2
	0.07	0.07	0.100		
	0.726	0.726	0.900	-537.48	2
	0.0	0.0	0.100		
10^{-6}	0.685	0.685	0.900	-537.48	682
10^{-3}	0.685	0.685	0.900	-537.48	2
	0.07	0.07	0.100		
10^3	0.685	0.685	0.900	-537.48	2
	0.07	0.07	0.100		
10^6	0.685	0.685	0.900	-537.48	2
	0.07	0.07	0.100		

Заключение

Рассматриваемый в работе метод неподвижных точек разработан для оптимизации параметров нелинейных динамических систем. Метод характеризуется отсутствием трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования, характерной для градиентных методов. Сходимость метода регулируется выбором одного проекционного параметра $\alpha > 0$, что значительно упрощает настройку метода для решения конкретных прикладных задач. Указанные свойства метода являются существенными факторами повышения эффективности решения задач параметрической оптимизации. Проведенные численные расчеты и полученные результаты подтверждают достаточно высокую эффективность предлагаемого метода в рамках рассматриваемой модельной задачи.

Литература

1. Ащепков Л.Т. Идентификации динамических систем как задача управления параметрами / Л.Т. Ащепков, А.В. Новосельский, А.И. Тятушкин // Автоматика и телемеханика. – 1975. - № 3. – С. 178-182.
2. Бартенев О.В. Современный Фортран. – М.: Диалог МИФИ, 2000. – 449 с.

3. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 3. – М.: Диалог МИФИ, 2001. – 368 с.
4. Булдаев А.С. Метод неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем / А.С. Булдаев, И.-Х.Д. Хишектеуева // Автоматика и телемеханика. - 2013. - № 12. - С. 5–15.
5. Булдаев А.С. Поиск неподвижных точек операторов проектирования в задачах параметрической оптимизации систем / А.С. Булдаев, Б. Очирбат, И.-Х.Д. Хишектеуева // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. - 2012. - № 2. - С. 4-14.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.
7. Тятюшкин А.И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука, 2006. – 343 с.
8. Хишектеуева И.-Х.Д. Алгоритм оптимизации параметров нелинейных динамических систем // Вестник Бурятского государственного университета. – 2013. - Вып. 9 - С. 39-44.
9. Хишектеуева И.-Х.Д. Расчет оптимальных параметров динамических систем методом неподвижных точек // Программные системы: теория и приложения: электрон. научн. Журн. - 2014. - Т. 5, № 5(23). - С. 29-35.
10. Kiler E., Spens M., Zekchauser P. Options Control of Pollution of Surroundings // J. of Economic Theory. – 1972. – Vol. 4, No 1. – P. 57-71.

References

1. Ashchepkov L.T. Identification of dynamic systems as a control problem of parameters (in Russian) / L.T. Ashchepkov, A.V. Novoselskii, A.I. Tyatyushkin // Avtomatika i telemekhanika. – 1975, No. 3. – P. 178-182.
2. Barteniyev O.V. Modern Fortran (in Russian). – М.: Dialog MIFI, 2000. – 449 p.
3. Barteniyev O.V. Fortran for professionals. Math library IMSL. Part 3 (in Russian). – М.: Dialog MIFI, 2001. – 368 p.
4. Buldaev A.S. The fixed method point in parametric optimization problems for systems (in Russian) / A.S. Buldaev, I.-Kh.D. Khishektueva // Avtomatika i telemekhanika. - 2013. – No. 12. - P. 5–15.
5. Buldaev A.S. Searching of the fixed points of operators of projection in the problems of parametric optimization of systems (in Russian) / A.S. Buldaev, B. Ochirbat, I.-Kh.D. Khishektueva // Vestnik of BSU. Matematika, informatika. – 2012. – No. 2. - P. 4-14.
6. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Numerical methods (in Russian). – М.: Nauka. 1989. – 432 p.
7. Tyatyushkin A.I. Multimethod Technique for Optimization of Control Systems (in Russian). – Novosibirsk: Nauka, 2006. – 343 p.
8. Khishektueva I.-Kh.D. Algorithm for optimization of parameters of nonlinear dynamic systems (in Russian) // Vestnik of BSU. – 2013. - No. 9. - P. 39-44.
9. Khishektueva I.-Kh.D. The calculation of the optimal parameters of dy-

dynamic systems by fixed points (in Russian) // Program. Sist.: Teor. Prilozheniya., Electronic Journal of Ailamazyan Program Syst. Inst. RAS. – 2014. - No. 5(23). - P. 29–35.

10. Kiler E., Spens M., Zekchauer P. Options Control of Pollution of Surroundings // J. of Economic Theory. – 1972. – Vol. 4, No 1. – P. 57-71.

Хишектыева Ишин-Хорло Дамбадоржиевна, инженер-программист Научно-образовательного и инновационного центра системных исследований и автоматизации (НОИЦ СИА) Бурятского государственного университета, e-mail: ishin@ulanovka.ru.

Khishektueva Ishin-Khorlo Dambadorzhievna, software engineer of Scientific-educational and innovative center for systems study and automation (SEIC SSA) of Buryat State University, e-mail: ishin@ulanovka.ru.

УДК 519.853

© Р. Энхбат, Б. Барысбек

МАКСИМИЗАЦИЯ НОРМЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КОМПАКТЕ

В этой работе мы предлагаем методы нахождения ε -приближенного решения задачи максимизации нормы на произвольном компакте конечномерного пространства.

Ключевые слова: максимизация нормы, произвольный компакт.

© R. Ekhbat, B. Barysbek

MAXIMIZING THE NORM ON AN ARBITRARY COMPACT

In this paper, we propose methods for finding ε -approximate solutions to maximize the norm on an arbitrary compact finite-dimensional space.

Keywords: maximizing the norm, arbitrary compact.

Введение

Задача максимизации нормы на некотором множестве является частным случаем общей задачи максимизации выпуклой функции, которая, как известно, относится к классу NP-hard задач. Методы отсечения для задачи выпуклой максимизации впервые были предложены Х.Туй в 1964 году [9]. До 1990-х годов основными методами решения задач этого класса были такие методы, как: метод отсечения [9], метод погружения [1] и метод ветвей и границ [3, 4, 5, 6]. Условия глобальной для этой задачи были сформулированы А.С. Стрекаловским в 1987 году [8]. Первый алгоритм, основанный на условиях глобальной оптимальности и понятии разрешающего набора, был предложен в работе [2, 7]. Этот алгоритм был предназначен для решения выпуклых задач на простых множествах, таких как: параллелепипед, шар и симплекс. В этой работе мы обсуждаем возможность нахождения ε -приближенного решения задачи максимизации нормы на невыпуклом компакте.

1. Аппроксимация линии уровня функции и её свойства

Рассматривается задача

$$\|x\| \rightarrow \max, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где D – произвольный компакт.

Пусть даны числа $z > 0$ и $\delta \leq z\sqrt{2}$. Обозначим

$$U(z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = z\}.$$

Рассмотрим на сфере $U(z)$ сеть $A(z)$

$$A(z) = \{y^1, \dots, y^N \mid \|y^i\| = z, i = 1, \dots, N\}, N \geq 2n.$$

обладающую следующими свойствами:

$$1) \forall i = 1, \dots, N; \delta = \delta_i \triangleq \min \{\|y^i - y^j\| \mid j \neq i\}.$$

$$2) \forall x \in U(z), \exists \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \dots, \mathcal{G}^n \in A(z):$$

$$\mathcal{G}^i = \mathcal{G}^i(x), \|\mathcal{G}^i - \mathcal{G}^j\| = \delta, x \in B(\mathcal{G}^i, \delta), i, j = 1, \dots, n,$$

где $\mathcal{G}^k = y^{i_k}$:

$$B(\mathcal{G}^k, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \mathcal{G}^k\| \leq \delta\}, k = 1, \dots, n.$$

Аппроксимацию $A(z)$ назовём δ -сетью.

Далее, семейство точек $\{\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n\} \subset A(z)$, определённое свойством 2)

и зависящее от x , обозначим через $A(x)$. Из определения же вытекает единственность такого семейства.

Покажем, что

$$\langle \mathcal{G}^i, \mathcal{G}^j \rangle = (2z^2 - \delta^2) / 2, i \neq j, i, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Действительно, поскольку $\|\mathcal{G}^i - \mathcal{G}^j\| = \delta$, то

$$\|\mathcal{G}^i\|^2 - 2\langle \mathcal{G}^i, \mathcal{G}^j \rangle + \|\mathcal{G}^j\|^2 = \delta^2,$$

так как $\|\mathcal{G}^i\| = z$, то получаем (2).

Теперь подсчитаем $\|\mathcal{G}^1 + \mathcal{G}^2 + \dots + \mathcal{G}^n\|$, используя ту же информацию.

С учётом (5) имеем следующее

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^1 + \mathcal{G}^2 + \dots + \mathcal{G}^n\|^2 &= \langle \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^1 \rangle + \langle \mathcal{G}^2, \mathcal{G}^2 \rangle + \dots + \langle \mathcal{G}^n, \mathcal{G}^n \rangle + \\ &+ 2[\langle \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2 \rangle + \langle \mathcal{G}^2, \mathcal{G}^3 \rangle + \dots + \langle \mathcal{G}^{n-1}, \mathcal{G}^n \rangle] = nr^2 + \frac{n(n-1)}{2}(2z^2 - \delta^2) = \\ &= n^2 z^2 - \frac{n(n-1)\delta^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{G}^1 + \mathcal{G}^2 + \dots + \mathcal{G}^n\| = (n^2 z^2 - \frac{n(n-1)\delta^2}{2})^{1/2}. \quad (3)$$

Лемма 1. Элементы $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \dots, \mathcal{G}^n \in A(x)$ являются линейно независимыми.

Доказательство. Пусть, наоборот, существуют числа $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ такие что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{G}^i = 0. \quad (4)$$

Умножая (4) на $2\mathcal{G}^j$ с учётом (2), получаем следующую систему уравнений

$$(2z^2 - \delta^2) \sum_{i \neq j} \lambda_i + 2\lambda_j r^2 = 0, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Нетрудно привести матрицу этой системы к диагональному виду. Это можно сделать, например, следующим образом.

Сначала надо вычесть первую строку из каждой строки матрицы системы (5), за исключением первой, а затем первый столбец сложить со всеми другими столбцами. Получим матрицу следующего вида

$$\begin{pmatrix} 2z^2 + (n-1)(2z^2 - \delta^2) & 2z^2 - \delta^2 & \dots & 2z^2 - \delta^2 \\ 0 & \delta^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta^2 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы очевидно равен

$$(\delta^2)^{n-1} [2z^2 + (n-1)(2z^2 - \delta^2)] > 0.$$

Отсюда $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$, что и доказывает линейную независимость $\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n$.

Теперь проведём через точки $\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n$ касательные гиперплоскости к сфере $U(z)$:

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathcal{G}^i, x \rangle = \langle \mathcal{G}^i, \mathcal{G}^i \rangle = z^2\}, i = 1, \dots, n.$$

Найдём точку x^0 пересечения этих гиперплоскостей. Очевидно, она удовлетворяет системе уравнений:

$$\langle \mathcal{G}^i, x^0 \rangle = z^2, i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

В силу Леммы 2 такая точка x^0 существует и единственна. Обозначим $\rho = \|x^0\|$ и покажем, что $\rho > z$. Действительно,

$$z^2 = \langle y^i, x^0 \rangle \leq \|y^i\| \times \|x^0\| = z\rho.$$

Отсюда $z \leq \rho$. Если $z = \rho$, то тогда

$$\mathcal{G}^i = \gamma_i x^0, \gamma_i \neq 0, i = 1, \dots, n.$$

Последнее противоречит линейной независимости векторов $\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n$.
Итак

$$\rho > z. \quad (7)$$

Далее в силу линейной независимости $\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n$ существует единственная гиперплоскость H_0 , проходящая через $\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n$:

$$H_0 \triangleq H_0(\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \alpha\}, a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

При этом, поскольку $\mathcal{G}^i \in H_0, i = 1, \dots, n$, мы имеем

$$\langle a, \mathcal{G}^i \rangle = \alpha. \quad (9)$$

Далее, поскольку x^0 является решением системы (6), то

$$\langle \mathcal{G}^i, x^0 \rangle = z^2.$$

Отсюда, в силу линейной независимости $\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n$ вытекает, что

$$a = \frac{\alpha}{z^2} x^0. \quad (10)$$

и уравнение для H_0 принимает вид

$$H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x^0, x \rangle = z^2\}. \quad (11)$$

Далее нетрудно понять, что в гиперплоскости H_0 существует единственный элемент c , коллинеарный с вектором x^0 , при этом

$$\|c\| < \rho.$$

Последнее неравенство вытекает из того, что $x^0 \notin H_0$ в силу (7) и (11).

Лемма 2. На гиперплоскости H_0 существует единственная точка u , удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\|u - \mathcal{G}^i\| = \|u - \mathcal{G}^j\|, i, j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

При этом справедливо представление

$$u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{G}^i. \quad (13)$$

Доказательство.

а) Прежде всего, ясно, что $u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{G}^i \in H_0$, поскольку в силу (6)

$$\langle x^0, u \rangle = u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{G}^i, x^0 \rangle = z^2.$$

б) Далее, $\forall i = 1, \dots, n$, имеем

$$\|u - \mathcal{G}^i\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, \mathcal{G}^i \rangle + \|\mathcal{G}^i\|^2 = \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{G}^i \right\|^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{G}^i, \mathcal{G}^i \rangle + z^2.$$

Отсюда с помощью формул (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{G}^i\|^2 &= \frac{1}{n^2} \left[n^2 z^2 - \frac{n(n-1)}{2} \delta^2 \right] + z^2 - \frac{2}{n} \left[\frac{(n-1)(2z^2 - \delta^2)}{2} + z^2 \right] = \\ &= 2z^2 - \frac{n-1}{2n} \delta^2 - \frac{n-1}{n} (2z^2 - \delta^2) - \frac{2z^2}{n}. \end{aligned}$$

Производя очевидные упрощения, окончательно заключаем

$$\|u - \mathcal{G}^i\|^2 = \delta \left(\frac{n-1}{2n} \right)^{1/2}, i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

с) Теперь покажем единственность точки, для которой справедливы соотношения (12). Из равенств (12), возведённых в квадрат, сразу же вытекает

$$\beta = \langle u, \mathcal{G}^i \rangle = \langle u, \mathcal{G}^j \rangle, i, j = 1, \dots, n.$$

Если $\beta \neq 0$, то это означает, что точка u , удовлетворяющая (12), является решением системы уравнений

$$\langle \mathcal{G}^i, u \rangle = \beta, i = 1, \dots, n.$$

В силу Леммы 1 эта система имеет единственное решение.

Условие же $\beta = 0$ означает, что u ортогонально линейно независимой системе векторов $\{\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \dots, \mathcal{G}^n\}$, то есть $u = 0$. Последнее противоречит тому, что $u \in H_0$, поскольку $z > 0$.

Следствие 1. Справедливы равенства:

$$u = c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mathcal{G}^i.$$

Кроме того, точка c является решением следующих экстремальных задач:

$$\|x\| \rightarrow \min, x \in H_0, \tag{15}$$

$$\|x - x^0\| \rightarrow \min, x \in H_0. \tag{16}$$

Очевидно, второе утверждение Следствия 1 вытекает из перпендикулярности решения z задач (15) и (16) к векторам $(x - z), \forall x \in H_0$.

Следствие 2. Числа ρ и δ связаны соотношением

$$\rho = \frac{z^2 \sqrt{2n}}{(2z^2 n - (n-1)\delta^2)^{1/2}}. \tag{17}$$

Доказательство. Прежде всего, поскольку $c = \gamma x^0 \in H_0$, имеем

$$\langle x^0, c \rangle = \gamma \rho^2 = z^2,$$

откуда $\gamma = z^2 / \rho$. Тогда $\forall i = 1, \dots, n$

$$\|c - \mathcal{G}^i\|^2 = \|c\|^2 - \langle c, \mathcal{G}^i \rangle + \|\mathcal{G}^i\|^2 = \frac{z^4}{\rho^2} - 2 \frac{z^4}{\rho^2} + z^2 = z^2 - \frac{z^4}{\rho^2}.$$

Отсюда с помощью равенств (14) и Следствия 1 заключаем, что имеет место равенство

$$z^2 - \frac{z^4}{\rho^2} = \delta^2 \left(\frac{n-1}{2n} \right).$$

Разрешая это уравнение относительно ρ , получаем (17).

Следствие 3. При $\delta = z\sqrt{2}$ из (17) следует

$$\rho = 2\sqrt{n}. \tag{18}$$

Далее, введём следующее обозначение

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y^i, x \rangle \leq z^2, i = 1, \dots, N; y^i \in A(z) \right\}. \tag{19}$$

Очевидно, что M – выпуклое замкнутое множество.

Теорема 1. Многогранник M ограничен.

Доказательство. Очевидно, что $0 \in M$. Покажем теперь, что если $\exists h \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$th \in M, \forall t > 0, \tag{20}$$

то, непременно, $h = 0$.

Очевидно, что соотношение (20) возможно в том и только в том случае, когда

$$\langle y^i, h \rangle \leq 0, \forall i = 1, \dots, N. \quad (21)$$

Предположим, что для некоторого $k \in \{1, \dots, N\}$ имеет место строгое неравенство

$$\langle y^k, h \rangle < 0.$$

Обозначим теперь $z = -y^k$. Тогда нетрудно увидеть, что

$$z \in U(z) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = z\}$$

и $\langle z, h \rangle > 0$. Поскольку $h \neq 0$, то можно считать, что $h \in U(z)$.

По определению δ -сети существуют n линейно независимых элементов $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \dots, \mathcal{G}^n \in A(z)$ таких, что

$$z \in clB(\mathcal{G}^i, \delta), \|\mathcal{G}^i\| = z, i = 1, \dots, n.$$

Покажем, что элемент $z \in cone\{\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n\}$. Другими словами, что

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{G}^i, \quad (23)$$

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n \alpha_i > 0. \quad (24)$$

Поскольку $\{\mathcal{G}^1, \dots, \mathcal{G}^n\}$ – линейно независимая система, то представление (23) имеет место. Далее, из неравенства $\|z - \mathcal{G}^i\| \leq \delta$ следует, что

$$\langle z, \mathcal{G}^i \rangle \geq \frac{2z^2 - \delta^2}{2} \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Значит, $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Второе неравенство в (24) выполнено, поскольку $z \neq 0$.

А теперь, принимая во внимание (22), получаем:

$$0 < \langle z, h \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \mathcal{G}^i, h \rangle.$$

Отсюда следует, что $\exists p \in \{1, \dots, n\}$

$$\langle \mathcal{G}^p, h \rangle > 0. \quad (25)$$

Это означает, что $h \notin M$. Итак, (25) не может иметь места и потому

$$\langle y^i, h \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, N.$$

Из последних равенств заключаем, что $h = 0$, поскольку среди элементов сети $A(z)$ существует система из n линейно независимых векторов. Итак, теорема полностью доказана.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, какую сеть необходимо построить для того, чтобы утверждать, является ли данная точка ε -решением задачи (1) или нет.

2. Нахождение ε -решения

Теорема 2. Пусть

$$f(x) = \|x\|^2, f(z) = z^2, z \in \text{Argloc max}(f, \mathbb{D})$$

и число ρ определено формулой (17). Тогда, если существует такая точка $u \in \mathbb{D}$, что $f(u) > \rho^2$, то существует элемент $y^j \in A(z)$, для которого

$$\langle f'(y^j), u - y^j \rangle > 0. \quad (26)$$

Доказательство. Выше было показано, что многогранник M , определённый в (19), является ограниченным, причем,

$$\|x\| \leq \rho \quad \forall x \in M. \quad (27)$$

По условию $\exists u \in \mathbb{D} : \|u\| > \rho$. Значит, $u \notin M$. Поэтому $\exists j \in \{1, \dots, N\} :$

$$\langle y^j, x \rangle > z^2 = \langle y^j, y^j \rangle,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 4. Если $\mathbb{D} \subset M$, то $\sup(f, \mathbb{D}) \leq \rho^2$.

Следствие 5. $\forall \varepsilon > 0$ всегда найдётся $\delta > 0$, при котором соответствующая δ -сеть гарантирует нахождение ε -решения, то есть

$$\sup(f, \mathbb{D}) \leq f(z_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточно найти такое ρ , при котором

$$0 < \rho - z < \varepsilon.$$

Используя (17), приходим к следующему выражению для δ :

$$\delta^2 < \frac{2nr^2}{(n-1)} \left(\frac{(z+\varepsilon)^2 - z^2}{(z+\varepsilon)^2} \right). \quad (28)$$

Итак, в случае произвольного допустимого множества \mathbb{D} можно построить δ -сеть ($\delta = \delta(z), z^2 = f(z)$), которая будет «достаточна» для того, чтобы утверждать, что либо z является ε -решением задачи (1), либо можно указать точку y_j , в которой справедливо (26) (то есть нарушено условие оптимальности [8]).

Литература

1. Bulatov V.P. (1977), The Embedding Methods in Extremum Problems, Nauka, Novosibirsk.
2. Enkhbat R. (1990), Algorithms for Global Maximization of Convex Functions over Sets with a Special Structure, PhD thesis, Irkutsk State University, Irkutsk, Russia.
3. Horst R. (1986), A General Class of Branch and Bound Methods in Global Optimization with some New Approaches for Concave Minimization, Journal of Optimization Theory and Applications, 51, pp.271-291.
4. Horst R. (1987), Outer Cut Methods in Global Optimization, Springer - Verlag, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 304, pp.28-40.
5. Horst R. (1987), A New Branch and Bound Approach for Concave Minimization Problems, Springer - Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 41, pp.330-337.

6. Horst R. and Tuy H. (1990), Global Optimization (Deterministic Approaches), Springer, Berlin.
7. Strekalovsky A.S. and Enkhbat R. (1990), Global Maximum of Convex Functions on Arbitrary Sets, Dep.in VINITI, No. 1063, Irkutsk State University.
8. Strekalovsky A.S. (1987), On the Global Extremum Problem, Soviet Math.Doklady, 292(5), pp.1062-1066.
9. Tuy H. (1964), Concave Programming under Linear Constraints, Soviet Math.Doklady, 159(1), pp.32-35.

References

1. Bulatov V.P. (1977), The Embedding Methods in Extremum Problems, Nauka, Novosibirsk.
2. Enkhbat R. (1990), Algorithms for Global Maximization of Convex Functions over Sets with a Special Structure, PhD thesis, Irkutsk State University, Irkutsk, Russia.
3. Horst R. (1986), A General Class of Branch and Bound Methods in Global Optimization with some New Approaches for Concave Minimization, Journal of Optimization Theory and Applications, 51, pp.271-291.
4. Horst R. (1987), Outer Cut Methods in Global Optimization, Springer - Verlag, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 304, pp.28-40.
5. Horst R. (1987), A New Branch and Bound Approach for Concave Minimization Problems, Springer - Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 41, pp.330-337.
6. Horst R. and Tuy H. (1990), Global Optimization (Deterministic Approaches), Springer, Berlin.
7. Strekalovsky A.S. and Enkhbat R.(1990), Global Maximum of Convex Functions on Arbitrary Sets, Dep.in VINITI, No. 1063, Irkutsk State University.
8. Strekalovsky A.S. (1987), On the Global Extremum Problem, Soviet Math.Doklady, 292(5), pp.1062-1066.
9. Tuy H. (1964), Concave Programming under Linear Constraints, Soviet Math.Doklady, 159(1), pp.32-35.

Энхбат Р., профессор, директор Института математики Монгольского государственного университета, e-mail:enkhbat46@yahoo.com.

Барысбек Б., Монгольский Государственный Университет, Институт Математики, e-mail: barysbekb@outlook.com.

Enkhbat R., DSc, head of Institute of Mathematics, Mongolian State University, e-mail:enkhbat46@yahoo.com.

Barysbek B., Mongolian State University, Institute of Mathematics, e-mail: barysbekb@outlook.com.

Содержание

1. Математическое моделирование и обработка данных	
Бадмаев Б.Б., Дамдинов Б.Б., Лайдабон Ч.С. Анализ распространения сдвиговых волн в пропиточных растворах.....	3
Дмитриев А.В., Чимитдоржиев Т.Н., Дагуров П.Н. Метод построения фрактальной сигнатуры на основе поляриметрических радиолокационных данных.....	8
Мачулис В.В. Изменение амплитуды сезонных миграций в окрестностях устойчивых решений.....	13
2. Информационные системы и технологии	
Гаченко А.С., Ружников Г.М., Хмельнов А.Е. Создание инвестиционных ресурсов на основе WEB-решений.....	21
Федоров Р.К., Шумилов А.С. Создание и публикация WPS-сервисов на основе облачной структуры.....	29
3. Управляемые системы и методы оптимизации	
Булдаев А.С. Методы неподвижных точек принципа максимума....	36
Хишектуева И.-Х.Д. Оптимизация параметров модели выпуска продукции с учетом вредных выбросов.....	47
Энхбат Р., Барысбек Б. Максимизация нормы на произвольном компакте.....	58

Contents

1. Mathematical modeling and data processing	
Badmaev B.B., Damdinov B.B., Laidabon Ch.S. Analysis of propagation of shear waves in impregnate solutions.....	3
Dmitriev A.V., Chimitdorzhiev T.N., Dagurov P.N. A method of constructing fractal signatures for parametric radar data	8
Machulis V.V. Change of amplitude of seasonal migrations in neighbourhoods of steady solutions.....	13
2. Information Systems and Technology	
Gachenko A.S., Ruzhnikov G.M., Hmelnov A.E Creation of funds available for investment on the basis of WEB-solutions	21
Fedorov R.K., Shumilov A.S. Development and publication of WPS-services using the cloud infrastructure.....	29
3. Controlled systems and methods of optimization	
Buldaev A.S. Methods of fixed points of maximum principle.....	36
Khishektueva I.-Kh.D. Optimization of parameters of output model with regard harmful emissions.....	47
Enkhbat R., Barysbek B. Maximizing the norm on an arbitrary compact.....	58

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ,
ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ
«ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА»

Отбор и редактирование публикуемых статей производятся редакционной коллегией из ведущих ученых и приглашенных специалистов.

В журнал следует направлять статьи, отличающиеся высокой степенью научной новизны и значимостью. Каждая статья имеет УДК, а также письменный развернутый отзыв (рецензию) научного руководителя или научного консультанта, заверенный печатью. Рецензенты должны являться признанными специалистами по тематике рецензируемых материалов и иметь в течение последних 3 лет публикации по тематике рецензируемой статьи.

Автор статьи обязан заключить лицензионный договор о предоставлении неисключительных прав на использование созданного им произведения (статьи) ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет». Образец лицензионного договора представлен на сайте БГУ.

Общие требования	Тексты представляются в электронном и печатном виде. Файл со статьей может быть на дискете или отправлен электронным письмом. На последней странице – подпись автора(ов) статьи. Название статьи и аннотация даются на русском и английском языках. Аннотация (авторское резюме) должна заключать от 100 до 250 слов. После аннотации дать ключевые слова (не менее семи слов) на русском и английском языках. Несоответствие между русскоязычным и англоязычными текстами не допускается. Выполнить транслитерацию русского текста литературы латиницей.
Электронная копия	Статья представляется на русском языке в doc-файле, набранная в текстовом редакторе Microsoft Word. Текстовый редактор Microsoft Word (версии XP, 2003). В имени файла указывается фамилия первого автора.
Параметры страницы	Формат А5. Поля: левое – 1,5 см, верхнее, нижнее, правое – 1 см.
Форматирование основного текста	С нумерацией страниц внизу по центру. Абзацный отступ – 0,5 см. Интервал – одинарный.
Гарнитура шрифта	Times New Roman. Размер кегля – 11 пт.
Объем статьи (ориентировочно)	Кратких сообщений – 4-8 с., статей на соискание ученой степени кандидата наук – 8-15 с., на соискание ученой степени доктора наук – 15-30 с. Название статьи должно содержать не более 10 слов.
Сведения об авторах	Указываются фамилия, имя, отчество (полностью), ученая степень, звание, должность и место работы, страна, адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail (на русском и английском языках)

В начале статьи ставится подробный индекс УДК согласно действующим в настоящее время классификаторам. Далее следуют инициалы и фамилии авторов (полуужирный курсив, выравнивание по правому краю), название статьи (полуужирным шрифтом, по центру), аннотация, ключевые слова и перевод перечис-

ленных частей текста на английский язык. В конце документа после списка литературы приводятся сведения об авторах и их перевод на английский язык (фамилия, имя, отчество полностью, ученая степень, ученое звание, должность, место работы (указываются официальные названия организаций), контактный адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail). Ссылки на гранты приводятся в сноске на первой странице.

Статья должна быть структурирована и содержать введение, ряд разделов с возможными подразделами, заключение, список литературы.

Набор формул осуществляется в редакторе формул Microsoft Equation 3/4 или MathType 5/6. Не допускается: набор формул как текста (включая таблицу символов, надстрочные и подстрочные индексы), а также с применением автофигур; вставка формул как рисунков; сжатие формулы как рисунка. Не допускается набор формул с применением появившегося в Word 2007 нестандартного редактора формул, функционирующего только с форматом docx. Все формулы, на которые в тексте даются ссылки, выносятся в отдельную строку с нумерацией в круглых скобках в тексте по правому краю страницы (строка выравнивается по правому краю). Основной размер шрифта в формулах 11 пт.

- Список литературы – все работы необходимо пронумеровать, в тексте ссылки на литературу оформлять в квадратных скобках.

- Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются. Все статьи проходят проверку в системе «Антиплагиат. ВУЗ».

- Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ». Корректурa авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются. Гонорар авторам не выплачивается.

- Допустима публикация статей на английском языке, сведения об авторах, название, аннотацию и ключевые слова которых необходимо перевести на русский язык.

- Формат журнала 70 x 100 1/16.

- Желательно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Все объекты должны быть черно-белыми без оттенков. Рисунки и графики должны иметь четкое изображение и быть выдержаны в черно-белой гамме, лучше применять штриховку. Фотографии и рисунки в формате *.tif или *.jpg должны иметь разрешение не менее 300 dpi. Диаграммы, рисунки, графики должны прилагаться отдельными файлами, чтобы издательство имело возможность ввести в них правки. Математические формулы в текстах должны быть выполнены в MathType. Если работа содержит примеры на старославянском языке или языках народов, то отправить соответствующие символы.

Стоимость опубликования одной статьи составляет за одну страницу формата А5 для сотрудников БГУ – 150 р., для остальных – 300 р.

Оплата за публикацию статьи, авторами которой являются только аспиранты, не взимается. Должна прилагаться справка учреждения, подтверждающая, что авторы являются аспирантами этого учреждения.

Адрес: 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, Издательство БГУ.

Факс (301-2)-21-05-88

Научное издание

В Е С Т Н И К
БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015/4

Математика, информатика

В авторской редакции
Компьютерная верстка Д. О. Трунина

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 11.11.15. Формат 70 x 100 1/16.
Усл. печ. л. 5,69. Уч.-изд. л. 2,78. Тираж 1000. Заказ 265.
Цена свободная. Дата выхода в свет 16.11.15.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии Бурятского госуниверситета
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, За