



Адрес редакции:
670000, г. Улан-Удэ,
ул. Смолина, 24а
E-mail: univer@bsu.ru

Адрес издателя:
670000, г. Улан-Удэ,
ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com

Свидетельство о регистрации
ПИ №ФС77-36152 от 06 мая
2009 г. Федеральная служба по
надзору в сфере связи, инфор-
мационных технологий
и массовых коммуникаций (Рос-
комнадзор)

Редактор *Ж.В. Галсанова*
Компьютерная верстка
Н.Ц. Тахинаевой

Подписано в печать 20.06.13.
Формат 60 x 84 1/8.
Уч.-изд. л. 8,29. Усл. печ. л. 10,69.
Тираж 1000. Заказ 151.
Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Издательства БГУ
670000, г. Улан-Удэ,
ул. Сухэ-Батора, 3а

Учредитель
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Издается с 1998 г.

Выходит 1 раз в год

Выпуск МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА 9(2) / 2014

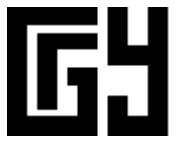
*Журнал включен Высшей аттестационной комиссией
в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов
и изданий, в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты диссертаций на соискание
ученых степеней доктора и кандидата наук*

Редакционный совет «Вестника БГУ»

С.В. Калмыков, чл.-кор. РАО, д-р пед. наук, проф. (председатель);
В.Е. Архинчеев, д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя);
Н.Н. Татарникова (зам. председателя, директор Издательства БГУ);
Т.С. Базарова, д-р пед. наук, доц.; *А.С. Булдаев*, д-р физ.-мат. наук,
проф.; *Д.И. Бураев*, д-р ист. наук, проф.; *А.В. Гаськов*, д-р пед. наук,
проф.; *Н.Ж. Дагбаева*, д-р пед. наук, проф.; *Ц.З. Доржиев*, д-р биол.
наук, проф.; *С.С. Имхелова*, д-р филол. наук, проф.; *Л.П. Ковалева*,
канд. филол. наук, проф.; *К.Б.-М. Митупов*, д-р ист. наук, проф.;
В.Е. Хитрихеев, д-р мед. наук, проф.; *И.И. Осинский*, д-р филос. наук,
проф.; *М.Н. Очиров*, д-р пед. наук, проф.; *М.В. Бадмаева*, д-р филос.
наук, доц.; *В.В. Хахинов*, д-р хим. наук, проф.

Редакционная коллегия выпуска

А.С. Булдаев, д-р физ.-мат. наук, проф. (главный редактор); *С.Н. Ва-
сильев*, акад. РАН; *В.И. Гурман*, д-р техн. наук, проф.; *Ж.Г. Дамбаев*,
д-р техн. наук, проф.; *А.В. Данеев*, д-р техн. наук, проф.; *А.И. Кожан-
нов*, д-р физ.-мат. наук, проф.; *А.В. Лакеев*, д-р физ.-мат. наук, проф.;
А.Д. Мижидон, д-р техн. наук, проф.; *Ни Минь Кань*, д-р наук, проф.;
Б. Очирбат, д-р наук, проф.; *В.А. Срочко*, д-р физ.-мат. наук, проф.;
Д.Ш. Ширанов, д-р физ.-мат. наук, проф.; *Р. Энхбат*, д-р наук, проф.



1. УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 517.97

© А.С. Булдаев, Г. Анхбаяр

УСЛОВИЯ УЛУЧШЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,
гранты 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_а, 13-01-92200-Монг_а

На основе дифференциально-алгебраических модификаций сопряженной системы получена новая нестандартная формула приращения функционалов управления, не содержащая остаточных членов разложений. Полученная формула дает возможность конструировать новые условия улучшения и оптимальности управления в рассматриваемом классе оптимизационных задач.

Ключевые слова: управляемая система, задача улучшения управления, условия оптимальности.

A.S. Buldaev, G. Ankhbayar

CONDITIONS FOR IMPROVEMENT AND OPTIMALITY IN OPTIMIZATION PROBLEMS OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

A new non-standard formula of functional control increment that doesn't contain residual terms of expansions has been obtained on the basis of differential-algebraic modifications of conjugated system. The resulting formula gives an opportunity to construct new conditions for improvement and optimality control in the considered class of optimization problems.

Keywords: control system, problem of control improvement, optimality conditions.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления со свободным правым концом:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в которой $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – вектор состояния, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ – вектор управления. В качестве допустимых управлений рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в компактном множестве $U \subseteq R^m$. Начальное состояние x^0 и промежуток управления T заданы.

Предполагаются выполненными следующие предположения для задачи (1), (2):

1) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема в R^n , функции $F(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ и их производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x, u, t) на множестве $R^n \times U \times T$;

2) функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$:
 $\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|$.

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t, v)$, $t \in T$ системы (2) для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in T$.

Введем функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t).$$

Для допустимого управления $v \in V$ обозначим $\psi(t, v)$, $t \in T$ – решение стандартной сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) \quad (3)$$

при $u(t) = v(t)$, $x(t) = x(t, v)$.

С помощью отображения

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi, x, u, t), \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad t \in T,$$

известный [1,2] принцип максимума Понтрягина для управления $u \in V$ представляется в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Краевая задача принципа максимума имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (5)$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (6)$$

Краевая задача (5), (6) в пространстве состояний сводится к поточечному соотношению (4) на множестве допустимых управлений, которое имеет форму задачи о неподвижной точке соответствующего оператора управления. Трудности решения краевой задачи (5), (6) и задачи о неподвижной точке (4) связаны с возможной разрывностью и многозначностью отображения u^* .

Одним из альтернативных подходов к оптимизации управления является последовательное решение задач улучшения управления, в которых для заданного управления $u \in V$ требуется найти управление $v \in V$ с условием $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

В работах [3-7] получены вычислительно эффективные условия улучшения управления, имеющие форму специальных краевых задач в пространстве состояний и задач о неподвижной точке конструируемых операторов управления, которые существенно проще по свойствам гладкости указанных выше задач (4) и (5), (6). Решение предлагаемых систем условий улучшения позволяет улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума, и получать новые необходимые условия оптимальности, усиливающие принцип максимума в рассматриваемых классах задач.

В настоящей работе рассматриваются новые дифференциально-алгебраические способы модификации сопряженной системы, позволяющие получать новые условия улучшения и оптимальности применительно к нелинейным по состоянию управляемым системам, которые существенно расширяют потенциал улучшения заданного управления. Многообразие способов выбора улучшающих управлений позволяет конструировать специальные вычислительные технологии улучшения, которые могут эффективно реализовываться с помощью параллельных вычислений на многопроцессорных компьютерах.

1. Краевые задачи улучшения управления

Далее для удобства частное приращение произвольной вектор-функции $g(y_1, \dots, y_l)$ по переменным y_{S_1} , y_{S_2} будем обозначать

$$\Delta_{y_{S_1} + \Delta y_{S_1}, y_{S_2} + \Delta y_{S_2}} g(y_1, \dots, y_l) = g(y_1, \dots, y_{S_1} + \Delta y_{S_1}, \dots, y_{S_2} + \Delta y_{S_2}, \dots, y_l) - g(y_1, \dots, y_l).$$

Приращение функционала (1) на допустимых управлениях u, v в соответствии с введенным обозначением выписывается в виде

$$\Delta_v \Phi(u) = \Delta_{x(t_1, v)} \varphi(x(t_1, u)) + \int_T \Delta_{x(t, v), v(t)} F(x(t, u), u(t), t) dt. \quad (10)$$

Обозначим $\Delta x(t) = x(t, v) - x(t, u)$.

Введем дифференцируемую вектор-функцию $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ с условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - q, \quad (11)$$

где величина q удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\langle \varphi_x(x(t_1, u)), \Delta x(t_1) \rangle + \langle q, \Delta x(t_1) \rangle = \Delta_{x(t_1, v)} \varphi(x(t_1, u)). \quad (12)$$

Тогда приращение терминальной части функционала в выражении (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta_{x(t,v)}\varphi(x(t_1,u)) &= -\langle p(t_1), \Delta x(t_1) \rangle = -\int_T \frac{d}{dt} \langle p(t), \Delta x(t) \rangle dt = \\ &= -\int_T \left\{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \langle p(t), \Delta_{x(t,v),v(t)} f(x(t,u), u(t), t) \rangle \right\} dt.\end{aligned}$$

С помощью полученного соотношения приращение функционала (10) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta_v \Phi(u^0) &= -\int_T \left\{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle - \Delta_{x(t,v),v(t)} H(p(t), x(t,u), u(t), t) \right\} dt = \\ &= -\int_T \left\{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_{v(t)} H(p(t), x(t,u), u(t), t) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{x(t,v)} H(p(t), x(t,u), v(t), t) \right\} dt.\end{aligned}\quad (13)$$

Введем модифицированную сопряженную систему для функции $p(t)$ с условиями (11), (12) в форме:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t,u), v(t), t) - r(t), \quad (14)$$

где величина $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$, $t \in T$ определяется в каждый момент времени $t \in T$ из алгебраического уравнения

$$\begin{aligned}\langle H_x(p(t), x(t,u), v(t), t), \Delta x(t) \rangle + \langle r(t), \Delta x(t) \rangle = \\ = \Delta_{x(t,v)} H(p(t), x(t,u), v(t), t).\end{aligned}\quad (15)$$

Тогда в силу дифференциально-алгебраической системы (14), (15) для $p(t)$ с начальными условиями (11), (12) формула приращения (13) принимает вид

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(p(t), x(t,u), u(t), t) dt. \quad (16)$$

Определим отображение $v^*(p, t) = v^*(p, x(t, u), t)$ и рассмотрим дифференциально-алгебраическую краевую задачу

$$\dot{x}(t) = f(x(t), v^*(p(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (17)$$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t, u), v^*(p(t), t), t) - r(t), \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\langle H_x(p(t), x(t, u), v^*(p(t), t), t), x(t) - x(t, u) \rangle + \\ + \langle r(t), x(t) - x(t, u) \rangle = \Delta_{x(t)} H(p(t), x(t, u), v^*(p(t), t), t),\end{aligned}\quad (19)$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - q, \quad (20)$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1, u)), x(t_1) - x(t_1, u) \rangle + \langle q, x(t_1) - x(t_1, u) \rangle = \Delta_{x(t_1)} \varphi(x(t_1, u)). \quad (21)$$

Предположим, что решение $(x(t), p(t))$, $t \in T$ краевой задачи (17) – (21) существует (возможно, не единственное), а управление, формируемое по правилу

$$v(t) = v^*(p(t), t), \quad t \in T,$$

является кусочно-непрерывным. Тогда $x(t) = x(t, v)$ и, в силу определения отображения u^* , получаем $\Delta_{v(t)} H(p(t), x(t, u), u(t), t) \geq 0$. Отсюда и из формулы (16) следует, что $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

В работе [3] рассматривалось альтернативное по отношению к (13) представление приращения функционала в форме

$$\begin{aligned}\Delta_v \Phi(u^0) &= -\int_T \left\{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle - \Delta_{x(t,v),v(t)} H(p(t), x(t,u), u(t), t) \right\} dt = \\ &= -\int_T \left\{ \langle \dot{p}(t), \Delta x(t) \rangle + \Delta_{v(t)} H(p(t), x(t,v), u(t), t) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{x(t,v)} H(p(t), x(t,u), u(t), t) \right\} dt.\end{aligned}$$

Соответственно вводилась другая модифицированная сопряженная система для функции $p(t)$ с условиями (11), (12) в форме:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t, u), u(t), t) - r(t),$$

где величина $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$, $t \in T$, определяется в каждый момент времени $t \in T$ из алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} \langle H_x(p(t), x(t, u), u(t), t), \Delta x(t) \rangle + \langle r(t), \Delta x(t) \rangle = \\ = \Delta_{x(t, v)} H(p(t), x(t, u), u(t), t). \end{aligned}$$

Тогда формула приращения (13) принимает вид

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H(p(t), x(t, v), u(t), t) dt, \tag{22}$$

и условие улучшения имеет форму следующей дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(p(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{23}$$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t, u), u(t), t) - r(t), \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \langle H_x(p(t), x(t, u), u(t), t), x(t) - x(t, u) \rangle + \\ + \langle r(t), x(t) - x(t, u) \rangle = \Delta_{x(t)} H(p(t), x(t, u), u(t), t), \end{aligned} \tag{25}$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - q, \tag{26}$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1, u)), x(t_1) - x(t_1, u) \rangle + \langle q, x(t_1) - x(t_1, u) \rangle = \Delta_{x(t_1)} \varphi(x(t_1, u)). \tag{27}$$

Алгебраические уравнения в краевых задачах улучшения всегда можно разрешить (возможно, не единственным способом). Проиллюстрируем один из способов на примере уравнения (25).

Действительно, в случае линейности по x функций $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$ уравнение (25) сводится к соотношению $\langle r(t), x(t) - x(t, u^0) \rangle = 0$. В этом случае полагаем $r(t) = 0$, $t \in T$.

В нелинейном случае определим $r(t)$ по следующему правилу.

Если для некоторого k выполняется условие $x_k(t) \neq x_k(t, u)$, то полагаем $r_i(t) = 0$, $i \neq k$, $r_k(t) = \frac{\Delta_{x(t)} H - \langle H_x, \Delta x(t) \rangle}{\Delta x_k(t)}$.

Если для всех k имеем $x_k(t) = x_k(t, u)$, то уравнение (25) выполняется тождественно. В этом случае определяем значение $r(t) = 0$.

Другой простой способ определения $r(t)$ можно использовать в случае квадратичных по x функций $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$

$$r(t) = \frac{1}{2} H_{xx}(p(t), x(t, u), u(t), t)(x(t) - x(t, u)).$$

При этом уравнение (25) выполняется тождественно. Данный способ, основанный на разложении приращения функции Понтрягина, применим для общего полиномиального по x случая.

Таким образом, можно определить однозначные функции $R(p, x, t)$, $Q(x)$, которые в общем случае определяются не единственным способом, для которых дифференциально-алгебраические краевые задачи сводятся к дифференциальным двухточечным краевым задачам. В частности, задача (23)-(27) сводится к задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(x(t), u^*(p(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0, \\ \dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t, u), u(t), t) - R(p(t), x(t), t), \\ p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)) - Q(x(t_1)). \end{aligned}$$

Определяя различные однозначные отображения $R(p, x, t)$, $Q(x)$ можно получать различные модификации условий улучшения в форме краевых задач стандартного вида.

2. Задачи о неподвижной точке операторов управления

Для удобства эквивалентного представления условий улучшения в форме задач о неподвижной точке операторов управления введем следующие обозначения.

В соответствии с [4] рассмотрим модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему в форме

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), w(t), t) - r(t), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \langle H_x(p(t), x(t), w(t), t), y(t) - x(t) \rangle + \langle r(t), y(t) - x(t) \rangle = \\ = \Delta_{y(t)} H(p(t), x(t), w(t), t) \end{aligned} \quad (29)$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \quad (30)$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1)), y(t_1) - x(t_1) \rangle + \langle q, y(t_1) - x(t_1) \rangle = \Delta_{y(t_1)} \varphi(x(t_1)). \quad (31)$$

Величины $r(t)$ и q всегда можно однозначно выразить из соответствующих алгебраических уравнений (29) и (31) (возможно, не единственным способом) и, таким образом, система (28)-(31) всегда может быть сведена к дифференциальной сопряженной системе.

Предположим, что при заданном способе сведения вспомогательная дифференциальная система для допустимых управлений u, v допускает однозначные решения:

$$p(t, u, v), t \in T \text{ — при } x(t) = x(t, u), w(t) = u(t), y(t) = x(t, v);$$

$$\gamma(t, u, v), t \in T \text{ — при } x(t) = x(t, u), w(t) = v(t), y(t) = x(t, v).$$

Из определения следует, что $p(t, u, u) = \gamma(t, u, u) = \psi(t, u), t \in T$.

В [4] показано, что в соответствии с обозначениями формула приращения (22) принимает вид

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H(p(t, u, v), x(t, v), u(t), t) dt, \quad (32)$$

и краевая задача улучшения (23)-(27) эквивалентна задаче о неподвижной точке

$$v(t) = u^*(p(t, u, v), x(t, v), t), t \in T, \quad (33)$$

Аналогично в соответствии с введенными обозначениями решение $p(t)$ и выходное управление $v(t)$ для краевой задачи (17)-(21) можно представить в виде

$$p(t) = \gamma(t, u, v), t \in T,$$

$$v(t) = u^*(\gamma(t, u, v), x(t, u), t), t \in T. \quad (34)$$

Формула приращения функционала (16) в новых обозначениях принимает вид

$$\Delta_v \Phi(u) = - \int_T \Delta_{v(t)} H(\gamma(t, u, v), x(t, u), u(t), t) dt. \quad (35)$$

Условие (34) также имеет форму задачи о неподвижной точке и является эквивалентным краевой задаче (17)-(21).

Таким образом, можно определить соответствующие однозначные отображения $P(u, v) = p(t, u, v), t \in T$ и $\Gamma(u, v) = \gamma(t, u, v), t \in T$ на множестве $V \times V$, отвечающие заданному способу сведения дифференциально-алгебраической сопряженной системы (28)-(31) к вспомогательной дифференциальной сопряженной системе. Определяя различные отображения $P(u, v)$ и $\Gamma(u, v)$, будем получать различные модификации условий улучшения в форме краевых задач и задач о неподвижной точке. Множества выходных управлений, соответствующих различным рассматриваемым отображениям, формируют всю совокупность улучшающих управлений. Рассматриваемый подход к реализации предлагаемых условий улучшения через различные однозначные отображения позволяет конструировать специальные вычислительные технологии улучшения, в которых на каждой итерации улучшения выбирается наилучшее по функционалу управление среди возможных модификаций условий улучшения.

Формулы приращения (33), (35), не содержащие остаточных членов разложений, позволяют сформулировать аналогичные работе [3] достаточные и необходимые условия оптимальности управления в задаче (1), (2).

Согласно формуле (33) для оптимальности управления $u \in V$ достаточно (и необходимо), чтобы

$$\Delta_{v(t)} H(p(t, u, v), x(t, v), u(t), t) \leq 0, \quad v \in V, t \in T.$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно требовать, чтобы $\Delta_v H(p, x, u(t), t) \leq 0, v \in U, p \in R^n, x \in R^n, t \in T$. Последнее условие эквивалентно соотношению $u(t) = u^*(p, x, t), p \in R^n, x \in R^n, t \in T$. Учитывая (33), множество возможных пар значений (x, p) можно сузить до множества

достижимости $D_{x,p}(t,u)$ в момент времени $t \in T$, определяемого как множество пар значений решений $x(t,v)$, $p(t,u,v)$ в момент t , когда управление v «пробегаёт» множество V

$$D_{x,p}(t,u) = \{(x, p) \in R^n \times R^n : x = x(t,v), p = p(t,u,v), v \in V\}.$$

Таким образом, для оптимальности управления $u \in V$ достаточно, чтобы

$$u(t) = u^*(p, x, t), \quad (x, p) \in D_{x,p}(t, u), \quad t \in T. \tag{36}$$

Рассмотрим формулу (35). Введем множество достижимости модифицированной сопряженной системы в момент времени $t \in T$

$$D_p(t, u) = \{p \in R^n : p = \gamma(t, v, u), v \in V\}.$$

Тогда для оптимальности управления $u \in V$ достаточно, чтобы

$$u(t) = u^*(p, x(t, u), t), \quad p \in D_p(t, u), \quad t \in T. \tag{37}$$

Очевидно, что в достаточных условиях оптимальности (36), (37) допустимы любые оценки по включению для соответствующих множеств достижимости. Принцип максимума (4) для управления $u \in V$ получается из достаточных условий (36) и (37) при $x = x(t, u)$, $p = p(t, u, u) = \psi(t, u)$.

Условие улучшения (34) позволяет сформулировать аналогичное работе [4] необходимое условие оптимальности управления в задаче (1), (2).

Для этого обозначим множество допустимых выходных управлений дифференциально-алгебраической краевой задачи (17)-(21):

$$V(u) = \{v \in V : v(t) = u^*(\gamma(t, u, v), x(t, u), t), \quad t \in T\}.$$

Имеем, если $u \in V(u)$, то

$$u(t) = u^*(\gamma(t, u, u), x(t, u), t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

т.е. управление u удовлетворяет принципу максимума.

Обратно, если u удовлетворяет принципу максимума (4), то оно удовлетворяет условию (33) при $v = u$. Следовательно, $u \in V(u)$.

Отсюда следует, во-первых, что краевая задача (17) – (21) для управления u , удовлетворяющего принципу максимума (4), всегда допускает решение $x(t) = x(t, u)$, $p(t) = \psi(t, u)$.

Следовательно, если краевая задача (17) – (21) не имеет решения, то управление u не удовлетворяет принципу максимума.

Во-вторых, в случае, если краевая задача (17) – (21) для управления u , удовлетворяющего принципу максимума (4), допускает решение, отличное от $x(t) = x(t, u)$, $p(t) = \psi(t, u)$, то появляется принципиальная возможность строгого улучшения данного экстремального управления. Такая возможность иллюстрируется в работе [4] в рамках краевой задачи (23)-(21).

Принцип максимума в задаче (1), (2) в терминах решения краевой задачи (17) – (21) можно сформулировать в следующей форме.

Принцип максимума. Для оптимальности управления $u \in V$ необходимо, чтобы пара $(x(t, u), \psi(t, u))$ была решением краевой задачи (17) – (21).

Заключение

В случае линейной по состоянию задачи (1), (2) (функции $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$, $\varphi(x)$ линейны по x) краевая задача (17) – (21) сводится к двум задачам Коши для сопряженной и фазовой систем. При этом предлагаемая процедура улучшения становится эквивалентной известному ψ -методу нелокального улучшения [2].

В нелинейной по состоянию задаче (1), (2) трудности решения возникающих вспомогательных дифференциальных краевых задач обуславливаются возможной негладкостью правой части и наличием собственных чисел матрицы Якоби с положительной вещественной частью. Это затрудняет применение стандартных методов для их решения (метод стрельбы, метод линеаризации, конечно-разностный метод).

Для решения предлагаемых дифференциально-алгебраических условий улучшения можно применить аналогичные работам [3, 8] вычислительно эффективные методы возмущений.

Выделим основные свойства рассматриваемых условий улучшения управления в классе нелинейных задач:

1. Трудоемкость улучшения определяется трудоемкостью решения специальной краевой задачи, которая по свойствам гладкости существенно проще краевой задачи принципа максимума.

2. В линейной по состоянию задаче оптимального управления со свободным правым концом процедура улучшения сводится к двум задачам Коши для фазовой и сопряженной систем.

3. Нелокальность улучшения управления, т.е. улучшаемое и улучшающее управление не связаны параметром близости, характерным для градиентных методов улучшения.

4. Отсутствие трудоемкой процедуры выпуклого или игольчатого варьирования управления, характерной для стандартных локальных методов улучшения.

5. Принципиальная возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума (в том числе, особых управлений).

Такая возможность появляется в случае неединственности решения краевой задачи улучшения.

Выделенные свойства являются существенными факторами повышения вычислительной и качественной эффективности решения задач оптимизации нелинейных управляемых систем. Рассматриваемый подход к реализации условий улучшения через их различные модификации, допускающие однозначные решения, позволяет оставаться в рамках классической теории решений дифференциальных уравнений и ориентирован на параллельные вычисления.

Литература

1. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1994. 340 с.
2. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
3. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. 260 с.
4. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшения управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2009. Т.2, №1. С. 94-106.
5. Булдаев А.С., Трунин Д.О. Нелокальное улучшение управлений в линейных по состоянию системах с терминальными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2009. №5. С. 7-12.
6. Булдаев А.С. Новый подход к оптимизации управляемых систем на основе краевых задач // Автоматика и телемеханика. 2011. №6. С. 87-94.
7. Булдаев А.С., Хишектеуева И.-Х.Д. Метод неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем // Автоматика и телемеханика. 2013. №12. С. 5-14.
8. Булдаев А.С. Проекционные методы возмущений в задачах оптимизации управляемых систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2014. Т.8. С. 29-43.

Булдаев Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел. (301-2) 217733, E-mail: buldaev@mail.ru

Анхбаяр Гелегдам, декан факультета математики и программного обеспечения Улан-Баторского университета.

Buldaev Alexander Sergeevich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, applied mathematics department, Buryat State University.

Ankhubayar Gelegbadam, dean of the faculty of mathematics and software, Ulaanbaatar University.

УДК 517.97

© И.Д. Бурлаков

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 12-01-98011-р_сибирь_a, 13-01-92200-Монг_a

Рассматривается проекционный метод нелокального улучшения в нелинейных задачах оптимального управления, для которого приводятся результаты численных экспериментов по анализу эффективности.

Ключевые слова: задача оптимального управления, нелокальное улучшение, вычислительный эксперимент.

I.D. Burlakov

EFFECTIVENESS ANALYSIS OF METHOD FOR NONLOCAL IMPROVEMENT IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

A projection method for nonlocal improvement in nonlinear optimal control problems is considered, for which the results of numerical experiments on the analysis of effectiveness are submitted.

Keywords: optimal control problem, nonlocal improvement, numerical experiment.

Введение

Теория оптимального управления развивалась во многих научных школах, включая отечественные, которые внесли значительный вклад в ее становление. Было разработано множество численных и приближенных методов решения задач оптимального управления, которые продолжают развиваться по разным направлениям (А.В. Аргучинцев, А.С. Булдаев, В.И. Гурман, В.А. Дыхта, В.И. Зубов, В.Б. Колмановский, В.Ф. Кротов, В.А. Срочко, А.И. Тятюшкин, Р.П. Федоренко, Ф.Л. Черноусько и другие).

В. Ф. Кротов в своей работе [10], описал общий метод глобального улучшения управлений на основе достаточных условий. Близкими к глобальному методу являются так называемые нелокальные методы улучшения в дифференциальных системах, разрабатываемые в работах В.А. Срочко и А.С. Булдаева.

Методы нелокального улучшения в отличие от локальных методов (например, метода условного градиента) не используют операцию слабого или игольчатого варьирования управления на каждой итерации с параметрическим поиском улучшающего управления (который является довольно трудоемким) в достаточно малой окрестности улучшаемого управления.

Нелокальное улучшение в различных классах задач оптимального управления опирается на точные формулы приращения целевых функционалов, т.е. на формулы без остаточных членов разложения. В результате получается улучшающая последовательность, которая может быть минимизирующей, на основе которой можно построить приближенное решение задачи.

А.С. Булдаев и В.А. Срочко в [3, 4, 5, 8] получили результаты для нелинейных, линейных, линейно-квадратичных и полиномиальных по состоянию задач оптимального управления, обладающие свойством нелокального улучшения управлений с использованием специальных сопряженных систем и краевых задач. Эти подходы дают возможность улучшать неоптимальные управления, удовлетворяющие принципу максимума, включая особые управления. А.В. Аргучинцев в работе [1] точные формулы приращения использовал для поиска решения задач оптимального управления гиперболическими системами.

В работе проводится численный анализ сравнительной эффективности новых модификаций нелокальных методов улучшения с использованием точных формул приращения для общих нелинейных задач [4].

1. Постановка задачи

Будем рассматривать задачу оптимального управления со свободным правым концом:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf, \quad (3)$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u(t) \in R^r$ – вектор управления. В качестве допустимых управлений рассматривается множество V кусочно-непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций со значениями в выпуклом компактном множестве $U \subset R^r$. Промежуток управления $[t_0, t_1]$ и начальное состояние x_0 заданы.

Аналогично [3] предполагаются выполненными следующие условия:

1) функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема на R^n , вектор-функции $F(x, u, t)$, $f(x, u, t)$ и их производные $F_x(x, u, t)$, $F_u(x, u, t)$, $f_x(x, u, t)$, $f_u(x, u, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (x, u, t) на множестве $R^n \times U \times T$;

2) функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n \times U \times T$ с константой $L > 0$

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|.$$

Эти условия гарантируют существование и единственность решения $x(t, v)$, $t \in [t_0, t_1]$ системы (1) – (2) для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Решать поставленную задачу (1) – (3) будем при помощи модифицированного проекционного метода нелокального улучшения управлений с дифференциально-алгебраической сопряженной системой [3, 4, 5]. Этот метод не содержит операцию выпуклого или игольчатого варьирования управления на каждой итерации улучшения.

Введем функцию Понтрягина

$$H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t),$$

где $p(t, u, v)$ – сопряженная переменная.

Для допустимого управления $u \in V$ и фиксированного параметра $\alpha > 0$ рассматривается проекционное отображение

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U(u(t) + \alpha H_u(p, x, u, t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где P_U – оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Дифференциальный принцип максимума (ДПМ) в задаче (1) – (3) для управления $u \in V$ с помощью отображения u^α представляется в виде

$$u(t) = u^\alpha(p(t, u, v), x(t, u), t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

Для выполнения ДПМ достаточно проверить условие (4) хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Далее рассмотрим дифференциально-алгебраическую сопряженную систему [4, 5]:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), w(t), t) - r(t), \quad (5)$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \quad (6)$$

$$H(p(t), y(t), w(t), t) - H(p(t), x(t), w(t), t) = \langle H_x(p(t), x(t), w(t), t) + r(t), y(t) - x(t) \rangle, \quad (7)$$

$$\varphi(y(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \langle \varphi_x(x(t_1)) + q, y(t_1) - x(t_1) \rangle. \quad (8)$$

Величины $r(t)$ и q всегда можно выразить из соответствующих алгебраических уравнений (7) и (8) (возможно и не единственным образом) [4, 5]. Такая модификация сопряженной системы позволя-

ет получить [5] формулу приращения целевой функции в задаче (1) – (3), которая не содержит остаточных членов разложений.

Если в задаче (1) – (3) $f(x, u, t)$, $F(x, u, t)$ линейны по x , то из [4, 5] следует, что $r(t) \equiv 0$, а если $\varphi(x)$ линейна, то $q = 0$.

Пусть дифференциально-алгебраическая сопряженная система допускает решение $p(t, u, v)$, $t \in [t_0, t_1]$ для допустимых управлений u, v при $w(t) = u(t)$, $x(t) = x(t, u)$, $y(t) = x(t, v)$. Таким образом, решив систему (5) – (8) можно однозначно определить отображение $P(u, v) = p(t, u, v)$, $t \in [t_0, t_1]$ на множестве $V \times V$ (возможно, не единственным образом).

Применим метод проекционных возмущений [4], где в качестве параметра возмущения рассматривается параметр проектирования $\alpha > 0$.

$$v(t) = P_U \left(u(t) + \alpha \left(H_u(p(t, u, v), x(t, v), u(t), t) + s(t) \right) \right), \quad t \in T. \quad (9)$$

$s(t)$ находится из алгебраического уравнения

$$H(p(t, u, v), x(t, v), v(t), t) - H(p(t, u, v), x(t, v), u(t), t) = \langle H_u(p(t, u, v), x(t, v), u(t), t) + s(t), v(t) - u(t) \rangle. \quad (10)$$

Невозмущенное условие получается из возмущенного (9) – (10), при $\alpha = 0$, которое имеет тривиальное решение $v(t) = u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Итерационный процесс решения задачи (9) – (10) имеет вид

$$v^{k+1}(t) = P_U \left(u^0(t) + \alpha \left(H_u(p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), u^0(t), t) + s(t) \right) \right), \quad (11)$$

$$H(p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t) - H(p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), u^0(t), t) = \langle H_u(p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), u^0(t), t) + s(t), v^k(t) - u^0(t) \rangle, \quad t \in T, \quad (12)$$

где $u^0 \in V$ – начальное приближение. $s(t)$ выражается из (12), причем, при вычислении $s(t)$ надо учесть некоторые условия:

1. Если все компоненты $v^k(t) = u^0(t)$, то алгебраическое уравнение (12) выполняется тождественно. В этом случае компоненты $s(t)$ могут принимать произвольные значения, тогда полагаем значения всех компонент $s(t) = 0$;

2. Если, хотя бы одна компонента вектора $v^k(t) \neq u^0(t)$, то полагаем значения всех остальных компонент $s_i(t) = 0$. Тогда для этой компоненты однозначно определяется соответствующая компонента $s(t)$ из формулы (12).

В случае линейной по управлению задачи (1) – (3) полагаем $s(t) = 0$, $t \in T$. [4, 5].

Итерационный процесс для расчета дифференциально-алгебраической сопряженной системы (5) – (8) представляется в форме:

$$\dot{p}^{k+1}(t) = -H_x(p^{k+1}(t), x^0(t), u^0(t), t) - r(t), \quad (13)$$

$$p^{k+1}(t_1) = -\varphi_x(x^0(t_1)) - q, \quad (14)$$

$$H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t) = \langle H_x(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t) + r(t), x^k(t) - x^0(t) \rangle, \quad (15)$$

$$\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \langle \varphi_x(x^0(t_1)) + q, x^k(t_1) - x^0(t_1) \rangle. \quad (16)$$

где $p^k(t) = p(t, u^0, v^k)$, $x^k(t) = x(t, v^k)$.

Вычисляя $r(t)$ и q из уравнений (15) – (16) также необходимо учитывать некоторые условия:

1. Если все компоненты $x^k(t) = x^0(t)$, то алгебраическое уравнение (15) выполняется тождественно. В этом случае компоненты $r(t)$ могут принимать произвольное значение, тогда выбираем значения всех компонент $r(t) = 0$. Также, если в конечный момент выполняется $x^k(t_1) = x^0(t_1)$, уравнение (16) обращается в тождество, поэтому задаем $q = 0$ для всех компонент;

2. Если, хотя бы одна компонента вектора $x^k(t) \neq x^0(t)$, соответствующая компонента $r(t)$ однозначно определяется для этой компоненты из формулы (15) при условии равенства нулю остальных компонент. Если при этом $t = t_1$, то соответствующая компонента для q определяется из уравнения (16) при условии равенства нулю остальных компонент.

В случае линейной по управлению задачи (1) – (3) полагаем $r(t) = 0$, $t \in T$, $q = 0$. [4, 5].

2. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводится на известных задачах в плане их численного решения тем или иным методом.

В примерах вычисленные значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах равномерной сетки с шагом дискретизации $\Delta t = 10^{-3}$ на отрезке $[t_0, t_1]$. В промежутках между соседними узлами сетки значение управления принималось постоянным и равным значению управления в левом узле. Численный расчет задачи проводился до первого улучшения. Далее строилась новая задача, и итерационный алгоритм повторялся. В качестве критерия остановки выбиралось условие $|\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k)| \leq |\Phi(u^k)| \cdot \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданная точность (в примерах $\varepsilon = 10^{-4}$). Эффективность методов также зависит и от алгоритмов, используемых для решения вспомогательных задач, например, интегрирование дифференциальных систем. Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось методом Рунге-Кутты-Вернера пятого или шестого порядка точности с помощью библиотеки IMSL языка Fortran PowerStation 4.0 [2]. За единицу трудоемкости, аналогично [3, 7], взято решение задачи Коши отдельно для фазовой и сопряженной системы. Сравнительный анализ методов решения проводится по суммарному количеству задач Коши.

Пример 1. Рассматривается задача, связанная с оптимизацией некоторого химического аппарата [9] (стр. 255 – 263). Данная задача также рассматривалась в работе [7].

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(k_1(u) + k_2(u) + k_3(u))x_1, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = k_1(u)x_1 - k_4(u)x_2, & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = k_4(u)x_2 - k_5(u)x_3, & x_3(0) = 0. \end{cases}$$

$$u(t) \in [0, 823], \quad t \in [0, 1].$$

$$\Phi(u) = -x_3(1) \rightarrow \min.$$

Система дифференциальных уравнений описывает реакции, протекающие в смеси трех веществ, где $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – их концентрация. Первым веществом является сырье, второе – промежуточный продукт, а третье – окончательный результат. Управление $u(t)$ является температурой, от которой зависят интенсивности реакции.

Функции $k_i(u)$, из системы дифференциальных уравнений, имеют вид

$$k_i(u) = C_i \exp\left[\frac{E_i}{R}\left(\frac{1}{658} - \frac{1}{u}\right)\right], \quad i = 1, \dots, 5,$$

Данный вид характерен для химической кинетики.

Значения постоянных (аналогично [7, 9]) равны

$$C_1 = 1.02, \quad C_2 = 0.93, \quad C_3 = 0.386, \quad C_4 = 3.28, \quad C_5 = 0.084, \quad R = 1.9865, \quad E_1 = 16000, \quad E_2 = 14000, \\ E_3 = 15000, \quad E_4 = 10000, \quad E_5 = 15000.$$

В [9] данная задача решалась при помощи метода проекции градиента (МПП), в [7] – методом условного градиента (МУГ) и методом условного квазиградиента 1-го порядка (МУК – 1), т.е. методами градиентного типа. В данной работе проводится расчет при помощи нелокального метода улучшения.

Для решения задачи введем необходимые конструкции.

Функция Понтрягина для заданной задачи записывается следующим образом:

$$H(p, x, u, t) = -p_1[k_1(u) + k_2(u) + k_3(u)]x_1 + \\ + p_2[k_1(u)x_1 - k_4(u)x_2] + p_3[k_4(u)x_2 - k_5(u)x_3].$$

Градиенты:

$$H_{x_1} = -p_1[k_1 + k_2 + k_3] + p_2k_1, \quad H_{x_2} = -p_2k_4 + p_3k_4, \quad H_{x_3} = -p_3k_5.$$

$$H_u = -p_1x_1\left[\sum_{i=1}^3 d_i(u)\right] + p_2x_1d_1(u) - p_2x_2d_4(u) + \\ + p_3x_2d_4(u) - p_3x_3d_5(u),$$

где $d_i(u) = \frac{dk_i(u)}{du} = \frac{E_i}{Ru^2} k_i(u), \quad i = 1, \dots, 5.$

Так как в данной задаче $f(x, u, t), F(x, u, t)$ и $\varphi(x)$ линейны по x , значит дифференциально-алгебраическая сопряженная система сведется к стандартной

$$\dot{p}_1(t) = p_1[k_1(u) + k_2(u) + k_3(u)] - p_2k_1(u), \quad p_1(1) = 0,$$

$$\dot{p}_2(t) = p_2k_4(u) - p_3k_4(u), \quad p_2(1) = 0,$$

$$\dot{p}_3(t) = p_3k_5(u), \quad p_3(1) = 1.$$

Итерационный процесс (11) – (12) для рассматриваемой задачи выглядит следующим образом:

$$u^{k+1}(t) = P_u\left(u^0(t) + \alpha\left(H_u(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) + s(t)\right)\right), \\ s(t) = \frac{H(p^k(t), x^k(t), u^k(t), t) - H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t)}{u^k(t) - u^0(t)} - \\ - H_u(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t). \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $x^k(t)$ и $p^k(t)$ – решение фазовой и сопряженной системы, соответственно, на k -ой итерации метода. $s(t)$ вычисляется, соблюдая условия описанные выше.

В качестве начального приближения выбиралось управление $u^0(t) \equiv 600$. В таблице 1 приводятся результаты, полученные рассматриваемым методом (ПМНУ), при различных значениях параметра α , и методами из [7, 9] (МУГ, МУК – 1, МПП) (Φ^* обозначает наилучшее значение функционала). Для МПП не указано число задач Коши, в связи с тем, что Р. П. Федоренко в [9] не вводил критерий трудоемкости.

Сравнительный анализ эффективности

	Φ^*	Число задач Коши
МУГ	-0.43620	876
МУК – 1	-0.43682	215
МПГ	-0.435	---
ПМНУ ($\alpha = 10^4$)	-0.43735	47
ПМНУ ($\alpha = 10^3$)	-0.43558	155
ПМНУ ($\alpha = 10^5$)	не сходится	---

При дальнейшем уменьшении параметра возмущения возрастает количество решенных задач Коши и падает точность значения функционала. При увеличении параметра возмущения до $\alpha = 10^5$ (и выше) ПМНУ не сходится.

На рисунках 1 и 2 показаны итоговое значение управления (рисунок 1) и фазовые траектории (рисунок 2) решения задачи, рассчитанные модифицированным проекционным методом нелокального улучшения.

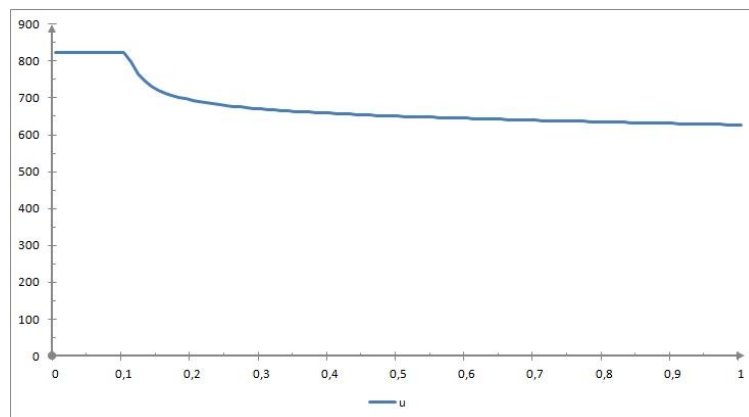


Рис. 1. Управление

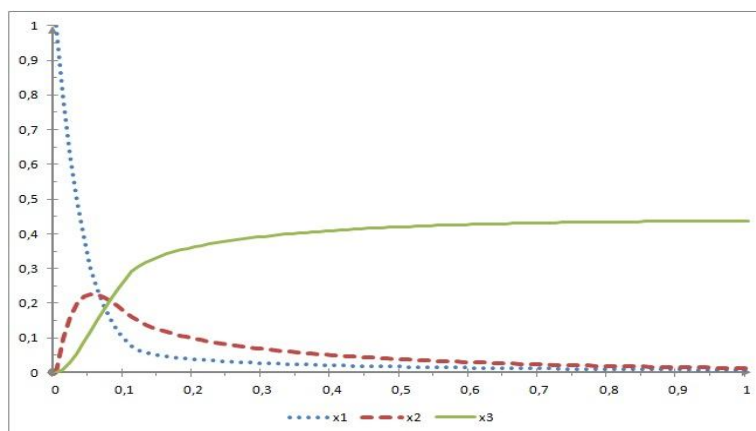


Рис. 2. Фазовые траектории

Пример 2. Рассматривается задача оптимального управления шаговым электродвигателем [3, 7].

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = -ax_2 - b \left[u_1 \sin(2x_1) + u_2 \sin\left(2x_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + u_3 \sin\left(2x_1 - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \\ \dot{x}_3(t) = x_1^2 + k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3. \end{cases}$$

$$x_1(0) = \frac{\pi}{3}, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0$$

$$u_i(t) \in [0, 16], \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in [0, 0.05].$$

$$\Phi(u) = x_3(0.05) \rightarrow \min.$$

Здесь $x_1(t)$ – положение вала двигателя, $x_2(t)$ – его скорость, $x_3(t)$ – требование стабилизации электродвигателя. Управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ соответствуют квадратам токов в обмотках. Требуется минимизировать функционал, т.е. привести положение вала к нулю при минимальных затратах.

Значения параметров (аналогично [3, 7]) равны

$$k_i = 0.001, \quad i = 1, 2, 3; \quad a = 50, \quad b = 1000.$$

В [7] данная задача решалась с помощью метода условного градиента (МУГ) и методами условного квазиградиента 1-го и 2-го порядка (МУК – 1, МУК – 2), в [3] с помощью метода проекционных возмущений условия оптимальности (МПВУО). В данной работе сравниваются результаты, полученные этими методами, с результатами модифицированного проекционного метода нелокального улучшения.

Аналогично примеру 1 введем необходимые конструкции.

Функция Понtryгина:

$$\begin{aligned} H(p, x, u, t) = & p_1x_2 - p_2 \left(ax_2 + b \left(u_1 \sin(2x_1) + u_2 \sin\left(2x_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + u_3 \sin\left(2x_1 - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \right) + p_3(x_1^2 + k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3). \end{aligned}$$

Градиенты:

$$H_{x_1} = -2bp_2 \left(u_1 \cos(2x_1) + u_2 \cos\left(2x_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + u_3 \cos\left(2x_1 - \frac{2\pi}{3}\right) \right) + 2p_3x_1, \quad H_{x_2} = p_1 - ap_2,$$

$$H_{x_3} = 0,$$

$$H_{u_1} = -bp_2 \sin(2x_1) + k_1p_3, \quad H_{u_2} = -bp_2 \sin\left(2x_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + k_2p_3, \quad H_{u_3} = -bp_2 \sin\left(2x_1 - \frac{2\pi}{3}\right) + k_3p_3.$$

Составим дифференциально-алгебраическую сопряженную систему ($q = 0$, так как $\varphi(x)$ линейна по x):

$$\dot{p}_1 = 2bp_2 \left(u_1 \cos(2x_1) + u_2 \cos\left(2x_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + u_3 \cos\left(2x_1 - \frac{2\pi}{3}\right) \right) -$$

$$-2p_3x_1 - r_1(t)$$

$$\dot{p}_2 = ap_2 - p_1 - r_2(t), \quad \dot{p}_3 = -r_3(t),$$

$$p_1(0.05) = 0, \quad p_2(0.05) = 0, \quad p_3(0.05) = -1,$$

где $r_i(t)$ определяется из уравнения (15):

$$r_i(t) = \frac{H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t)}{x^k(t) - x^0(t)},$$

$$-H_{x_i}(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t), \quad i = 1, 2, 3.$$

При его вычислении необходимо учитывать условия, описанные выше. $x^k(t)$ и $p^k(t)$ – решение фазовой и сопряженной системы, соответственно, на k -ой итерации метода. Применим итерационный процесс (11) – (12), где $s(t) = 0$, так как задача линейна по управлению. В качестве начального приближения возьмем управление $u_i^0(t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3$.

В таблице 2 приведены результаты, полученные для различных параметров α в методах МПВУО [3] и ПМНУ, и результаты, полученные методами из [7] (МУГ, МУК – 1, МУК) (Φ^* обозначает наилучшее значение функционала).

Таблица 2

Сравнительный анализ эффективности

	Φ^*	Число задач Коши
МУГ	0.00817	617
МУК – 1	0.00988	410
МУК – 2	0.00792	287
ПМНУ ($\alpha = 10^2$)	0.00779	309
МПВУО ($\alpha = 10^2$)	0.00779	309
ПМНУ ($\alpha = 150$)	0.00778	229
МПВУО ($\alpha = 50$)	0.00783	593
ПМНУ ($\alpha = 50$)	0.00784	477

Уменьшая параметр возмущения до $\alpha = 10$ в методе ПМНУ получаем значение функционала $\Phi^* = 0.00794$ при трудоемкости 243 задачи Коши (при дальнейшем уменьшении возрастает количество решенных задач Коши и падает точность значения функционала). При увеличении параметра возмущения до $\alpha = 200$ (и выше) ПМНУ не сходится.

Полученные значения управления и фазовых траекторий изображены на рисунках 3, 4 и 5. Итоговое управление $u_2 = 0$ и на рисунках не представляется.

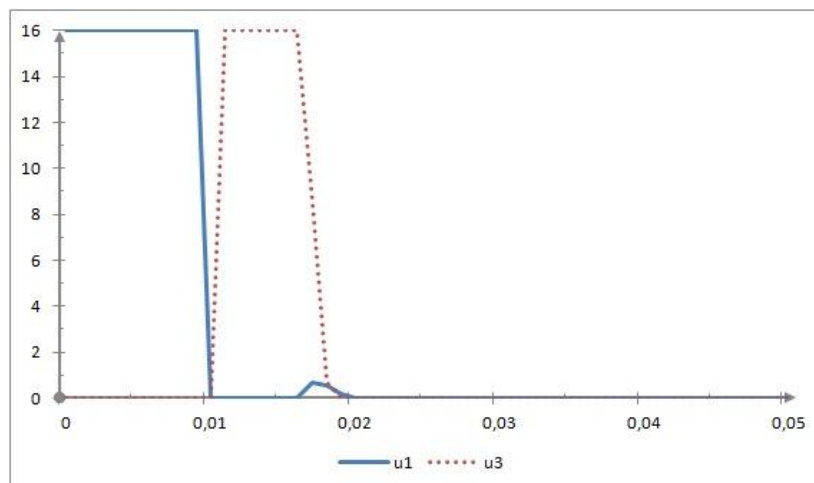


Рис. 3. Управления

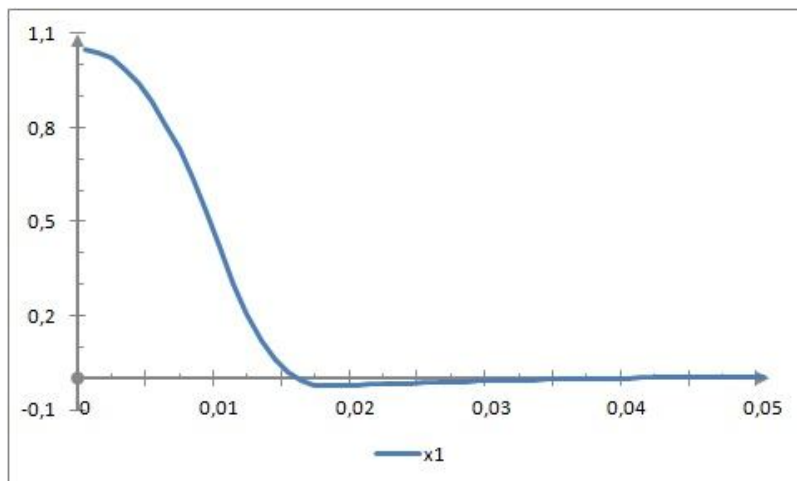


Рис. 4. Фазовая траектория $x_1(t)$

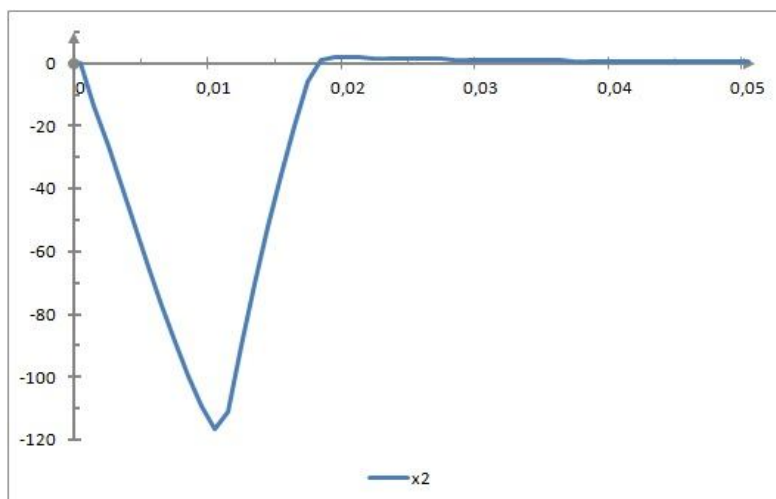


Рис. 5. Фазовая траектория $x_2(t)$

По таблице 2 видно, что для параметра $\alpha = 150$ (экспериментально подобранного) ПМНУ оказывается более эффективным, так как он дает лучшее значение функционала, затрачивая при этом меньшее число задач Коши. При сравнении ПМНУ с МУГ, МУК -1, МУК - 2 видно, что значение функционала, полученное ПМНУ меньше значения функционала для других методов. Таким образом, сравнительный анализ показывает, что рассматриваемый метод является эффективным и по трудоемкости, и по значению целевого функционала.

Заключение

Традиционно для решения задач оптимизации применяются градиентные процедуры [6, 9], в которых в общем случае релаксация по функционалу обеспечивается лишь локально. Методы возмущений не гарантируют релаксацию функционала на каждой итерации, но компенсируют это отсутствием операции параметрического поиска. Нелокальность улучшения обеспечивается фиксированностью параметра возмущения. Данное свойство (нелокальность улучшения) при поиске решения является существенным фактом повышения эффективности. Проведенные численные расчеты продемонстрировали в рамках рассматриваемых задач повышенную эффективность нелокальных методов по сравнению с градиентными процедурами.

Литература

1. Аргучинцев А.В. Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2002. № 12. С. 23–29.
2. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 3. М.: Диалог-МИФИ, 2001. 368 с.
3. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2008. 260 с.
4. Булдаев А.С., Моржин О.В. Модификация метода проекций для улучшения нелинейных управлений // Вестник Бурятского госуниверситета. 2010. Вып. 9: Математика, информатика, с. 10–17.
5. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика». 2009. Т. 2, № 1. С. 94–106.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
7. Срочко В.А., Антоник В.Г., Мамонова Н.В. Вычислительное сравнение методов градиентного типа в задачах оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Математика. 2007. № 1. С. 275–290.
8. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Наука, 2000. 160 с.
9. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
10. Krotov V. F. Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996. 408 p.

Бурлаков Иван Дмитриевич, аспирант кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: ivan.burlakov.91@mail.ru

Burlakov Ivan Dmitrievich, postgraduate student, applied mathematics department, Buryat State University.

УДК 517.93

© О.Р. Козлова

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА К ЗАДАЧЕ НОРМИРОВАНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Дана обобщенная постановка задачи нормирования внешних воздействий для непрерывных динамических систем. С использованием векторных дифференциальных неравенств и вектор-функций Ляпунова (ВФЛ) получены достаточные условия свойства λ -технической устойчивости, составляющего основу задачи нормирования. Для квазилинейных систем дана процедура построения ВФЛ и нелинейной системы сравнения, используемых для построения алгоритмов проверки свойства технической устойчивости.

Ключевые слова: техническая устойчивость, вектор-функции Ляпунова, нормирование.

O.R. Kozlova

APPLICATION OF LYAPUNOV'S VECTOR FUNCTIONS METHOD TO A PROBLEM OF EFFECTS NORMALIZATION

The generalized definition of an external effects normalization problem for continuous dynamic systems is given. The sufficient conditions of λ -technical stability containing the basis of normalization problem have been obtained by use of vector differential inequalities and Lyapunov's vector functions (LVF). For quasi-linear systems the procedure of construction LVF and nonlinear comparison system, used for construction technical stability checking algorithms has been given.

Keywords: technical stability, Lyapunov's vector functions, normalization.

Введение

Задачи нормирования внешних воздействий возникли, прежде всего, в связи с проблемами охраны окружающей среды. Применительно к экологии задача нормирования состоит в определении для каждого из источников антропогенных воздействий таких пределов, при соблюдении которых исключаются нежелательные изменения природной среды и обеспечиваются приемлемые для здоровья человека условия [4]. Однако подобная постановка оказывается полезной и при решении других прак-

тических проблем исследования или проектирования сложных систем, например химических, экономических, а также систем автоматического управления.

1. Постановка обобщенной задачи нормирования

Рассматривается объект, динамика которого описывается системой

$$\dot{x} = f(t, x, p), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \in X_0, \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in X(t) \subseteq R^N$ – состояние объекта, X_0 – множество начальных состояний, вектор p – внешние воздействия или возмущения. Для каждого $p \in \mathcal{P}$ правая часть системы определена при $t \in T = [t_0, t_f]$ и $x \in X(t)$. Предполагается, что решение системы (1) понимается в смысле Каратеодори, существует и продолжимо на T для всех $x_0 \in X_0$ и $p \in \mathcal{P}$. Множество решений с данными x_0, p обозначим через $\mathcal{X}(t_0, x_0, p)$.

Пусть даны множества $\mathcal{D} \subseteq R^{n_0}$, $\mathcal{E} \subseteq R^n$, $\Gamma \subseteq R^{n_f}$, $\mathcal{B} \subseteq R^{n_p}$, $T_f \subset (t_0, +\infty)$, $\Lambda \subset \mathcal{D} \times \mathcal{E} \times \Gamma \times \mathcal{B} \times T_f$ и заданы $\rho_0(x_0): X_0 \rightarrow R^{n_0}$ – векторная функция оценки начальных состояний, $\rho(t, x): (t \in T, x \in X(t)) \rightarrow R^n$ и $\rho_f(x): X(t_f) \rightarrow R^{n_f}$ – вектор-функции, оценивающие, соответственно, текущее состояние и состояние в конечный момент времени, $\rho_p(p): \mathcal{P} \rightarrow R^{n_p}$ – векторная функция оценки текущих возмущений. Пусть фиксирован некоторый набор $\lambda = \{\delta, \varepsilon, \gamma, \beta, t_f\}$ из множества Λ .

С использованием введенных понятий определим свойство *технической устойчивости* $S_T(\lambda)$ системы (1):

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in X_0 : \rho_0(x_0) \leq \delta \quad \forall p \in \mathcal{P} : \rho_p(p) \leq \beta \\ \forall x \in \mathcal{X}(t_0, x_0, p) \quad \forall t \in T \quad \rho(t, x(t)) \leq \varepsilon \quad \& \quad \rho_f(x(t_f)) \leq \gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Неравенства между векторами в (3) понимаются как покомпонентные.

Чтобы подчеркнуть зависимость свойства от данного λ , будем называть его также свойством λ -технической устойчивости.

Данное определение свойства технической устойчивости включает в себя известные определения (A, λ, t_0, T) -устойчивости по Четаеву [11], практической устойчивости [8], [9], [1], [13], [12] сильной и слабой T-устойчивости [5]. При конкретизации заданий множеств допустимых текущих и начальных состояний и оценочных функций ρ_0, ρ, ρ_f в определении (3) свойство $S_T(\lambda)$ можно получить из более общих понятий практической устойчивости, данных Р. Абдуллиным [7].

Обозначим через $\Lambda_\lambda \subseteq \Lambda$ множество наборов λ , с которыми выполняется свойство $S_T(\lambda)$. Пусть на множестве Λ определена скалярная функция $\varphi(\lambda)$. Теперь *обобщенную задачу нормирования* можно поставить следующим образом: найти $\min \varphi(\lambda)$ на множестве $\Lambda \cap \Lambda_\lambda$.

Данная постановка охватывает многие из известных, например задачу нормирования воздействий В. Гурмана, Г. Константинова [2], [3], [4].

Особенностью поставленной задачи нормирования является то, что ограничения в ней не записаны аналитически, а представлены в виде требования выполнения динамического свойства. Поэтому стандартные методы оптимизации, предполагающие знание и возможность вычисления выражений, описывающих критерий и ограничения, здесь неприменимы. В связи с этим естественно эту задачу решать следующим образом: формировать некоторые процедуры, позволяющие конструктивно проверять, по крайней мере, достаточные условия технической устойчивости. Это приводит к тому, что множество Λ_λ оптимизируемых значений параметра λ , допустимых требованием технической устойчивости, заменяется, вообще говоря, более узким множеством $\Lambda_{S_0} \subseteq \Lambda_\lambda$, на котором выполнено достаточное условие технической устойчивости. В итоге вместо точного решения задачи мы получаем лишь верхнюю оценку критерия, которая тем точнее, чем ближе достаточные условия к точным

условиям технической устойчивости. Если по смыслу задачи эта оценка нас устраивает, то можно считать, что мы имеем некоторый практически приемлемый способ решения задачи нормирования. Несмотря на то, что мы перешли к достаточным условиям технической устойчивости, которые также не заданы в виде формул, для них можно построить процедуру проверки, опираясь на методы функций Ляпунова. А сами способы решения задач оптимизации должны позволять применять процедурные (алгоритмически описанные) способы проверки ограничений. Одними из таких методов, например, являются генетические алгоритмы, реализованные в пакете Matlab.

2. Достаточное условие λ - технической устойчивости

В настоящей работе предлагаются некоторые методы решения задачи, основанные на векторных дифференциальных неравенствах и вектор-функциях Ляпунова (ВФЛ).

Обозначим через $U_\varepsilon = \{(t, x) : t \in T, x \in X(t), \rho(t, x) \leq \varepsilon\}$ множество состояний системы (1), допустимым свойством $S_T(\lambda)$ (вектор ε в определении U_ε тот же, что в заданном наборе λ).

Пусть на некотором открытом множестве $\Omega_\varepsilon \subseteq T \times R^N$, содержащем U_ε , определена непрерывная по t, x функция $v(\varepsilon, t, x)$ со значениями в R^k . Будем предполагать, что функция v локально удовлетворяет условию Липшица по x ; кроме того, будем считать, что в каждой точке t, x v имеет вправо по t производную по любому направлению $g \in R^N$ $v'(\varepsilon, t, x, g) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (v(\varepsilon, t + \alpha, x + \alpha g) - v(\varepsilon, t, x))$.

Согласно результатам из [6], в этом случае v имеет правую производную \dot{v} в силу системы (1), вычисляемую по формуле

$$\dot{v}(\varepsilon, t, x, p) = v'(\varepsilon, t, x, f(t, x, p)). \quad (4)$$

В соответствии с определениями из [6] будем называть функцию v вектор-функцией Ляпунова (ВФЛ), если в Ω_ε выполнено векторное дифференциальное неравенство

$$\dot{v}(\varepsilon, t, x, p) \leq f_c(\varepsilon, t, v(\varepsilon, t, x), \rho_p(p)), \quad (5)$$

где функция $f_c(\varepsilon, t, y, p_c)$ со значениями в R^k определена и удовлетворяет условиям Каратеодори [10] (непрерывна по y , измерима по t и локально ограничена суммируемой функцией) в области $Y_\varepsilon \subseteq T \times R^k$, содержащей значения $t, v(\varepsilon, t, \cdot)$, и удовлетворяет там условию Важевского (квазимонотонно не убывает по y : $\forall i = \overline{1, k} \quad f_c^i(\varepsilon, t, y, p_c) \leq f_c^i(\varepsilon, t, z, p_c)$ если $y \leq z$, $y^i = z^i$ [7], [6]).

Порожденная этой функцией f_c система дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f_c(\varepsilon, t, y, p_c), \quad (t, y) \in Y_\varepsilon, \quad p_c \in \mathcal{P}_c \supseteq \rho_p(\mathcal{P}), \quad \mathcal{P}_c \subseteq R^{n_p} \quad (6)$$

называется системой сравнения (СС).

Положим $Y_{\varepsilon_0} \equiv v(t_0, X_0)$ и будем предполагать, что $\forall y_0 \in Y_{\varepsilon_0} \quad \forall p_c \in \mathcal{P}_c : p_c \leq \beta$, где β принадлежит набору λ , решения $y(t, t_0, y_0, p_c, \varepsilon)$ системы (6) определены на T (так как f_c удовлетворяет условиям Каратеодори, рассматриваются К-решения СС). Множество решений СС с данными $t_0, y_0, p_c, \varepsilon$ обозначим через $\mathcal{Y}(t_0, y_0, p_c, \varepsilon)$.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть существует ВФЛ $v(\varepsilon, t, x)$, удовлетворяющая всем вышеперечисленным, а также следующим условиям:

- 1) $\forall x_0 \in X_0 \cap \Omega_\varepsilon(t_0) \quad v(\varepsilon, t_0, x_0) \leq q_0(\rho_0(x_0))$,
- 2) $\forall t \in T \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon(t) \cap X(t) \quad \rho(t, x) \leq q(t, v(\varepsilon, t, x))$,
- 3) $\forall x \in \Omega_\varepsilon(t_f) \cap X(t_f) \quad \rho_f(x) \leq q_f(v(\varepsilon, t_f, x))$,

где $q_0(\rho_0)$, $q(t, y)$, $q_f(y_f)$ – неубывающие соответственно по $\rho_0 \in R^{n_0}$, y , $y_f \in R^k$ вектор-функции со значениями в R^k , R^n , R^{n_f} .

Пусть еще СС (6) обладает свойством λ_c -технической устойчивости с $\rho_{0c}(y) \equiv y$, $\rho_c(t, y) = q(t, y)$, $\rho_{fc}(y) = q_f(y)$, $\rho_{pc}(p_c) = p_c$ и $\lambda_c \equiv \{\delta_c, \varepsilon_c, \gamma_c, \beta_c, t_f\}$, где $\delta_c = q_0(\delta)$, $\varepsilon_c = \varepsilon$, $\gamma_c = \gamma$, $\beta_c = \beta$, т.е. выполняется свойство $S_{Tc}(\lambda_c)$:

$$\begin{aligned} \forall y_0 \in Y_{\varepsilon_0} : \rho_{0c}(y_0) \leq \delta_c \quad \forall p_c \in \mathcal{P}_c : \rho_{pc}(p_c) \leq \beta \\ \forall y(t) \in \mathcal{Y}(t_0, y_0, p_c, \varepsilon) \quad \forall t \in T \quad \rho_c(t, y(t)) \leq \varepsilon_c \quad \& \quad \rho_{fc}(y(t_f)) \leq \gamma_c. \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда система (1) λ -технически устойчива.

Теорема обобщает достаточные условия практической устойчивости с ВФЛ из [8]. Когда практическая устойчивость понимается в смысле, данном нашим определением $S_T(\lambda)$, она охватывает также результаты Р.Абдуллина [7], являясь более удобной для применения и вычисления необходимых количественных оценок.

3. Построение ВФЛ и СС для квазилинейных систем

Процедуру построения вектор-функции Ляпунова и системы сравнения рассмотрим для систем следующего вида

$$\dot{x} = Ax + Bg(t, x, p), \tag{8}$$

где A, B – постоянные матрицы размерности $N \times N$ и $N \times m$ соответственно, p – внешнее воздействие (возмущение) с оценочной функцией ρ_p .

Относительно нелинейности $g(t, x, p)$ предполагается, что при всех $t \in T$, $x \in X(t)$, $p \in \mathcal{P}$

$$|g(t, x, p)| \leq H_0 |G_0 x| + H\Phi(|Gx|) + D\Psi(\rho_p), \tag{9}$$

где H_0, G_0, H, G, D – матрицы размерностей соответственно $m \times m_{g_0}$, $m_{g_0} \times N$, $m \times m_f$, $m_g \times N$ и $m \times m_{f_0}$. Модули понимаются как покомпонентные. Вектор-функция $\Phi(R) : R^{m_g} \rightarrow R^{m_f}$ непрерывна, не убывает в области определения, $\Phi(0) = 0$; вектор-функция $\Psi(\rho_p) : R^{n_p} \rightarrow R^{m_{f_0}}$ не убывает по ρ_p .

Оценочные функции ρ_0, ρ, ρ_f в свойстве (3) считаются определенными следующим образом:

$$\rho_0(x_0) = |R_0 x|, \quad \rho(x) = |R x|, \quad \rho_f(x) = |R_f x|, \tag{10}$$

где R_0, R, R_f – матрицы соответствующих размерностей, причем R_0 имеет ранг N (и значит, $n_0 \geq N$).

Следуя [7], в качестве ВФЛ будем использовать вектор-функции с компонентами, образуемыми из модулей линейных форм фазовых переменных,

$$v(x) = |Sx|, \tag{11}$$

показавших себя одними из наиболее эффективных в приложениях; они позволяют конструктивно провести необходимые построения и вычисление количественных оценок. Здесь S – неособенная, вообще говоря, комплексная $N \times N$ матрица, преобразующая матрицу A к почти диагональной форме.

Для введенной ВФЛ (11) система сравнения, соответствующая системе (8), получается явно и имеет вид:

$$\dot{y} = Py + M\Phi(Ky) + N\Psi(p_c), \tag{12}$$

где $P = \tilde{A}^w + |\tilde{B}| H_0 |G_0 S^{-1}|$, $\tilde{A}^w = (\alpha_{ij})$ – позитивная матрица размерности $N \times N$, образуемая из \tilde{A} по правилу $\alpha_{ii} = \text{Re } \tilde{a}_{ii}$, $\alpha_{ij} = |\tilde{a}_{ij}|$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, N}$, $\tilde{A} = SAS^{-1}$, $\tilde{B} = SB$, $M = |\tilde{B}| H$, $K = |GS^{-1}|$, $N = |\tilde{B}| D$, $p_c = \rho_p$.

В условиях 1) – 3) теоремы можно принять $q_0(\rho_0) = Q_0 \rho_0$, $q(y) = Qy$, $q_f(y) = Q_f y$, где постоянные неотрицательные матрицы Q, Q_0, Q_f вычисляются по формулам:

$$Q_0 = |SR_0^-|, \quad Q = |RS^{-1}|, \quad Q_f = |R_f S^{-1}|.$$

Здесь R_0^- – полуобратная к R_0 (размерности $N \times n_0$) такая, что $R_0^- R_0 = I_N$.

Замечание. Матрицы H_0 , H и функция Φ в оценках (9) могут также зависеть от $\rho_p(p)$, являясь неубывающими по $\rho_p(p)$.

4. Пример: две параллельные реакции

В реакторе полного смешения протекают две параллельные реакции [4]. Вещество A превращается в продукты реакции B и C по схеме $A \xrightarrow{k_1} B$, $A \xrightarrow{k_2} C$.

Обозначим через x , y концентрации продуктов A и B в рабочем объеме реактора. Уравнения модели процесса имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{q}{V}(u-x) - k_1x^2 - k_2x, \\ \dot{y} &= k_1x^2 - \frac{q}{V}y, \end{aligned} \quad (13)$$

где V – рабочий объем реактора, q – скорость подачи сырья в реактор (скорость входного потока), u – концентрация продукта A во входном потоке. В дальнейшем параметры q , V , k_1 , k_2 считаются постоянными.

В нормальном режиме работы реактора будем считать процесс установившимся; состояние равновесия обозначим (\bar{x}, \bar{y}) , а соответствующую концентрацию вещества A во входном потоке \bar{u} .

В соответствии с технологическими требованиями на выходе из реактора допустимы колебания концентрации x и y в пределах:

$$\begin{aligned} x_{\min} &\leq x \leq x_{\max}, \\ y_{\min} &\leq y \leq y_{\max}. \end{aligned} \quad (14)$$

Требуется определить допустимые пределы отклонения концентрации вещества A во входном потоке от \bar{u} , при которых ограничения (14) не будут нарушены в течение заданного времени t_f .

Обозначим $\alpha_1 = \frac{q}{V}$, $u(t) = \bar{u} + \Delta u(t)$, $\alpha_1 \bar{u} = \gamma_1$, $\alpha_1 + k_2 = \gamma_2$ и перепишем систему (13) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma_1 - \gamma_2 x - k_1 x^2 + \alpha_1 \Delta u, \\ \dot{y} &= k_1 x^2 - \alpha_1 y. \end{aligned} \quad (15)$$

Положим $\rho_0 = \left(\left| \begin{array}{c} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{array} \right| \right)$, $\delta = 0$, $\rho = \text{col}(x, -x, y, -y)$, $\rho_f = \text{col}(x(t_f), -x(t_f), y(t_f), -y(t_f))$, $\varepsilon = \gamma = \text{col}(x_{\max}, -x_{\min}, y_{\max}, -y_{\min})$, $\rho_p = |\Delta u|$, $\beta = w$, $T = [0, t_f]$, $x(0) = \bar{x}$, $y(0) = \bar{y}$. Тогда сформулированная задача является задачей нормирования с критерием $\varphi(\lambda) = -w$.

Поскольку правые части системы (15) удовлетворяют условиям Важевского, в качестве ВФЛ здесь может быть использована простейшая вектор-функция $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, где $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, для которой, учитывая, что $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, очевидным образом получается линейная СС

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - (\gamma_2 + k_1 x_{\min}) z_1 + \alpha_1 w \\ k_1 x_{\max} z_1 - \alpha_1 z_2 \\ -\gamma_1 - (\gamma_2 + k_1 x_{\max}) z_3 + \alpha_1 w \\ k_1 x_{\min} z_3 - \alpha_1 z_4 \end{pmatrix},$$

$z_1(0) = x(0)$, $z_2(0) = y(0)$, $z_3(0) = -x(0)$, $z_4(0) = -y(0)$. По теореме Важевского ее решения мажорируют решения исходной системы (13). Окончательно получаем, что технологический процесс не нарушится при отклонениях во входном потоке вещества A $|\Delta u|$ не превышающих $w = \bar{w} = \min\{w_*, w^*\}$, где

$$w_* = \frac{(z_3(0)e^{-t_f(\gamma_2 + k_1 x_{\max})} + x_{\min})(\gamma_2 + k_1 x_{\max})}{\alpha_1 \left(e^{-5(\gamma_2 + k_1 x_{\max})} - 1 \right)} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1},$$

$$w^* = \frac{(z_1(0)e^{-t_f(\gamma_2 + k_1 x_{\min})} - x_{\max})(\gamma_2 + k_1 x_{\min})}{\alpha_1 \left(e^{-5(\gamma_2 + k_1 x_{\min})} - 1 \right)} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}.$$

Таким образом, использование метода ВФЛ в этом примере позволяет решить задачу в аналитической форме.

Заключение

Особенностью предложенной обобщенной постановки задачи нормирования внешних воздействий является то, что ограничения в ней представлены в виде требования выполнения свойства λ -технической устойчивости. Использование векторных дифференциальных неравенств и вектор-функций Ляпунова позволяет конструктивно проверять достаточные условия данного динамического свойства. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется на примере решения задачи о значении допусков на концентрации реагентов во входных потоках химического реактора полного смешения.

Литература

1. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1976. Т. 3. С. 43-126.
2. Гурман В.И., Константинов Г.Н., Расина И.В. Нормирование воздействий на динамическую систему (постановки задач) // Вопросы прикладной математики. – Иркутск, СЭИ, 1975. – С. 25-30.
3. Гурман В.И., Константинов Г.Н. Нормирование воздействий на динамические системы // Автоматика и телемеханика. 1979. № 10. С. 12-18.
4. Константинов Г.Н. Нормирование воздействий на динамические системы. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. 188 с.
5. Константинов Г.Н. Некоторые методы нормирования воздействий на динамические системы // Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, 1979. С. 251–257.
6. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.
7. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.
8. Мартынюк А.А. Практическая устойчивость движения. Киев: Наукова думка, 1983. 352 с.
9. Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. Киев: Наукова думка, 1979. 271 с.
10. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2 т. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1953. Т. 1. 346 с. Том 2. 416 с.
11. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
12. Grujic L.T. On practical stability // Int. J. Contr. 1973. V. 17, № 4. P. 881–887.
13. Weiss L., Infante E.F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. V. AC 12. № 1. P. 54-59.

Козлова Ольга Равилевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, доцент кафедры методов оптимизации ИМЭИ ИГУ, 664033, Иркутск, Лермонтова, 134, тел. (395-2) 453151, oliia@yandex.ru

Kozlova Olga Ravilevna, candidate of physical and mathematical sciences, researcher of ISDCT SB RAS, associate professor of methods of optimization department, Institute of Mathematics, Economics and Informatics of ISU, 664033, Irkutsk, Lermontov str., 134, tel. (395-2) 453151, oliia@yandex.ru.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ¹

Статья посвящена построению алгоритмического обеспечения решения задачи построения управления линейной динамической системой, в которой основной целью управления является удержание системы в установленном режиме в заданных фазовых ограничениях при заданном детерминированном полигармоническом возмущении.

Ключевые слова: линейная система, оптимальное управление, фазовые ограничения, полигармоническое возмущение, весовой коэффициент, среднеквадратический функционал.

© A.D. Mizhidon, K.A. Mizhidon, A. V. Lobanov

ANALYTICAL AND NUMERICAL BASIS FOR CONSTRUCTING AN ALGORITHM FOR SOLUTION A PROBLEM OF CONTROL PROVIDING FULFILLMENT OF DEFINED CONSTRAINTS UNDER POLYHARMONIC PERTURBATIONS

The article is devoted to the construction of algorithmic support of solution the problem for constructing a control of linear dynamic system. The main purpose of control is to keep the system in a steady state in the defined phase constraints under determined polyharmonic perturbation.

Keywords: linear system, optimal control, state constraints, polyharmonic perturbation, weighting coefficient, mean-squared functional.

Введение

В статье рассматривается задача построения управления линейной динамической системой, в которой основной целью управления является удержание системы в фазовых ограничениях при заданном детерминированном возмущении. В качестве внешних возмущений рассматриваются полигармонические функции, для гармоник которых известны амплитуды, частоты и при этом неизвестны начальные фазы. Разработка аналитико-численного метода построения управления основана на подходе, предложенном в [1]. Рассматривается вспомогательная задача оптимального управления, функционал которого зависит от весового коэффициента. Окончательный выбор весового коэффициента обеспечивает построение управления. Проведено необходимое аналитико-численное обоснование предлагаемого метода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную управляемую систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad (1)$$

где x – n -мерный вектор фазовых координат системы; u – r -мерный вектор управления; A – постоянная $(n \times n)$ -матрица; B – постоянная $(n \times r)$ -матрица, $f(t)$ – n -мерный вектор внешних возмущений. Компоненты вектор-функции $f(t)$ являются полигармоническими функциями

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \sin(\omega_j t + \gamma_j), \quad (i = \overline{1, 2, \dots, n}). \quad (2)$$

Здесь амплитуды a_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$) и частоты ω_j ($j = \overline{1, m}$) гармоник известны, а начальные фазы γ_j , ($j = \overline{1, m}$) неизвестны.

Система управляется на бесконечном промежутке времени $t \geq 0$. При этом допустимыми управлениями $u(t)$ являются непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие неравенствам

$$u^T(t) R_k u(t) \leq 1, \quad (k = \overline{1, 2, \dots, p}), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где R_k , ($k = \overline{1, 2, \dots, p}$) – симметричные положительно-определенные $(n \times n)$ -матрицы.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-08-00309 а

Нормальное функционирование системы предполагает выполнение в установившемся режиме в каждый момент времени $t \geq 0$ фазовых ограничений

$$x^T(t)Q_l x(t) \leq 1, \quad (l = 1, 2, \dots, s). \tag{4}$$

Здесь $Q_l, (l = 1, 2, \dots, s)$ – симметричные, неотрицательно-определенные $(n \times n)$ -матрицы.

Требуется при полигармоническом возмущении $f(t)$ с «наихудшими» начальными фазами $\gamma_j (j = \overline{1, m})$ найти допустимое управление $u^*(t)$, при котором на траектории установившегося движения системы (1) выполняются в каждый момент времени $t \geq 0$ фазовые ограничения (4).

Определение 1. Под «наихудшими» начальными фазами $\gamma_j (j = \overline{1, m})$ понимаем такие начальные фазы, для которых найдется момент времени $t \geq 0$ такой, что при всех $j = \overline{1, m} \sin(\omega_j t + \gamma_j) = 1$.

Ниже $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Теорема 1. Если управление $u^*(t)$ удовлетворяет условию

$$\|u(t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu}, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

где μ – число наименьшее среди наибольших собственных значений матриц $R_k, (k = 1, 2, \dots, p)$, а соответствующая траектория $x^*(t)$ – условию

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{\eta}, \quad t \geq 0 \tag{6}$$

где η – число наименьшее среди наибольших собственных значений матриц $Q_l, (l = 1, 2, \dots, s)$, тогда управление $u^*(t)$ является допустимым управлением, обеспечивающим выполнение фазовых ограничений (4).

Доказательство теоремы 1. При фиксированном времени t и для некоторой матрицы R_k рассмотрим задачу математического программирования

$$\|u(t)\|^2 \rightarrow \min, \quad u^T(t)R_k u(t) = 1, \tag{7}$$

которую можно геометрически интерпретировать как задачу нахождения шара наибольшего радиуса, вписанного в эллипсоид.

Введя функцию Лагранжа в виде

$$L = \|u(t)\|^2 + \lambda(1 - u^T(t)R_k u(t)),$$

где λ – множитель Лагранжа, запишем условия стационарности

$$\frac{\partial L}{\partial u(t)} = 2(u(t) - \lambda R_k u(t)) = 0.$$

Таким образом, для нахождения стационарных точек имеем задачу

$$(\lambda R_k - E)u(t) = 0, \quad u^T(t)R_k u(t) = 1$$

которая заменой $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ сводится к задаче определения собственных значений и собственных векторов матрицы R_k

$$(R_k - \gamma E)u(t) = 0,$$

при условии $u^T(t)R_k u(t) = 1$.

Известно, что у симметричной матрицы все собственные значения вещественны. Пусть все собственные значения пронумерованы в порядке возрастания $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$. Обозначим соответствующие им собственные векторы $u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)$.

Минимум в рассматриваемой задаче математического программирования (7) достигается на собственном векторе $u^n(t)$, соответствующем наибольшему собственному значению γ_n . Действительно, имеем равенства

$$\gamma_n \|u^n(t)\|^2 = (\gamma_n u^n(t), u^n(t)) = (R_k u^n(t), u^n(t)) = u^{nT}(t)R_k u^n(t) = 1,$$

из которых следует справедливость вышесказанного.

Таким образом, если μ является наименьшим среди наибольших собственных значений матриц R_k , ($k=1,2,\dots,p$), тогда (5) определяет шар наибольшего радиуса, вписанного в пересечение эллипсоидов (3). Отсюда следует, что управление $u^*(t)$, принадлежащее шару (5), принадлежит пересечению эллипсоидов (3), т.е. является допустимым управлением. Аналогично можно показать, если η является наименьшим среди наибольших собственных значений матриц Q_l , ($l=1,2,\dots,s$), тогда (6) определяет шар наибольшего радиуса, вписанного в пересечение эллипсоидов (4), и, следовательно, соответствующая управлению $u^*(t)$, траектория $x^*(t)$ удовлетворяет фазовым ограничениям (4). *Теорема 1 доказана.*

В силу теоремы 1 для построения закона движения рассмотрим задачу построения управления, удовлетворяющего ограничениям (5) и при полигармоническом возмущении $f(t)$ с «наихудшими» начальными фазами γ_j ($j=\overline{1,m}$), обеспечивающего выполнение в установившемся режиме ограничений (6). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления со среднеквадратическим функционалом, подынтегральная функция которого зависит от весового коэффициента, выбором которого обеспечивается выполнение ограничений (5) и (6).

2. Вспомогательная задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(t) \\ J(u(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (\alpha \|x(t)\|^2 + (1-\alpha) \|u(t)\|^2) dt \rightarrow \min_{u(\cdot)} \end{cases} \quad (8)$$

где α ($0 \leq \alpha \leq 1$) – весовой коэффициент.

Задача (8) является задачей аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) при постоянно действующих возмущениях [1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(t), \\ J(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (x' Q x + u' R u) dt \rightarrow \min_{u(x,t)}. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь x – n -мерный вектор фазовых координат системы; u – r -мерный вектор управления; A – постоянная $n \times n$ -матрица; B – постоянная $n \times r$ -матрица; Q – неотрицательно-определенная, постоянная $n \times n$ -матрица; R – положительно-определенная, постоянная $r \times r$ -матрица; $f(t)$ – n -мерная заданная, непрерывная, ограниченная вектор-функция, характеризующая возмущения.

Для задачи АКОР (9) можно сформулировать следующую теорему [2].

Теорема 2. Если для матриц A и B выполняется условие управляемости

$$\text{rank}[BAB \dots A^{n-1}B] = n,$$

то оптимальное управление в задаче АКОР (9) имеет вид

$$u^*(x,t) = -R^{-1}B'(Kx + n(t)), \quad (10)$$

где симметричная положительно определенная матрица K – решение матричного алгебраического уравнения Риккати

$$KA + A'K - KBR^{-1}B'K + Q = 0, \quad (11)$$

а $n(t)$ – частное решение линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{n}(t) = -(A' - \tilde{K}BR^{-1}B')n(t) + \tilde{K}f(t). \quad (12)$$

Применение методики аналитического конструирования для решения задачи (8) требует решения матричного уравнения Риккати (11), кроме того, управление будет найдено в виде закона с обратной связью (10), и для определения закона движения возникает необходимость интегрирования уравнений движения при заданных начальных условиях. Поэтому для решения задачи оптимального управления (8) рассмотрим следующий подход. Так как, согласно постановке задачи, нас интересует уста-

новившийся закон движения, то будем искать стационарное оптимальное программное управление и соответствующую ему стационарную оптимальную траекторию.

Теорема 3. Если $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)$ стационарные решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BR^{-1}B^T\psi + f(t), \\ \dot{\psi} = Qx - A^T\psi, \end{cases} \quad (13)$$

то стационарное оптимальное программное управление $u^*(t)$ и соответствующая ей оптимальная траектория $x^*(t)$ в задаче оптимального управления (9) определяются следующим образом

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\tilde{\psi}(t), \quad x^*(t) = \tilde{x}(t). \quad (14)$$

Доказательство теоремы 3. Стационарная оптимальная траектория $x^*(t)$ определяется единственным стационарным решением системы

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^TK)x + BR^{-1}B^Tn(t) + f(t), \quad (15)$$

а соответствующее ей оптимальное программное управление в стационарном режиме в силу (10) определится выражением

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(Kx^*(t) + n(t)), \quad (16)$$

где K – решение матричного алгебраического уравнения Риккати (11), а $n(t)$ – частное решение линейной системы дифференциальных уравнений (12).

Покажем, что

$$\tilde{x}(t) = x^*(t) \text{ и } \tilde{\psi}(t) = -Kx^*(t) + n(t) \quad (17)$$

стационарные решения системы (13). Для этого подставим (17) в систему уравнений (13)

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + BR^{-1}B^T(-Kx^*(t) + n(t)) + f(t), \\ -K\dot{x}^*(t) + \dot{n}(t) = Qx^*(t) - A^T(-Kx^*(t) + n(t)). \end{cases}$$

Подставив правую часть первого уравнения во второе уравнение вместо производной $\dot{x}^*(t)$, преобразовав, получим

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = (A - BR^{-1}B^TK)x^*(t) + BR^{-1}B^Tn(t) + f(t), \\ (-KA + KBR^{-1}B^TK - Q - A^TK)x^*(t) + (A^T - KBR^{-1}B^T)n(t) - \\ -Kf(t) + \dot{n}(t) = 0. \end{cases}$$

Так как $x^*(t)$ является стационарным решением системы (15), то первое уравнение обращается в тождество. Второе уравнение также обращается в тождество, так как K – решение матричного алгебраического уравнения Риккати (11), а $n(t)$ – частное решение линейной системы дифференциальных уравнений (12). *Теорема доказана.*

Для нашей задачи система (13) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \frac{1}{(1-\alpha)}BB^T\psi + f(t), \\ \dot{\psi} = \alpha x - A^T\psi \end{cases} \quad (18)$$

где $f(t) = \sum_{i=1}^m a_i \sin(\omega_i t + \gamma_i)$.

3. К построению алгоритмического обеспечения нахождения стационарного решения системы (18)

Будем искать стационарное оптимальное программное управление и соответствующую ему стационарную оптимальную траекторию согласно теореме 3. Тогда нам достаточно найти частное решение системы (18).

Возьмем систему с i -ой гармоникой слагаемого $f(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \frac{1}{\beta} BB'\psi + a_i \sin(\omega_i t + \gamma_i), \\ \dot{\psi} = \alpha x - A'\psi. \end{cases} \quad (19)$$

Перепишем (19) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \frac{1}{\beta} BB'\psi + a \sin(\omega t), \\ \dot{\psi} = \alpha x - A'\psi. \end{cases} \quad (20)$$

Частное решение системы (20) будем искать в следующем виде

$$\begin{cases} x(t) = a_x \sin \omega t + b_x \cos \omega t, \\ \psi(t) = a_\psi \sin \omega t + b_\psi \cos \omega t. \end{cases} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_x, a_ψ, b_x, b_ψ

$$\begin{cases} \omega b_x + A a_x + \frac{1}{1-\alpha} BB' a_\psi + a = 0, \\ A b_x + \frac{1}{1-\alpha} BB' b_\psi - \omega a_x = 0, \\ \omega b_\psi + \alpha a_x - A' a_\psi = 0, \\ \alpha b_x - \omega a_\psi - A' b_\psi = 0 \end{cases}$$

Таким образом, частное решение системы (20) и управление будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} x(t, \alpha) &= a_x(\alpha) \sin \omega t + b_x(\alpha) \cos \omega t, \\ u(t, \alpha) &= a_u(\alpha) \sin \omega t + b_u(\alpha) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Решение системы (19) будет иметь вид

$$\begin{cases} x(t, \alpha) = \sum_{i=1}^m x^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \\ u(t, \alpha) = \sum_{i=1}^m u^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \end{cases}, \quad (22)$$

где $x^i(\alpha) = \sqrt{a_x^i{}^2 + b_x^i{}^2}$, $u^i(\alpha) = \sqrt{a_u^i{}^2 + b_u^i{}^2}$, $\hat{\gamma}_i = \arctg \frac{b_x}{a_x}$

В формуле (22), нужно заметить, операции взятия арифметического корня и арктангенса производятся над компонентами векторов a_x, b_x, a_u, b_u .

4. О выборе весового коэффициента, обеспечивающего выполнение заданных требований

Для стационарного оптимального управления $u(t, \alpha)$ и для соответствующей ей траектории $x(t, \alpha)$ в силу (22) квадраты нормы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \|x(t, \alpha)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^m x^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \right\|^2, \\ \|u(t, \alpha)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^m u^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \right\|^2. \end{aligned}$$

Согласно теореме 1 весовой коэффициент α следует выбрать из условия выполнения неравенств в каждый момент времени $t \geq 0$

$$\|x(t, \alpha)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^m x^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \right\|^2 \leq \frac{1}{\eta},$$

$$\|u(t, \alpha)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^m u^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \right\|^2 \leq \frac{1}{\mu}.$$

Учитывая «наихудшие» фазовые смещения, введем в рассмотрение функции $\delta(\alpha), \chi(\alpha)$ следующим образом

$$\delta(\alpha) = \max_t \left\| \sum_{i=1}^m x^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^m x^i(\alpha) \right\|^2, \tag{23}$$

$$\chi(\alpha) = \max_t \left\| \sum_{i=1}^m u^i(\alpha) \sin(\omega_i t + \gamma_i + \hat{\gamma}_i) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^m u^i(\alpha) \right\|^2. \tag{24}$$

Численные эксперименты показали справедливость следующего утверждения.

Утверждение. Если α меняется от нуля до единицы, то $\delta(\alpha)$ монотонно убывает, а $\chi(\alpha)$ монотонно возрастает.

Найдем коэффициенты α_η, α_μ , такие, что $\delta(\alpha_\eta) = \frac{1}{\eta}, \quad \chi(\alpha_\mu) = \frac{1}{\mu}.$

Исходя из монотонности функций $\delta(\alpha)$ и $\chi(\alpha)$, можно предположить, что найдется коэффициент α^* , принадлежащий отрезку $[\alpha_\mu, \alpha_\eta]$.

При любом коэффициенте α^* , принадлежащем данному отрезку, соответствующее управление $u^*(t)$ будет удовлетворять ограничениям (3), а фазовая траектория $x^*(t)$ будет удовлетворять в каждый момент времени $t \geq 0$ фазовым ограничениям (4).

5. Численные эксперименты

Пример 1. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3x_3 + 6u_2 + 2\sin(t), \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 5.1x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3u_1 + 2.1u_2 \end{cases}$$

при заданных ограничениях на управление

$$u_1^2 + 4u_1u_2 + 5u_2^2 \leq 1$$

необходимо обеспечить выполнение фазовых ограничений

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \leq 1.$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5.1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2.1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega = 1, Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

В результате вычислений получили

$$\frac{1}{\eta} = 0.292893218813452,$$

$$\frac{1}{\mu} = 0.171572875253810,$$

$$\alpha_\eta = 0.274570691328006,$$

$$\alpha_\mu = 0.143547940495262.$$

Пользуясь программным комплексом DISLIN для компилятора CVF 6.6, строим графики функций $\delta(\alpha), \chi(\alpha)$.

$\delta(\alpha)$ – убывающая функция

$\chi(\alpha)$ – возрастающая функция

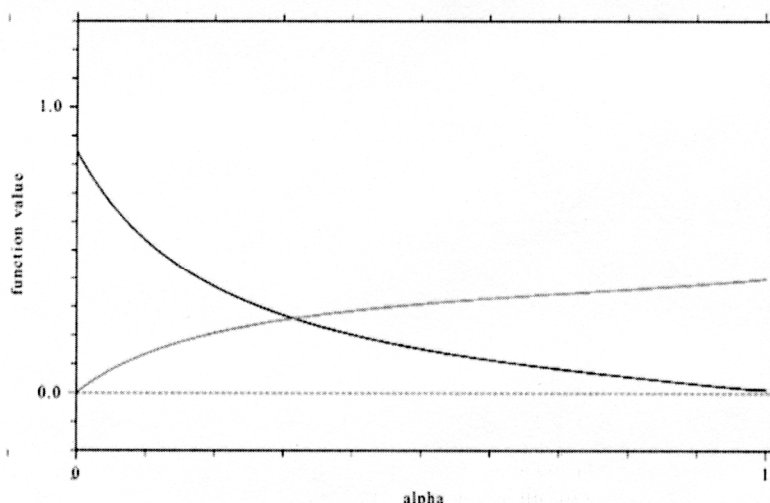


Рис. 1

Заключаем, что искомый весовой коэффициент $\alpha^* \in [0.143547940495262, 0.274570691328006]$.

Пример 2. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 8x_1 + 18x_2 + 21x_3 + 5u_1 + 3u_2 + 41u_3 + 29u_4 + 3\sin(5t), \\ \dot{x}_2 = 19x_1 + 11x_2 + 24x_3 + 8u_1 + u_2 + 19u_3 + 7u_4 + 51\sin(5t), \\ \dot{x}_3 = 22x_1 + 23x_2 + 5x_3 + 4u_1 + 2u_2 + 42u_3 + 8\sin(5t), \end{cases}$$

при заданных ограничениях на управление

$$6u_1^2 + 8u_1u_2 + 14u_1u_3 - 6u_1u_4 + 51u_2^2 + 16u_2u_3 + 10u_2u_4 + 28u_3^2 + 2u_3u_4 + 32u_4^2 \leq 1$$

необходимо обеспечить выполнение фазовых ограничений

$$x_1^2 + 2.4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2 \leq 1.$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 21 \\ 19 & 11 & 24 \\ 22 & 23 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 41 & 29 \\ 8 & 1 & 19 & 7 \\ 4 & 2 & 42 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 51 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\omega = 5$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1 \\ 1.2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

$$R = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & -3 \\ 4 & 51 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 28 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 32 \end{pmatrix}.$$

В результате вычислений получили

$$\frac{1}{\eta} = 0.126810680780817,$$

$$\frac{1}{\mu} = 1.811881624760944E - 002,$$

$$\alpha_\eta = 0.995648259402358,$$

$$\alpha_\mu = 2.828223293916058E - 003.$$

Пользуясь программным комплексом DISLIN для компилятора CVF 6.6, строим графики функций $\delta(\alpha)$, $\chi(\alpha)$.

$\delta(\alpha)$ – убывающая функция

$\chi(\alpha)$ – возрастающая функция

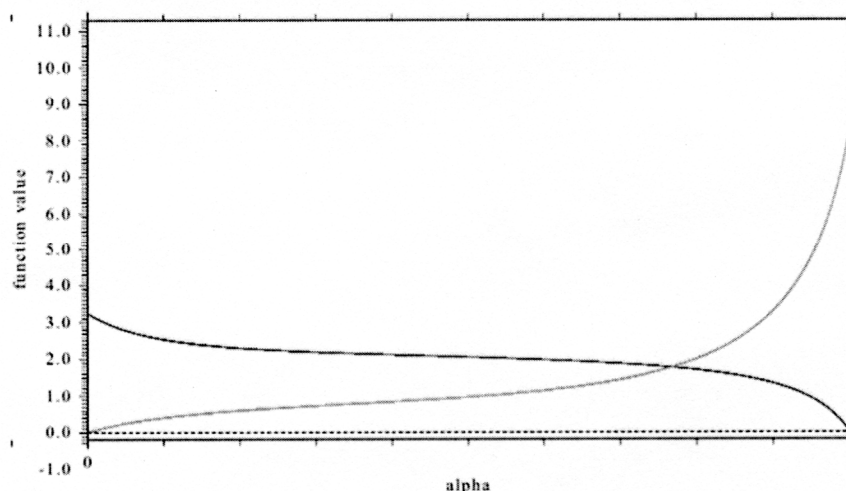


Рис. 2

Закключаем, что искомый весовой коэффициент $\alpha^* \in [0.002828223293916058, 0.995648259402358]$.

Заключение

В работе рассмотрена задача удержания системы в фазовых ограничениях при постоянно действующем полигармоническом возмущении, которая сводится к решению вспомогательной задачи оптимального управления с критерием, зависящим от весового коэффициента, выбор которого обеспечивает решение задачи.

Алгоритмическая реализация разработанного аналитико-численного метода решения задачи предусматривает:

1. Нахождение собственных значений матриц R_k , ($k = 1, 2, \dots, p$) и среди найденных собственных значений выбор μ наименьшего среди наибольших собственных значений матриц.
2. Нахождение собственных значений матриц Q_l , ($l = 1, 2, \dots, s$) и среди найденных собственных значений выбор η наименьшего среди наибольших собственных значений матриц.
3. Поиск весовых коэффициентов α_μ и α_η , удовлетворяющих соответственно условиям $\chi(\alpha_\mu) = \frac{1}{\mu}$ и $\delta(\alpha_\eta) = \frac{1}{\eta}$.

4. Если выполняется условие $\alpha_\mu \geq \alpha_\eta$, то для построения эталонного управления (12) и соответствующей ей эталонной траектории (13) можем, в силу теоремы 5, выбрать любой весовой коэффициент $\alpha = \alpha^*$ из отрезка $[\alpha_\eta, \alpha_\mu]$.

Для реализации предложенного аналитико-численного метода разработано программное обеспечение на языке Фортран.

Литература

1. Миждон А.Д., Миждон К.А. Задача оптимального управления линейной системой при фазовых и смешанных ограничениях // Вестник Бурятского государственного университета. 2013. №9. С. 17-24.
2. Миждон А.Д. Об одной задаче аналитического конструирования оптимального конструирования // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11. С. 102-116.

Миждон Арсалан Дугарович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, тел.: (902-5) 633204, e-mail: miarsdu@esstu.ru

Мижидон Клара Арсалановна, преподаватель кафедры Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, тел.: (951-6) 398322, e-mail: mizhidon@gmail.com

Лобанов Алексей Валерьевич, студент Бурятского государственного университета, тел.: (950-3) 944685, e-mail: albeux@gmail.com

Mizhidon Arsalan Dugarovich, doctor of technical sciences, professor, head of applied mathematics department, East-Siberian State University of Technology and Management.

Mizhidon Klara Arsalanovna, teacher, applied mathematics department, East-Siberian State University of Technology and Management.

Lobanov Alexey Valeryevich, student, Buryat State University.

УДК 517.977

© Д.О. Трунин, Д. Ганхуяг

МЕТОД НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(проекты 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_a, 13-01-92200-Монг_a)

В статье предлагается процедура нелокального улучшения допустимых управлений в нелинейных управляемых системах с функциональными ограничениями.

Ключевые слова: задача оптимального управления, нелокальное улучшение, функциональные ограничения.

D.O. Trunin, D. Gankhuyag

METHOD OF NONLOCAL IMPROVEMENT OF CONTROLLED SYSTEMS WITH FUNCTIONAL CONSTRAINTS

In the article a nonlocal improvement procedure of admissible control in nonlinear controlled systems with functional constraints is proposed.

Keywords: optimal control problem, nonlocal improving, functional constraints.

Введение

В [1] для полиномиальных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом построены методы нелокального улучшения управлений, основанные на нестандартных формулах приращения функционала без остаточных членов разложений. Отсутствие операции варьирования управлений и возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума, обуславливают повышенную эффективность построенных методов. В работе [2] эти методы обобщены на класс нелинейных задач оптимального управления со свободным правым концом. В данной статье предлагается процедура нелокального улучшения допустимых управлений для нелинейных задач оптимального управления с дополнительными функциональными ограничениями.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления [3, 4] с функциональными ограничениями типа равенства

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad (2)$$

$$\Phi_0(u) \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$\Phi_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4)$$

Функционалы (3), (4) имеют вид

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x, u, t) dt, \quad i = \overline{0, s}.$$

Задачу (1)-(4) сведем к задаче оптимального управления с частично закрепленным правым концом [5]. Для этого преобразуем функциональные ограничения (4)

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x^0) + \int_T [\langle \varphi_{ix}(x), f(x, u, t) \rangle + F_i(x, u, t)] dt, \quad i = \overline{1, s}.$$

Вводя в рассмотрение дополнительные фазовые переменные

$$y_i(t) = \int_{t_0}^t [\langle \varphi_{ix}(x(\tau)), f(x(\tau), u(\tau), \tau) \rangle + F_i(x(\tau), u(\tau), \tau)] d\tau, \quad i = \overline{1, s},$$

дополним систему (1) уравнениями вида

$$\dot{y}_i = \langle \varphi_{ix}(x), f(x, u, t) \rangle + F_i(x, u, t), \quad i = \overline{1, s}, \tag{5}$$

начальные условия (2) – условиями

$$y_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, s}. \tag{6}$$

Тогда ограничения (4) переписутся в виде

$$y_i(t_1) = -\varphi_i(x^0), \quad i = \overline{1, s}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что задача (1)-(3), (5)-(7) является задачей оптимального управления с частично закрепленным правым концом.

Таким образом, далее будем рассматривать задачу оптимального управления с частично закрепленным правым концом

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{8}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \tag{9}$$

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \tag{10}$$

$$x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n, \tag{11}$$

в которой $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ – вектор состояния, $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ – вектор управления, интервал T фиксирован, $x^0 \in R^n$ – заданный вектор, $x_i^1, i = \overline{1, m}$ – заданные числа, функция $\varphi(x)$ не зависит от первых m компонент вектора x . Функции $f(x, u, t)$, $\varphi(x)$, $F(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам в областях определения.

В качестве доступных управлений рассматривается множество кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном множестве $U \subset R^r$

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Для каждого доступного управления $u \in V$ обозначим $x(t, u), t \in T$ – решение задачи Коши (8), (9) при $u = u(t)$.

Определим множество допустимых управлений

$$W = \{u \in V : x_i(t_1, u) = x_i^1, i = \overline{1, m}\}.$$

В задаче (8)-(11) составим нормальный функционал Лагранжа

$$L(u, \lambda) = \Phi(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i(t_1) - x_i^1).$$

Функция Понтрягина с сопряженной переменной $p \in R^n$ имеет вид

$$H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t).$$

Приращение функционала Лагранжа на паре доступных управлений (u^0, v) в соответствии с [2] имеет вид

$$\begin{aligned} L(v, \lambda) - L(u^0, \lambda) = \\ = - \int_T (H(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), v(t), t) - H(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), u^0(t), t)) dt, \end{aligned} \tag{12}$$

где $p(t, u^0, v, \lambda)$ – решение модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \tag{13}$$

$$\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t, v) - x(t, u^0) \rangle + \langle r(t), x(t, v) - x(t, u^0) \rangle = \quad (14)$$

$$= H(p, x(t, v), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t),$$

$$p_i(t_1) = -\lambda_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (15)$$

$$p_j(t_1) = -\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad (16)$$

$$\sum_{j=m+1}^n \left[\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0))(x_j(t_1, v) - x_j(t_1, u^0)) \right] + \quad (17)$$

$$+ \sum_{j=m+1}^n \left[q_j (x_j(t_1, v) - x_j(t_1, u^0)) \right] = \varphi(x(t_1, v)) - \varphi(x(t_1, u^0)).$$

Введем отображение

$$u^*(p, x, t) = \arg \max_{v \in U} H(p, x, v, t), \quad p \in R^n, x \in R^n, t \in T.$$

2. Метод нелокального улучшения

Поставим задачу улучшения управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством $\Phi(v) \leq \Phi(u^0)$.

1. Найдем решение $(x(t), p(t))$, $t \in T$ дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$\dot{x} = f(x, u^*(p, x, t), t), \quad t \in T,$$

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t),$$

$$\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x - x(t, u^0) \rangle + \langle r(t), x - x(t, u^0) \rangle = \quad (18)$$

$$= H(p, x, u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t),$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, m},$$

$$p_j(t_1) = -\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n},$$

$$\sum_{j=m+1}^n \left[\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0))(x_j(t_1) - x_j(t_1, u^0)) \right] +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^n \left[q_j (x_j(t_1) - x_j(t_1, u^0)) \right] = \varphi(x(t_1)) - \varphi(x(t_1, u^0)).$$

2. Сформируем управление $v(t) = u^*(p(t), x(t), t)$, $t \in T$.

Предположим, что решение $(x(t), p(t))$, $t \in T$ краевой задачи (18) (возможно, не единственное) существует на T . Тогда $x(t) = x(t, v)$ и $v \in W$.

Покажем свойство улучшения для выходных управлений.

Действительно, решение $p(t)$, $t \in T$ является решением системы (13), (14) и удовлетворяет условиям (16), (17).

Обозначим

$$\bar{\lambda}_i = -p_i(t_1), \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда условия (15) выполняются и $p(t) = p(t, u^0, v, \bar{\lambda})$, $t \in T$.

Следовательно, в соответствии с формулой приращения (12) выходное управление v обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа

$$L(v, \bar{\lambda}) \leq L(u^0, \bar{\lambda}).$$

Отсюда, в силу допустимости управлений u^0 , v получаем

$$\Phi(v) \leq \Phi(u^0).$$

Алгебраические соотношения краевой задачи (18) всегда можно разрешить по аналогии с [2] относительно величин $r(t)$, q_j , и тем самым свести дифференциально-алгебраическую краевую задачу

(18) к обычной дифференциальной задаче. Определяя различные однозначные способы разрешения алгебраических уравнений, можно получать модификации метода улучшения с различными дифференциальными краевыми задачами.

3. Примеры

Пример 1.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad t \in T = [0, 4], \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \\ \Phi(u) &= x_2(4) \rightarrow \min, \quad x_1(4) = 1. \end{aligned}$$

В данном случае

$$H = p_1 u + \frac{1}{2} p_2 x_1^2.$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv 0$, которому соответствуют фазовые траектории $x_1(t, u^0) \equiv 1$, $x_2(t, u^0) = \frac{t}{2}$, $t \in T$ и значение целевого функционала $\Phi(u^0) = 2$.

В данной задаче

$$u^*(p, x, t) = \text{sign } p_1.$$

Таким образом, краевая задача улучшения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(4) = 1, \\ \dot{p}_1 &= -p_2 - r_1(t), \quad \dot{p}_2 = -r_2(t), \quad p_2(4) = -1, \\ r_1(t)(x_1 - 1) + r_2(t)\left(x_2 - \frac{t}{2}\right) &= \frac{p_2}{2}(x_1^2 - 1) - p_2(x_1 - 1). \end{aligned}$$

Полагая $r_2(t) \equiv 0$ (тогда $p_2(t) \equiv -1$), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad x_1(0) = 1, \quad x_1(4) = 1, \\ \dot{p}_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Эта краевая задача имеет решение

$$x_1(t) = \begin{cases} -t + 1, & t \in [0, 2], \\ t - 3, & t \in [2, 4]. \end{cases} \quad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{4} + t - 1, & t \in [0, 2], \\ \frac{t^2}{4} - t + 1, & t \in [2, 4]. \end{cases}$$

Соответствующее выходное управление $v(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 2], \\ 1, & t \in [2, 4]. \end{cases}$

Нетрудно видеть, что управление $v(t)$ является улучшающим: $\Phi(v) = \frac{2}{3} < \Phi(u^0) = 2$.

Пример 2.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2, \quad t \in T = [0, 2], \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \\ \Phi(u) &= x_2(2) \rightarrow \min, \quad x_1(2) = 0. \end{aligned}$$

В данном случае

$$H = p_1 u - p_2 x_1^2.$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv 0$, которому соответствуют фазовые траектории $x_1(t, u^0) \equiv 0$, $x_2(t, u^0) \equiv 0$, $t \in T$ и значение целевого функционала $\Phi(u^0) = 0$.

В данной задаче

$$u^*(p, x, t) = \text{sign } p_1.$$

Таким образом, краевая задача улучшения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(2) = 0, \\ \dot{p}_1 &= -r_1(t), \quad \dot{p}_2 = -r_2(t), \quad p_2(2) = -1, \\ r_1(t)x_1 + r_2(t)x_2 &= -p_2x_1^2. \end{aligned}$$

Полагая $r_2(t) \equiv 0$ (тогда $p_2(t) \equiv -1$), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(2) = 0, \\ \dot{p}_1 &= -x_1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что пара $x_1(t) \equiv 0$, $p_1(t) \equiv 0$, $t \in T$ является решением краевой задачи, т.е. управление u^0 удовлетворяет регулярному принципу максимума с $\lambda_1 = 0$ (особое управление).

Кроме того, краевая задача имеет решение

$$x_1(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 2-t, & t \in [1, 2]. \end{cases} \quad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, & t \in [0, 1], \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Соответствующее выходное управление

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1], \\ -1, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что управление $v(t)$ является улучшающим: $\Phi(v) = -\frac{2}{3} < \Phi(u^0) = 0$.

Заключение

Предлагаемая процедура обеспечивает нелокальное улучшение допустимых управлений без процедуры варьирования в окрестности улучшаемого управления с выполнением всех функциональных ограничений. Это свойство является существенным фактором повышения эффективности решения нелинейных задач оптимального управления с ограничениями на фазовую траекторию.

Литература

1. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. 260 с.
2. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского государственного университета. 2009. Сер. Математика. Т. 2, № 1. С. 94-106.
3. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1994. 340 с.
4. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.
5. Трунин Д.О., Булдаев А.С. Об одном подходе к оптимизации нелинейных управляемых систем с терминальными ограничениями // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2013. № 1. С. 15-20.

Трунин Дмитрий Олегович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел.: (301-2) 217733, e-mail: hint@rambler.ru
Ганхуяг Данзан, e-mail: gankhuyagd@gmail.com

Trunin Dmitry Olegovich, candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, applied mathematics department, Buryat State University, tel. (301-2) 217733, e-mail: hint@rambler.ru
Gankhuyag Danzan, e-mail: gankhuyagd@gmail.com

УДК 517.97

© Е.А. Трушкова

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ
НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ГЛОБАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ**

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00256-а).

Рассматривается проблема построения приближенного синтеза управления в задачах оптимального управления динамическими системами. Предложена процедура поиска приближенного синтеза с помощью соотношений глобального алгоритма Кротова улучшения управления.

Ключевые слова: динамическая система, синтез управления, глобальный алгоритм улучшения.

E.A. Trushkova

APPROXIMATE FEEDBACK CONTROL BASED ON A GLOBAL IMPROVEMENT ALGORITHM

The problem of constructing an approximate feedback control in the problems of optimal control for dynamic systems is considered. A procedure of search the approximate feedback control using the relations of the Krotov global control improvement algorithm is proposed.

Keywords: dynamic system, feedback control, global control improvement.

Введение

Проблема приближенного синтеза управления для непрерывной задачи оптимального управления

$$\dot{x} = f(t, x, u), t \in [t_1, t_F], x(t_1) = x_1, u \in U, F(x(t_F)) \rightarrow \min. \tag{1}$$

заключается в построении последовательности функций $\{u_s(t, x)\}_{s=1,2,\dots}$, такой, что для любых $\tau \in [t_1, t_F)$, $x_\tau \in R^n$ справедливо

$$F(x_{s-1}(t_F; x_\tau)) \geq F(x_s(t_F; x_\tau)), s = 2, 3, \dots,$$

где $x_s(t; x_\tau)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, u_s(t, x)), x(\tau) = x_\tau$. При этом каждую функцию $u_s(t, x)$ искомой последовательности, следуя [1], будем называть *приближенным синтезом управления*.

Известен метод последовательных приближений для поиска приближенного синтеза управления с использованием соотношений Беллмана [2, 3], который состоит в следующем.

0) Имеем начальный приближенный синтез $u^1(t, x)$, т. е. такую функцию, для которой при любом $x_\tau \in R^n$ процесс $(x^1(t; x_\tau), u^1(t; x_\tau))$ является допустимым. Здесь через $x^1(t; x_\tau)$ обозначено решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, u^1(t, x)), x(t_1) = x_\tau$, а $u^1(t; x_\tau) = u^1(t, x^1(t; x_\tau))$.

1) Ищем $\varphi(t, x_\tau)$ из соотношений Беллмана:

$$R(t, x, u^1(t, x)) \triangleq \varphi_x^T(t, x) f(t, x, u^1(t, x)) + \varphi_t(t, x) = 0, \tag{2}$$

$$G(x) \triangleq F(x) + \varphi(t_F, x_\tau) = 0, \tag{3}$$

при $x = x^1(t; x_\tau)$. Выразив $x_\tau = \xi(t, x)$, находим $\varphi^0(t, x) = \varphi(t, \xi(t, x))$.

2) Строим новый приближенный синтез: $u(t, x) = \arg \max_{u \in U} R(t, x, u; \varphi^0)$.

В результате итерационного повторения описанных шагов получаются последовательности $u_s(t, x)$ и $\varphi_s(t, x)$, если процесс построения этих последовательностей оказывается возможным [3]. Здесь функции $\varphi_s(t, x)$ строятся сложным образом, что связано в первую очередь с интегрированием исходной системы при управлениях, зависящих от фазовых координат. Избавиться от этой сложности, а также упростить соотношения Беллмана (2), (3) для поиска разрешающей функции позволяет глобальный алгоритм улучшения управления.

1. Приближенный синтез

Нетрудно видеть, что равенства

$$\begin{aligned} \varphi_x^T(t, x) f(t, x, u^l(t)) + \varphi_t(t, x) &= 0, \\ F(x) + \varphi(t_F, x) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

глобального алгоритма улучшения управления [4] являются аналогами соотношений Беллмана (2), (3) для поиска приближенного синтеза управления методом последовательных приближений. Разница заключается лишь в том, что вместо начального управления в форме синтеза $u^l(t, x)$ в соотношениях (4) используется начальное управление в виде функции времени – программное управление $u^l(t)$. Одна итерация предлагаемого метода поиска приближенного синтеза управления состоит в следующем.

0) Имеем начальное допустимое управление $u^l(t)$, т. е. такую функцию, для которой при любом $x_\tau \in R^n$ процесс $(x^l(t; x_\tau), u^l(t))$ является допустимым. Здесь через $x^l(t; x_\tau)$ обозначено решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, u^l(t)), x(t_I) = x_\tau$.

1) Ищем $\varphi(t, x_\tau)$ из соотношений (4) при $x = x^l(t; x_\tau)$. Выразив $x_\tau = \xi(t, x)$, находим $\varphi^0(t, x) = \varphi(t, \xi(t, x))$.

2) Строим приближенный синтез: $u(t, x) = \arg \max_{u \in U} R(t, x, u; \varphi^0)$, который, в силу свойств метода глобального улучшения, гарантирует выполнение неравенства $F(x^l(t_F; x_\tau)) \geq F(x^u(t_F; x_\tau))$ для любого $x_\tau \in R^n$. Здесь $x^u(t; x_\tau)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), x(t_I) = x_\tau$.

Таким образом, соотношения Беллмана для определения следующего приближения к синтезу управления существенно упрощаются и позволяют на некоторых классах задач отойти от приближенного задания искомой разрешающей функции $\varphi(t, x)$ в виде интерполяционного полинома для функции нескольких переменных, как было независимо предложено в работах различных авторов (например, [1–3, 5]).

Однако найденное управление $u(t, x)$ гарантирует улучшение начального программного управления лишь на одной итерации, т. к. выбор подходящего программного управления для следующей итерации оказывается в общем случае неочевидным.

2. Линейная система с управляемыми коэффициентами

Остановимся подробнее на случае непрерывной задачи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t, u(t))x, t \in [t_I, t_F], x(t_I) = x_I, u \in U \subset R^p, \\ F(x(t_F)) &= \eta^T x(t_F) + x^T(t_F) \rho x(t_F) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (5)$$

где матрица ρ не положительно определена. Сформулируем для этой задачи теорему об улучшении начального программного управления на одной итерации с помощью построенного управления в форме синтеза из соотношений глобального алгоритма улучшения.

Теорема. Пусть $u^l(t)$ – некоторое допустимое управление задачи (5), τ – любое число из интервала $[t_I, t_F]$, x_τ – произвольный n -мерный вектор, $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = A(t, u^l(t))x$, такая, что $\Phi(\tau)$ есть единичная матрица, а $\Psi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = -A^T(t, u^l(t))x$, такая, что $\Psi(t_F)$ есть единичная матрица. Справедливо неравенство

$$F(x^u(t_F)) \leq F(x^l(t_F)),$$

где $x^l(t)$ – решение задачи Коши $\dot{x} = A(t, u^l(t))x, t \in [\tau, t_F], x(\tau) = x_\tau$, $x^u(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t, u(t, x))x, t \in [\tau, t_F], x(\tau) = x_\tau, u(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left(- \left(2x^T (\Phi^{-1}(t))^T \Phi^T(t_F) \rho^T + \eta^T \right) \Psi^T(t) A(t, u) x \right).$$

Доказательство. Выберем произвольным образом допустимое управление $u^l(t)$, момент времени τ и n -мерный вектор x_τ . Проведем одну итерацию метода глобального улучшения управления для

задачи (5) с начальным управлением $u^l(t)$ и начальным условием $x(\tau) = x_\tau$. А именно, сначала найдем функцию $\varphi(t, x) = \psi^T(t)x$, где $\psi(t)$ – решение задачи Коши $\dot{\psi} = -A^T(t, u^l(t))\psi$, $\psi(t_F) = -\eta - 2\rho x^l(t_F)$, что следует из [4, 6]. Заметим, что $x^l(t_F) = \Phi(t_F)\Phi^{-1}(\tau)x_\tau$, следовательно, можно записать $\psi(t) = -\Psi(t)(\eta + 2\rho\Phi(t_F)\Phi^{-1}(\tau)x_\tau)$.

Тогда получим, что улучшение гарантирует функция

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x; \tau, x_\tau) &= \arg \max_{u \in U} (\psi^T(t)A(t, u)x) = \\ &= \arg \max_{u \in U} \left(-(\eta + 2\rho\Phi(t_F)\Phi^{-1}(\tau)x_\tau)^T \Psi^T(t)A(t, u)x \right) = \\ &= \arg \max_{u \in U} \left(-\left(2x_\tau^T (\Phi^{-1}(\tau))^T \Phi^T(t_F)\rho^T + \eta^T \right) \Psi^T(t)A(t, u)x \right). \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что $\tilde{u}(\tau, x_\tau; \tau, x_\tau) = u(\tau, x_\tau)$. Убедимся в этом простой подстановкой

$$\begin{aligned} u(\tau, x_\tau) &= \arg \max_{u \in U} \left(-\left(2x_\tau^T (\Phi^{-1}(\tau))^T \Phi^T(t_F)\rho^T + \eta^T \right) \Psi^T(t)A(t, u)x \right) = \\ &= \tilde{u}(\tau, x_\tau; \tau, x_\tau). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Процесс поиска приближенного синтеза

Вышеизложенная теорема позволяет организовать вычислительный процесс поиска приближенного синтеза управления в заданной области изменения начальных условий $x_l \in X_l \subset R^n$. Будем предполагать, что поставленная задача поиска приближенного синтеза в заданной области решена, если известно приближенно оптимальное по функционалу управление в некоторой достаточно частой сетке узловых точек множества X_l . Очевидно, поставленная задача может быть решена, как задача улучшения для каждого узла заданной сетки, что потребовало бы вычислений разрешающей функции для каждого узла на каждой итерации. С помощью вышедоказанной теоремы эти вычисления можно существенно сократить.

Для этого задается начальное управление $u^l(t)$, для которого проводится одна итерация алгоритма глобального улучшения с целью получения управления в форме синтеза $u(t, x)$. Обозначим это управление через $u^l(t, x)$. В силу вышеоказанной теоремы управление $u^l(t, x)$ улучшает начальное управление $u^l(t)$ для любого $x_l \in X_l$, и, следовательно, на первой итерации процесса нахождения разрешающей функции удалось провести одновременно для всех узловых точек. Далее, разбив сетку узловых точек на достаточно крупные подмножества, можно выбрать в каждом подмножестве начальную точку x_l и построить для второй итерации программное управление $u^{II}(t)$, решая систему с начальным условием $x(t_l) = x_l$, замкнутую управлением $u^l(t, x)$. Теперь вторая итерация проводится отдельно в каждом подмножестве узловых точек для своего программного управления $u^{II}(t)$. Это позволяет на второй итерации процесса найти разрешающую функцию одновременно для всех узловых точек текущего подмножества. Для следующей итерации каждое текущее подмножество опять разбивается на части, после чего шаги алгоритма повторяются аналогичным образом. Отметим, что в каждом подмножестве текущая итерация проходит независимо и при программной реализации может проводиться параллельно, сокращая тем самым время работы компьютерной программы.

Заключение

Показана возможность применения соотношений глобального алгоритма Кротова улучшения управления к поиску приближенного синтеза управления для динамических систем. Для случая линейной по состоянию динамической системы (линейной системы с управляемыми коэффициентами) при квадратичном критерии качества найдено аналитическое выражение синтеза управления на итерации алгоритма. Представленный вычислительный процесс позволяет существенно сократить число операций для поиска разрешающей функции на каждой итерации.

Литература

1. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. – М.: Машиностроение, 1969.
2. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. – М.: Наука, 1969.
3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975.
4. Трушкова Е. А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 151-159.
5. Букреев В.З. Об одном методе приближенного синтеза оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1968. № 11. С. 5-13.
6. Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 64-78.

Трушкова Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления РАН, Москва, тел. (495) 334-79-51, e-mail: katerinatr@mail.ru

Trushkova Ekaterina Alexandrovna, candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Institute of Control Sciences RAS, Moscow.

2. ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 519.710.7+519.688+519.712.65+519.767

© Н.В. Абасов, М.Ю. Чернышов, Е.Н. Осипчук

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ МЕТАМОДЕЛИРОВАНИЯ В УПРАВЛЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ РЕЖИМАМИ ГЭС

Обсуждается концепция метамоделирования и технология 4-уровневого метамоделирования, которая важна для построения гибких моделей, допускающих эффективную перестройку. Переход к такой технологии актуален, если есть потребность в единообразном учете характеристик моделируемого объекта, детерминированных характеристиками проблемной области, которые важно учитывать в первую очередь. Обсуждается интерактивный программный комплекс метамоделирования LMPL-Software, позволяющий строить метамодель, прикладные модели объектов на ее основе, выполнять преобразования моделей, связанные с построением новых моделей из блоков, выделенных при анализе. Эта новая технология позволяет эксперту более эффективно решать прикладные задачи и, в частности, задачу построения модельного представления процесса выбора оптимального режима функционирования ГЭС. Описывается технология оптимизация управления гидроресурсами и планирования таких режимов ГЭС.

Ключевые слова: метамоделирование; метаметамоделирование; язык LMPL; интерактивный программный комплекс метамоделирования; модельное представление процесса выбора оптимального режима; оптимизация управления гидроресурсами.

N.V. Abasov, M.Yu. Chernyshov, E.N. Osipchuk

USE OF METAMODELING TECHNOLOGY IN THE CONTROL OF TECHNOLOGICAL REGIMES OF HYDROELECTRIC POWER PLANTS

A conception of metamodeling is discussed and also a technology of 4-level metamodeling, which is important for constructing flexible models assuming efficient reconstruction. The transition to such a technology is topical, if there is a need in a homogeneous account of the modeled object's characteristics determined by characteristics of the problem domain whose account is predominant. An interactive software metamodeling complex LMPL-Software is discussed, it allows to construct a metamodel, applied models of objects on its basis, conduct models transformations bound up with constructing new models from blocks identified in course of analysis. This new technology gives an expert a more efficient way to solve applied problems and, in particular, the problem of constructing a model representation for the process of choosing an optimum operating regime of a hydroelectric power plant. A technology of optimization of control for hydroresources and planning such regimes of hydroelectric power plants is described.

Keywords: metamodeling; metametamodeling; LMPL language; interactive software complex of metamodeling; model representation of the process of choosing an optimum regime; optimization of control for hydroresources.

1. Современные технологии разработки прикладных программных систем и проблемы, которые они не исключают

Современные технологии разработки **прикладных программных систем (ППС)** предполагают предварительное создание некоей статической компьютерной **метамодели проблемной области (МПО)**, на основе которой и создается ППС, описываемая в терминах языка программирования высокого уровня. Однако, как показала практика, такой подход чреват сложностями адаптации моделей к изменяющимся условиям эксплуатации объекта управления. Поясним, почему это так.

Например, классическая “водопадная” схема разработки ППС предполагает поэтапное решение задачи: 1) постановка задачи; 2) определения требований к МПО и ППС до их программной реализации; 3) анализ задачи; 4) построение МПО; 5) построение ППС; 6) внедрение ППС и начало ее эксплуатации. И, казалось бы, все правильно: ППС программно воплощается после анализа и на основе МПО. Однако при таком подходе МПО разрабатываемые экспертами, оказываются частью исходного кода ППС на языке программирования. В таком случае необходимость изменения (или уточнения) требований к модели потребует существенной корректировки исходного кода программы, а также обновления структур и алгоритмов обработки данных.

Одним из выходов в настоящее время считают технологию, предполагающую использование CASE-средств. CASE-средства, предназначенные для автоматизации разработки сложных ППС,

представляют собой дополнительный набор инструментальных средств для работы с программными моделями. Они позволяют автоматизировать операции проектирования и программирования. Однако и в этом случае МПО становится нераздельной частью проектируемой ППС. К тому же CASE-средства не учитывают формальные ограничения используемого языка программирования, что также приводит к необходимости утомительной корректировки программного кода.

Другой технологией, рекомендуемой в нашем случае, является *проблемно-ориентированное моделирование* [8] (*domain-specific modeling (DSM)*). Она предполагает создание специализированного языка моделирования для описания конкретной проблемной области, позволяющего значительно (по сравнению с использованием языков общего назначения) упростить процесс разработки моделей. В отличие от CASE-средств, где набор инструментов разработки определяется самой системой, язык и термины, используемые в рамках DSM-технологии, ориентированы на конкретную проблемную область, что позволяет экспертам описывать различные элементы моделей на более высоком уровне абстракции. Однако разнообразие специализированных языков вызывает сложности согласования, анализа и развития моделей для специалистов различных профилей.

Известна еще одна возможная технология. Для представления модели объекта в единой наглядной (а потому понятной различным специалистам) форме часто используются *языки графического описания*, например, UML [5], известный как унифицированный язык моделирования. К недостаткам этой технологии можно отнести трудности адекватного выражения смыслов в терминах UML и, как следствие, несовместимость получаемых ППС из-за различной трактовки весьма сложных спецификаций.

Заметим также, что цели комплексного исследования сложных объектных систем (таких, например, как ГЭС с их режимами) предполагают необходимость разработки не одной, а множества моделей. Причина этого проста. На данном этапе развития вычислительной техники уровень возможностей программных систем пока таков, что попытка компьютерного моделирования с учетом большого множества параметров одновременно может привести к проблемам из-за исчерпания памяти. В то же время независимый анализ части параметров на множестве моделей чреват проблемами согласования результатов функционирования таких моделей.

Решение очевидных проблем видится нам в дальнейшем развитии технологий вычислительного моделирования в направлении метамоделирования, что предполагает построение обобщенных и унифицированных моделей, называемых метамоделями [2; 4; 9].

Такие метамодели, конечно же, должны строиться на основе *динамически настраиваемых моделей проблемных областей (ДНМПО)*. На первом этапе перехода к технологии, использующей ДНМПО, широко использовались *многоуровневые архитектуры моделирования* [13; 14] с различными уровнями абстракции. Новый подход, предполагающий описание модели объектной системы в формате высокого уровня (например, с помощью метамодели), позволяет целено исследовать объектную систему без мучительной капитальной перестройки множества моделей.

2. Представление о метамоделях и метамоделировании

Многие авторы используют термин «метамоделирование» как модный, однако его содержание интерпретируют превратно, исходя из значения приставки «мета» по-латыни: «около» или «при». На самом деле *метамодель* есть обобщенная и высокоуровневая (с точки зрения детализации) модель, на основе которой может быть построен (описан) целый класс *прикладных моделей объектных систем одного типа* (ПМОСОТ) [6; 1]. Метамодель отражает особенности структуры и функции, которые являются общими для класса ПМОСОТ. Под *метамоделированием* понимают технологию синтеза класса моделей сложных информационных систем, предполагающую эффективное обобщение данных о моделях этого класса [7]. Технология метамоделирования отличается следующими особенностями (рис. 1): универсальность (метамодель задает характеристики структуры и функций общие для класса моделей); модульность метамодели (при сохранении ее целостности); системность отношений в рамках иерархии (каждый уровень отношений в метамодели имеет свои правила представления и свои взаимосвязи); модифицируемость и расширяемость модели (модель, строящаяся на основе метамодели, может быть легко модифицирована или расширена без принципиальной модификации основы); интероперабельность (возможность подключения моделей других информационных систем и взаимодействия с этими моделями).

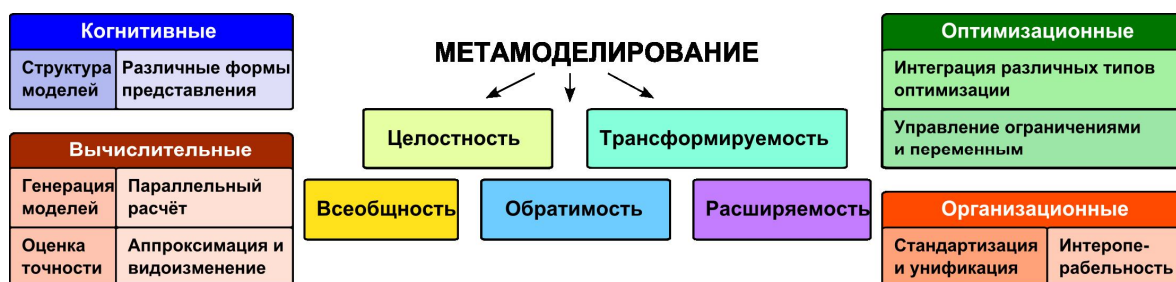


Рис. 1. Особенности технологии метамоделирования

При описании класса объектов с помощью метамодели может быть задано несколько уровней абстрагирования, причем каждый уровень должен целостно и непротиворечиво отражать структуру и связи внутри множества производных моделей *объектной системы* (ОС), которые могут формироваться автоматически на основе единых принципов построения моделей. Заметим, что если построена МПО, то при построении производных моделей ОС на ее основе можно сосредоточить внимание исключительно на существенных деталях и специфических особенностях модели (моделей) ОС, поскольку основные их особенности в метамодели являются едиными для данного класса моделей ОС. Решение задачи эффективного построения МПО, метамodelей ОС и моделей ОС на ее основе существенно упрощает наличие адекватного языка вычислительного моделирования.

Существуют различные технологии метамоделирования как обобщенного формализованного моделирования систем на основе метамodelей. Например, технология *Model Driven Development* (MDD) [10; 12], предложенная консорциумом Object Management Group (OMG) и предполагающая модельно-управляемое метамоделирование, сегодня широко применяется в программировании. Согласно технологии MDD при проектировании сложных однотипных систем, относящихся к одной проблемной области, учитываются их типовые (повторяющиеся) особенности, выстраивается иерархия моделей и оценивается возможность их использования в качестве универсальных шаблонов. Наличие такой иерархии позволяет построить на ее основе множество конкретных моделей ОС, при условии, что управление у них будет общее.

Если еще недавно технология программного метамоделирования как подход, подразумевающий систематизацию процесса моделирования, предполагала построение лишь двух уровней (уровень метамодели и уровень моделей, строящихся на ее основе), то современная технология метамоделирования учитывает потребность построения сложных МПО, а потому включает в себя уже следующие 4 уровня модельного представления объектов и отношений (действий, процессов, состояний) (рис. 2): 1) уровень метамодели (со спецификацией правил, согласно которым описывается множество метамodelей проблемной области); 2) уровень метамодели, на котором создается метамодель (“модель моделей”), отражающая общие черты конкретного класса моделей; 3) уровень модели (здесь на основе метамодели формируется модель (или класс моделей) конкретного объекта); 4) уровень выявления и конкретизации основных данных о модели (с учетом особенностей проблемной области), с которого при старой технологии начинался процесс моделирования, а при новой технологии – завершается процесс моделирования.

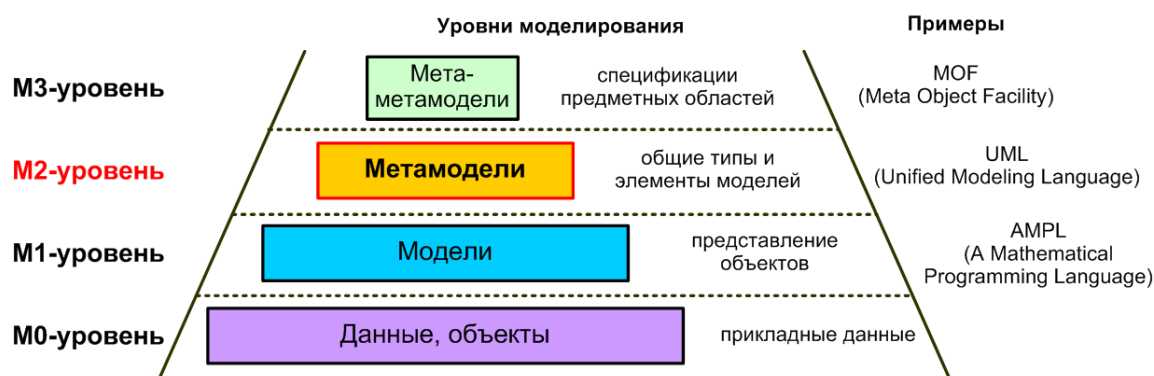


Рис. 2. Технология четырехуровневого метамоделирования

Как уже было сказано, переход на метауровень становится целесообразным, если возникает потребность в построении гибких моделей, которые были бы эффективно перестраиваемыми. Переход на метаметауровень становится необходимым, если возникает потребность в единообразном учете характеристик моделируемого объекта, детерминированных особенностями проблемной области. При этом получается, что, прежде всего, следует учесть характеристики проблемной области.

Таким образом, принципиальной и важнейшей особенностью новой технологии, по нашему убеждению, является то, что она инвертирует процесс построения моделей, изменяя его направление (от метаметамоделирования к моделированию) и, как следствие, его содержание. Использование новой технологии вычислительного моделирования позволяет организовать эффективный процесс построения модели, предполагающий возможность автоматизированного анализа и модификации модели на каждом уровне. Например, наличие уровня М2 позволяет учесть в модели уровня М1 множество семантических и структурных особенностей соответствующего класса моделей. Уровень М3 позволяет детально учесть в классе моделей особенности конкретной проблемной области.

К преимуществам технологии метамоделирования с точки зрения оптимизации вычислений следует отнести возможность автоматической генерации моделей низших уровней абстрагирования и возможность параллельных вычислений для отдельных моделей. Кроме того, технология метамоделирования способствует продвижению идеи стандартизации и унификации моделей, создаваемых для различных проблемных областей.

3. Программное воплощение технологии метамоделирования

Построение компьютерных метамоделей, метамоделей и моделей технологических процессов, требующих оптимизации, метамоделей и моделей логического вывода, позволяющих принимать решения, является потребностью, диктуемой временем.

Применение метамоделирования предполагает использование методов *математического программирования* (МП) и позволяет сочетать различные методы оптимизации; уменьшать число и диапазон поиска переменных, удаляя недействительные ограничения и переменные; объединять некоторые ограничения; выполнять оценку точности расчетов.

Рынок до сих пор испытывает дефицит в *интерактивных программных комплексах* (ИПК) *метамоделирования* (ИПКММ), способных функционировать в режиме дискурса «пользователь – ИПКММ» и пригодных для построения гибких логических метамоделей, позволяющих выполнять операции логического вывода, оптимизации, принятия решений и т. п. [1; 4]. Еще больший дефицит образуют ИПКММ, способные обеспечить гибкую перестройку метамоделей и моделей с учетом возникающих новых потребностей и задач. В этой связи нами был разработан язык вычислительного моделирования, получивший название Light Mathematical Programming Language (LMPL) [2]. LMPL построен на основе прототипов: языка MPL [15] и его расширенного (augmented) варианта AMPL [11]. LMPL предполагает декларативное описание зависимостей, ограничений и критерия оптимизации в терминах программной логики, описанной на языке ОЛФИС.

LMPL предназначен для компактного, наглядного метамоделирования, предполагающего конечной целью построение логического вывода при принятии решений и при решении задач *математического программирования* (МП). Он обеспечивает упрощенный синтез моделей и метамоделей. Важно и то, что LMPL обеспечивает наглядную форму декларативного представления метамоделей и моделей в терминах МП. При таком представлении МП-модель (в т. ч. зависимости, ограничения, критерии оптимизации) представляются в виде набора блоков (табл. 1). Использование LMPL позволяет легко определять индексные переменные и строить упрощенный синтаксис (т. е. нет операторов, характерных для императивных языков программирования).

Характеристики LMPL подробно описаны в [9], где в таблице 1 представлен базовый набор функциональных блоков языка LMPL с описанием их функций, а таблица 2 – синтаксис LMPL в расширенной форме Бэкуса – Наура.

После несложных преобразований модель, записанная на LMPL, легко интерпретируется как МП-модель в задаче математического программирования. В целях решения такая МП-модель передается решателям и легко преобразуется. Итоги счета выводятся в различных выходных форматах.

На основе LMPL был разработан оригинальный программный комплекс, являющийся ИПКММ и названный LMPL-Software [3; 4], рассматриваемый нами как эффективное средство построения прикладных программных метамоделей и моделей, строящихся на основе принципов математического программирования. Мета модель, строящаяся с помощью такого ИПКММ, включает в себя обобщен-

ную базу знаний, соответствующую данной проблемной области, а также программные конструкторы, предназначенные для синтеза прикладных моделей.

Заметим, что любая модель ОС, записанная в терминах LMPL, после преобразований автоматически приводится к классической форме, соответствующей исходной МП-задаче, т. е. к форме, во-первых, удобной для исследователя, а во-вторых, для автоматической передачи различным решателям задач (lp_solve, COPL_QP, QSOpt, GAMS [16], AMPL и др.).

Функция метамоделирования как синтеза обобщенного образа класса моделей предполагает следующие этапы: 1) задание шаблона метамодели; 2) выбор и объявление блоков, входящих в метамодел (например, включение блока базовых уравнений моделей, основных констант); 3) объявление метапеременных, т. е. промежуточных переменных, которые позднее, в процессе генерации конкретной модели, заменяются; 4) задание параметров метамодели (например, названия объекта, режима работы, начального состояния) и выбор предполагаемого решателя задач и его характеристик; 5) генерация модели на языке LMPL с помощью разработанного модуля-конвертера; 6) приведение LMPL-метамодели к формату решателя.

ИПКММ LMPL-Software позволяет построить метамодел, модель на ее основе (а позднее – модифицировать ее, выполняя преобразования модели, связанные с построением новых моделей из блоков, выделенных при анализе), а затем моделировать процессы логического вывода и принятия решений.

При этом ИПКММ LMPL-Software обеспечивает выполнение следующих важных операций:

- 1) построение модели условной объектной системы из базовых блоков метамодели (рис. 3);

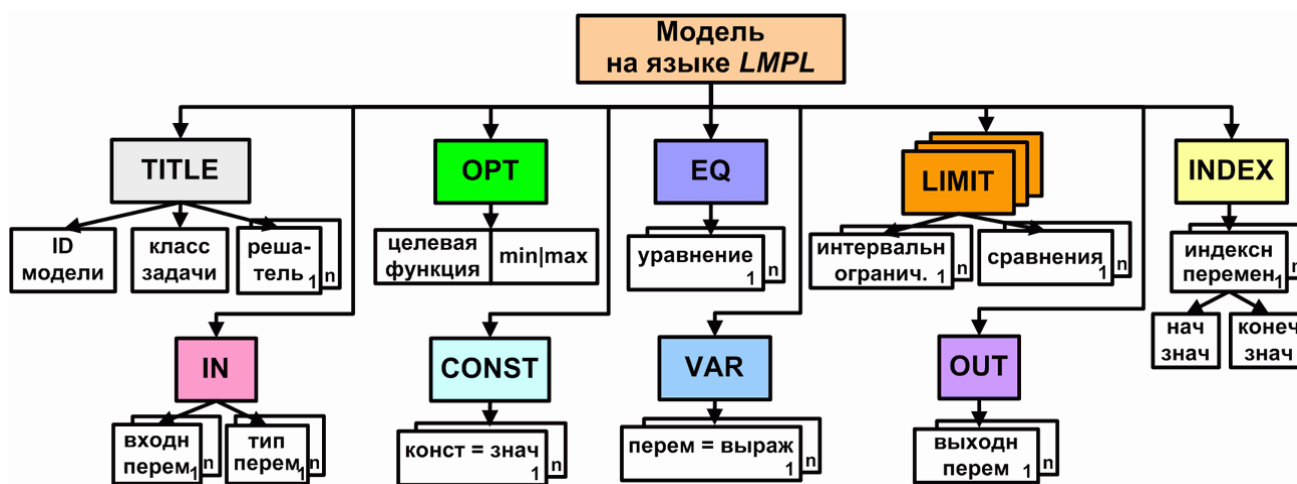


Рис. 3. Универсальная структура модели условной объектной системы, состоящей из базовых функциональных блоков метамодели

- 2) построение прикладной модели на ее основе;
- 3) сравнение модели с прототипом (если есть), выявление структурных отличий, выделение общих частей;
- 4) построение графов связей между объектами модели (рис. 4);
- 5) построение логического вывода на модели, для чего поддерживается проведение многоитерационных расчетов, включая стохастическую оптимизацию;
- 6) поддержка автоматических преобразований моделей (эта функция может быть использована, например, в исследовании алгоритмов).

Портативная (т. е. компактная) и кроссплатформенная реализация ИПКММ (в виде библиотек на языке Lua с использованием пакета lp_solve в качестве базового решателя) дает возможность подключения почти любых универсальных внешних программ, пригодных для решения различных МП-задач. В случае необходимости могут быть выполнены анализ результатов, полученных решателем, и генерация отчетов (в текстовом и графическом режимах). Процесс моделирования предполагает: а) объявление набора случайных параметров и их характеристик; б) задание параметров управления

блоком стохастической оптимизации (количество итераций, шаг дискретизации); в) генерацию множества детерминированных моделей (генерации случайных чисел); г) решение оптимизационной задачи с сохранением текущих оптимальных показателей по каждой итерации; д) обработку накопленной статистики; е) формирование итоговых таблицы с вероятностными распределениями.

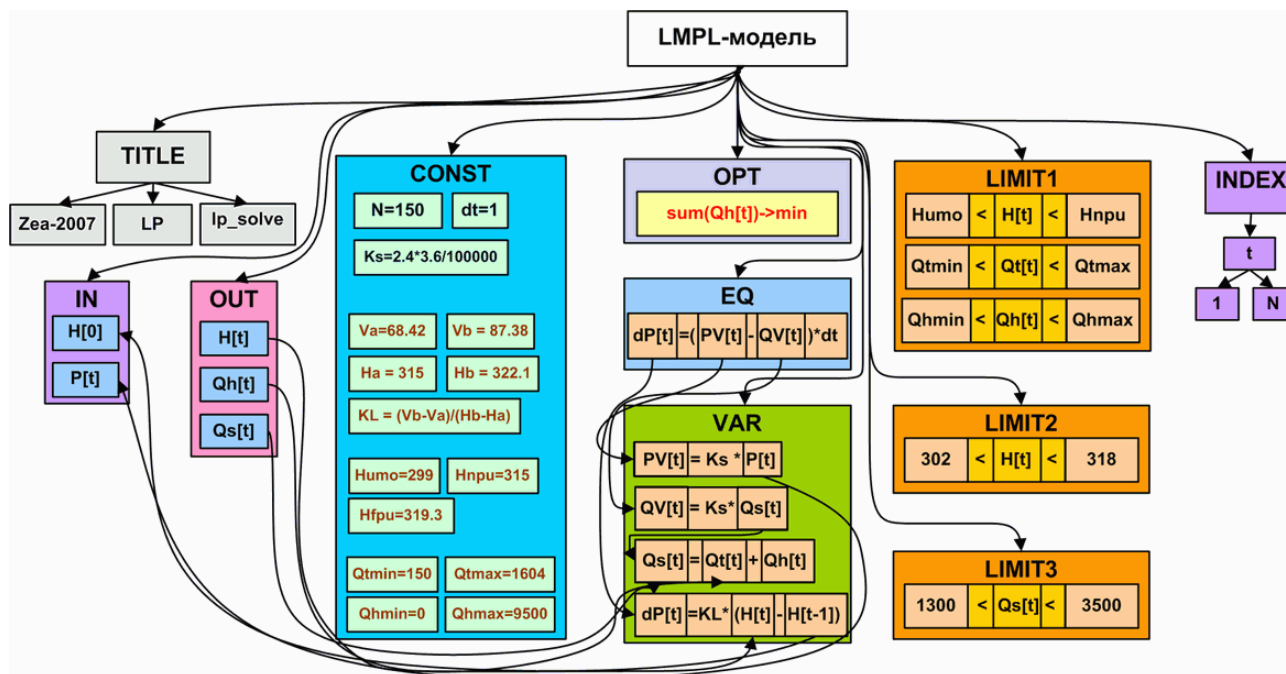


Рис. 4. Пример графа семантически значимых связей между основными компонентами модели

Структура исходного текста конкретной модели строится из функциональных блоков, которым сопоставляются класс задачи, идентификатор типа модели, тип решателя задачи, целевая функция, функция сравнения, ограничения, индексные переменные, переменные и константы, соответствующие задачам и условиям моделирования. На рис. 3 приведена универсальная структура условной модели на LMPL (базовый набор основных функциональных блоков языка LMPL, функции, переменные и константы). Очевидно, что LMPL позволяет описать модель в форме, являющейся в некотором смысле отображением матлогической формы, поскольку предполагает использование множества индексных переменных, констант, операторов и кванторов. Представления о переменных, множествах, граничных условиях позволяют обращаться к ним, используя соответствующие индексы. Опционально может быть указан предполагаемый решатель МП-задач. При синтезе моделей важной является возможность их представления в декларативной форме. В случае императивной формы, в терминах которой строится большинство программ и моделей, логика синтеза существенно осложнена необходимостью последовательного процесса синтеза модели. Декларативная форма дает возможность строить эффективное описание моделей, а также создавать гибкие средства для последующего исследования алгоритмов и их усовершенствования.

ИПКММ LMPL-Software позволяет выполнять следующие операции, квалифицированные как операции, связанные с синтезом моделей: а) построение модели из частей; б) сравнение модели с прототипом и выявление структурных отличий; в) построение графов связей между объектами модели (рис. 4), которыми могут быть не только структурные элементы, но также переменные. Комплекс позволяет также выполнять следующие операции анализа моделей: 1) анализ графов связей между объектами модели (рис. 2) (т. е. между различными переменными и множествами переменных); 2) выявление структурных отличий модели от прототипа; 3) выделение общих частей модели и прототипа. Все операции синтеза и анализа моделей выполняются в режиме дискурса «пользователь – программный комплекс».

4. Подход к метамоделированию в целях исследования и выбора оптимальных технологических режимов гидроэлектростанций

Рассмотрим подход, предполагающий применение метамоделирования при выборе оптимальных технологических режимов. Технология выбора оптимального режима требует изучения и сравнения различных вариантов режимов. Удобно, если такие варианты представлены в модельной форме.

Технология метамоделирования может быть применена в сфере управления гидроэнергетическими и водохозяйственными системами. Для этого был разработан специальный инструментарий, включающий базу знаний из фрагментов моделей технологических режимов и программные конструкторы для построения производных моделей режимов.

При выборе оптимальных режимов и в этих целях изучении и сравнении различных вариантов режимов гидроэлектростанций (ГЭС), представленных в модельной форме, специалисты, как правило, сталкиваются с необходимостью связать множество отдельных моделей, соответствующих различным вариантам режимов, в единую систему, построив обобщенную модель, отражающую множество различных возможных случаев и множество различных вариантов режимов ГЭС. Такая обобщенная модель и есть метамодель. На ее основе можно 1) выполнить анализ, исследовав множество вариантов связей между составляющими метамодели; 2) построить вывод об оптимальном режиме, позволяющий принять рациональное решение, связанное с управлением стоком и выработкой электроэнергии; 3) осуществить долгосрочное планирование режимов ГЭС.

Учтем, что БЗ ИПКММ LMPL-Software содержит варианты различных типов режимов, которым сопоставлены основные уравнения, переменные, константы, критерии оптимизации и ограничения. Это позволяет генерировать модели конкретных режимов и выбирать из них лучшие автоматически.

Пример модельного представления процесса выбора оптимальных режимов ГЭС, полученного на основе принципа метамоделирования, представлен на рис. 5.



Рис. 5. Пример модельного представления процесса выбора оптимального режима функционирования ГЭС, полученного на основе принципа метамоделирования

Заметим, что возможно построение метамодели в детерминистическом и стохастическом случаях. Метамодель может быть стохастической в том смысле, что в ней один параметр или несколько параметров описываются некоторой функцией распределения.

Процесс метамоделирования в детерминистическом случае, предполагающем получение модельного представления процесса выбора оптимальных режимов ГЭС, включает в себя следующие этапы: 1) задание шаблона данной метамодели; 2) объявление блоков, входящих в метамодель (в том числе включение блока основных уравнений моделей и констант); 3) объявление метапеременных, заменяемых в процессе генерации данной прикладной модели; 4) задание параметров метамодели (объект, режим работы ГЭС, параметры, отражающие начальные состояния, т. е. значения переменных и констант); 5) выбор предполагаемого решателя задач; 6) генерация модели режима ГЭС на языке

LMPL с помощью модуля-конвертера; 6) приведение построенной LMPL-модели к формату решателя задач; 7) анализ результатов, полученных решателем; 8) формирование отчетов в текстовой и графической формах.

Процесс моделирования в стохастическом режиме предполагает следующие этапы: 1) объявление набора случайных параметров и их характеристик; 2) задание параметров управления стохастическим блоком (количество итераций, шаг дискретизации); 3) создание множества детерминированных моделей с помощью генератора случайных чисел (ГСЧ) произвольного распределения; 4) решение оптимизационной задачи с сохранением текущих оптимальных показателей на каждой итерации; 5) обработку накопленной статистики, формирование итоговой таблицы с вероятностными распределениями.

Все операции построения метамоделей (а позднее – моделей на их основе) и операции, связанные с их анализом, выполняются в режиме дискурса «пользователь – программный комплекс».

5. Решение задач управления режимами ГЭС с применением средств технологии метамоделирования

Решение задачи выбора оптимальных технологических режимов для гидроэлектростанций создает основу новой технологии, дающей возможность оптимизации управления режимами ГЭС и планирования таких режимов.

В методологии управления режимами ГЭС до сих пор использовали два подхода, основанных на «правилах назначения режимов гидроузлов с помощью диспетчерских графиков» и расчетах режимов с помощью различных математических моделей. Повышение качества принимаемых управленческих решений возможно при условии правильного выбора технологических режимов и при учете возможных рисков функционирования ГЭС. Для этого необходимо учесть и использовать данные, полученные посредством нескольких различных методических подходов, дополняющих друг друга. Это позволяет сделать новая технология, предполагающая метамоделирование, которая обеспечивает согласование традиционных подходов с новыми, использующими долгосрочные прогнозы природообусловленных факторов энергетики (прогнозы приточности воды в водохранилища, осадков и температур в различные периоды). Описание режимов ГЭС с помощью метамоделей позволяет целостно представить и исследовать функционирование гидрообъекта с учетом различных требований, ограничений и прогнозных данных по притоку.

Метамоделирование режимов ГЭС в целях управления строится с использованием 4-уровневого обобщения данных об объекте: *0-уровень* – данные, отражающие технические характеристики гидрообъекта, основные режимы функционирования, сведения о приточности, прогнозные данные и др.; *1-уровень* – математические модели режимов с данными об отдельной ГЭС; *2-уровень* – метамоделей режимов множества ГЭС в форме кратких описаний связей, отражающих общие фрагменты моделей; *3-уровень* – обобщение метамоделей (с построением метаметамоделей) для комплексного исследования энергетических сетей.

Метамодель, рассчитываемая для множества режимов ГЭС, отображается в серию моделей задачи МП, предполагающей оптимизацию функционала с различными ограничениями. Блоки метамоделей режимов ГЭС содержат элементы различных типов моделей, например, ограничения, критерии оптимизации, переменные, константы с общим уравнением водного баланса.

6. Технология оценки и выбора оптимальных режимов ГЭС

Для оценки и выбора оптимальных режимов ГЭС с учетом входной прогностической информации, имеющей вероятностный характер (например, информации о приточности воды в водохранилища), можно проводить многоитерационные расчеты посредством технологии стохастической оптимизации.

Разработанная *технология оценки режимов ГЭС* на основе метамоделей предполагает следующие процедуры:

- 1) создание контейнеров (наборов) моделей со стохастическими параметрами с помощью генератора случайных чисел (ГСЧ) произвольного распределения;
- 2) обработка контейнеров с синтезом детерминированных моделей;
- 3) приведение синтезированных моделей к формату внешнего решателя;
- 4) параллельное решение оптимизационных задач с помощью одного или нескольких решателей и сохранением оптимальных показателей;

5) выбор нового контейнера для синтеза моделей;

Для анализа накопленной статистики решений проводятся процедуры:

1) идентификации итоговых функций распределения;

2) проверки унимодальности выходных показателей с добавлением или корректировкой искусственных управленческих ограничений в случае несоответствия заданным требованиям;

3) оценки риска выхода за ограничения (по пороговой вероятности) с возможным ослаблением управленческих ограничений или видоизменением исходной модели (например, заменой критерия оптимизации или сезонных ограничений) при высоких рисках;

4) формирования управленческих решений с автоматическим построением итоговых таблиц и графиков с вероятностными распределениями.

Эти процедуры реализованы в виде системы специальных программных компонент, образующих технологию моделирования (рис. 6).

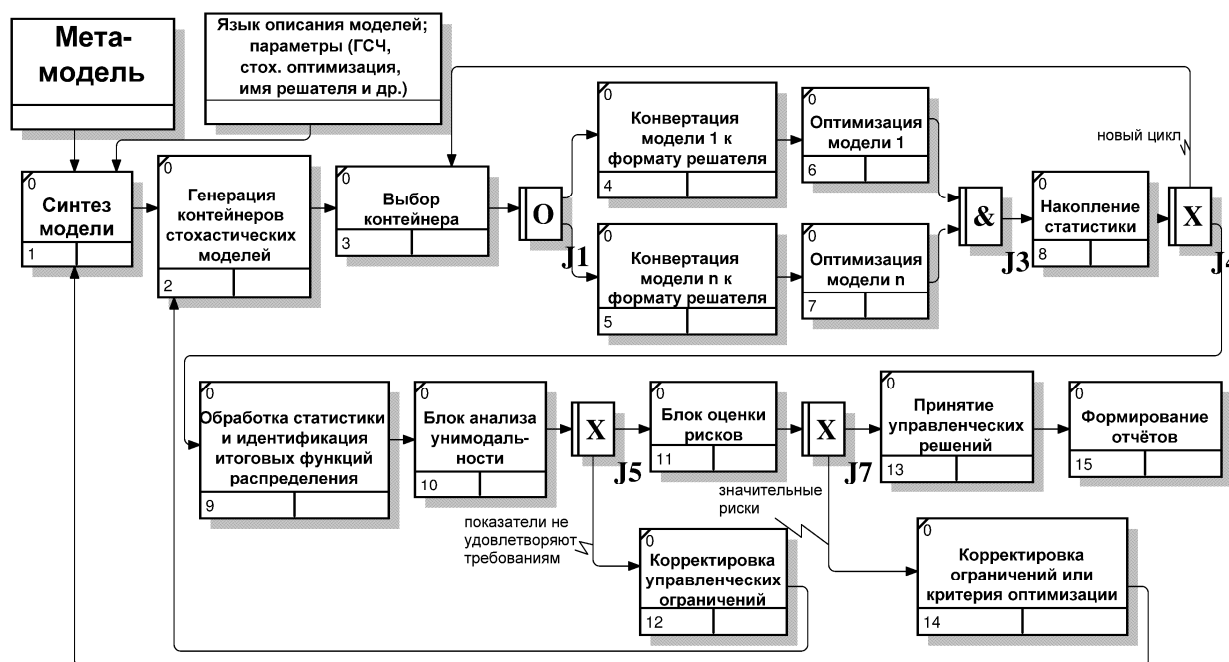


Рис. 6. Реализация технологии моделирования процесса выбора режима ГЭС, предполагающая выработку унимодального управленческого решения (нотация IDEF3)

Разработаны базовые программные компоненты для: а) управления метамоделью режимов ГЭС; б) синтеза детерминированных и стохастических моделей; в) декомпозиции контейнеров моделей; г) оптимизации моделей различными решателями; д) обработки прогностических данных; е) накопления статистики; ж) оценки рисков; з) решения прикладных задач (проверки ограничений, формирования отчетов и др.).

Реализация этих компонент предполагает задействование следующих открытых портативных программных модулей: (i) мультипарадигменный компактный язык программирования *lua* с расширением базовых функций на языках C/C++ для обработки и управления моделями; (ii) пакеты *lp_solve* и *QSOpt* для решения задач линейного, целочисленного, смешанного программирования, *COPL_QP* – задач квадратичного программирования; (iii) среды *gnuplot* для построения графиков.

Такая технология сама по себе уже позволяет повысить эффективность расчетов. Для еще большего повышения эффективности расчетов критические для быстродействия функции (например, генерация, обработка и конвертирование LMPL-моделей) были вынесены в управляющее ядро языка *lua*, с расширением его базовых (API) функций. Повышение эффективности расчетов в случае стохастических моделей достигается за счет генерирования необходимого объема выборок, использования специального ГСЧ с возможностью задания функции распределения, а также распараллеливания циклов оптимизации.

Для вызова решателей из lua используется специально разработанная технология с подключением библиотек статической и динамической компоновки. Для исследования *структур моделей* в язык LMPL включены процедуры для автоматического проведения следующих преобразований: а) построение *графов связей* объектов; б) поиск структурного отличия моделей; в) выделение *общих частей* моделей; г) введение *новых переменных* для упрощения модели; д) подстановка *промежуточных переменных* с включением алгебраических символьных преобразований. С их помощью можно выбрать формы представления моделей (рис. 7), удобные для исследователя.

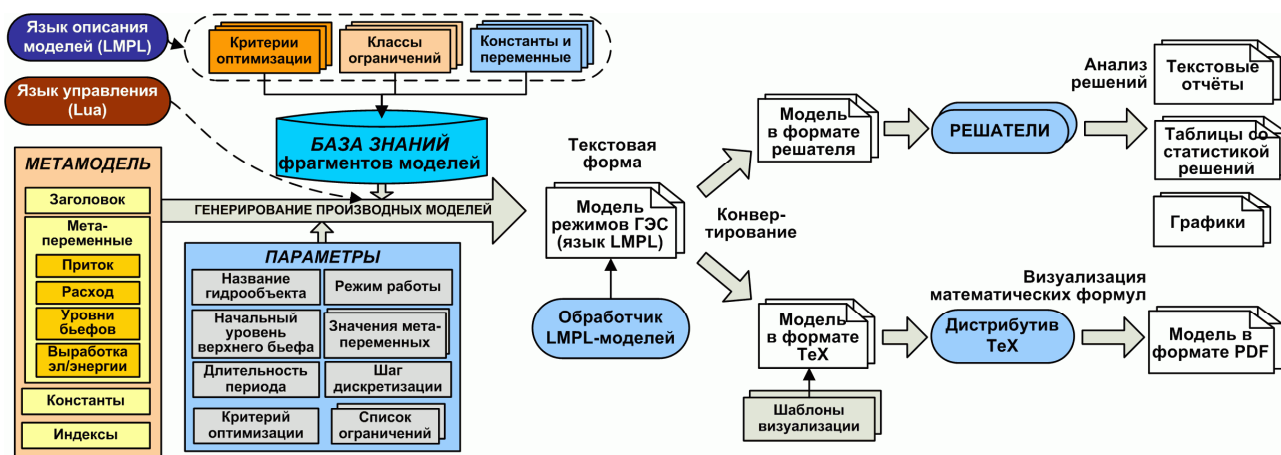


Рис. 7. Порождение различных моделей на основе метамодели (на примере режимов ГЭС)

Для отображения моделей в математической форме разработано специальное средство генерации текста на языке LaTeX, предполагающее автоматическое формирование PDF файла. Заметим, что наличие набора средств визуализации предполагает не только возможность выбора форму отображения блоков модели, но также варьирование алгоритма вывода.

7. Об основных итогах исследования

Таким образом, итогом нашего исследования стало выполнение исключительно важного комплекса работ.

Четко сформулирована концепция метамоделирования и технология 4-уровневого метамоделирования, которая важна для построения гибких моделей, допускающих эффективную перестройку. Переход к такой технологии актуален, если есть потребность в единообразном учете характеристик моделируемого объекта, детерминированных характеристиками проблемной области, которые важно учитывать в первую очередь.

Построен интерактивный программный комплекс метамоделирования LMPL-Software, позволяющий строить (а) метамодель, (б) прикладные модели объектов на ее основе, (в) выполнять преобразования моделей, связанные с построением новых моделей из блоков, выделенных при анализе. Новая технология и указанный программный комплекс позволяют эксперту более эффективно решать важные прикладные задачи и, в частности, (1) задачу оценки возможных рисков, связанных с функционированием ГЭС на основе прогнозов; (2) задачу построения модельного представления процесса выбора оптимального режима функционирования ГЭС; (3) задачу выбора оптимальных режимов ГЭС с учетом доступной прогностической информации; (4) задачу гибкого программного формирования управленческих решений, связанных с эксплуатацией ГЭС, решение которой предполагает воплощение технологии эффективного управления стоком и производством электроэнергии.

На основе созданного комплекса воплощена оригинальная технология, предполагающая сочетание средств метамоделирования и метаметамоделирования, которая позволяет строить серии моделей, необходимых для решения задачи математического программирования; разработаны программные средства для управления метамоделью режимов ГЭС; реализованы гибкие прикладные программные версии ИПКММ LMPL-Software, рассчитанные на модельное представление процесса выбора оптимальных режимов ГЭС на основе принципа метамоделирования.

Важно то, что построение метамodelей и modelей режимов ГЭС может протекать в интерактивном режиме, а именно в дискурсе «пользователь – программный комплекс».

Практическое опробование предложенной технологии метамodelирования с использованием ИПКММ LMPL-Software на ряде разнотипных прикладных задач [2; 3] показало эффективность этого комплекса. Это подтвердило верность идеологии: использование LMPL, реализованного в форме технологии метамodelирования, позволяет эффективно решать комплекс оптимизационных задач математического программирования, строить операции логического вывода, оптимизации и на этой основе принимать решения.

Литература

1. Исследование структуры дискурса средствами математического программирования и формальный анализ его логической семантики [Текст] / Н.В. Абасов [и др.] // Вестник ИГЛУ. – 2013. – № 2 (23). – С. 180–187.
2. Язык LMPL как средство синтеза прикладных программных modelей и метамodelей на основе принципов математического программирования / Н.В. Абасов [и др.] // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2013. – № 3 (74). – С. 12–16.
3. Программный комплекс для синтеза прикладных программных modelей и метамodelей основе принципов математического программирования [Текст] / Н.В. Абасов [и др.] // Вестник Буряцкого государственного университета. Сер. Математика. Информатика. – 2013. – Вып. 9. – С. 76–80.
4. Абасов Н.В., Чернышов М.Ю. Построение технологии современного метамodelирования для решения прикладных задач // Вестник БГУ. – 2014. – № 2. Математика. Информатика. – С. 24–31.
5. Буч Г., Рамбо Дж., Джекобсон А. Язык UML. Руководство пользователя. – 2-е изд. – М.; СПб.: ДМК Пресс, Питер, 2004. – 432 с.
6. Лядова Л.Н. Метамodelирование и многоуровневые метаданные как основа технологии создания адаптируемых информационных систем // Advanced Studies in Software and Knowledge Engineering (International Book Series «Information Science & Computing», No. 4). – Varna, Bulgaria, 2008. – P. 125–132.
7. Нечаев В.В. Введение в теорию метамodelирования систем. – М.: Информациология, 1997. – 64 с.
8. Фаулер М. Предметно-ориентированные языки программирования. – М.: Вильямс, 2011. – 576 с.
9. Чернышов М.Ю., Абасов Н.В. Программный комплекс для построения прикладных modelей и метамodelей на основе принципов математического программирования // Вестник РУДН. Сер. Информатизация образования. – 2013. – № 3. – С. 35–46.
10. Beydeda S., Book M., Gruhn V. (eds.). Model-Driven Software Development. – Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 464 p.
11. AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming [Text] / R. Fourer, D.M. Gay, B.W. Kernighan. – New York: Thomson, Brooks and Cole, 2002. – 517 p.
12. Frankel D.S. Model Driven Architecture: Applying MDA to Enterprise Computing / D.S. Frankel. – New York: OMG Press, 2003. – 354 p.
13. Gigch J. P. van. System Design Modeling and Metamodeling / J.P. van Gigch. – New York: Plenum Press, 1991. – 453 p.
14. Metamodeling for Method Engineering / M.A. Jeusfeld, M. Jarke, J. Mylopoulos. – Cambridge, MA: MIT Press, 2009. – 424 p.
15. MPL Modeling System. Maximal Software. – URL: <http://www.maximal-usa.com> (дата обращения: 20.01.2013).
16. GAMS Manual / O. Tikhonova, Daene C. McKinney, A. Savitsky. – URL: http://www.gams.com/docs/contributed/gamsman_russian.pdf (дата обращения: 18.01.2013).

Абасов Николай Викторович, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Иркутского научного центра СО РАН, тел. 89646535739, e-mail: abasov_nv@rambler.ru.

Чернышов Михаил Юрьевич, кандидат филологических наук, зав. научно-методической частью Президиума Иркутского научного центра СО РАН, тел. 89149327490, e-mail: Michael_Yu_Chernyshov@mail.ru.

Осипчук Евгений Николаевич, кандидат технических наук, младший научный сотрудник Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Иркутского научного центра СО РАН, г. Иркутск, 664033, ул. Лермонтова, 130, e-mail: evgeny-osipchuk@yandex.ru

Abasov Nickolay Viktorovich, candidate of engineering sciences (computational technologies), leading researcher, Melentyev Energy Systems Institute, SB RAS, Irkutsk; tel.: 89646535739, e-mail: abasov_nv@rambler.ru

Chernyshov Michael Yurievich, candidate of philological sciences (mathematical linguistics, artificial intelligence), head of the research-methodological division, Presidium of Irkutsk Scientific Center, SB RAS, Irkutsk; tel.: 89149327490, e-mail: Michael_Yu_Chernyshov@mail.ru

Osipchuk Evgeny Nickolaevich, candidate of engineering sciences, junior researcher, Melentyev Energy Systems Institute, SB RAS, Irkutsk; e-mail: evgeny-osipchuk@yandex.ru

УДК 004.75

© А.С. Гаченко, Т.И. Маджара, Г.М. Ружников, А.Е. Хмельнов

ПРИМЕНЕНИЕ ГИС- И ВЕБ-ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ИНТЕГРИРОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Статья посвящена актуальным проблемам разработки региональной информационно-аналитической системы.

Ключевые слова: *инфраструктура пространственных данных, базовые пространственные данные, каталоги метаданных, реестры, органы государственной власти, картографические данные.*

A.S. Gachenko, T.I. Madzhara, G.M. Ruzhnikov, A.E. Khmelnov

GIS AND WEB TECHNOLOGIES APPLICATION FOR CREATION OF INTEGRATED INFORMATION-ANALYTICAL SYSTEMS

The article is devoted to topical problems of development a regional information and analytical system.

Keywords: *infrastructure of spatial data, basic spatial data, catalogs of metadata, registers, public authorities, cartographical data.*

Введение

В настоящее время цифровые геопространственные данные активно используются в научных исследованиях и решении большого перечня задач управления территориальным развитием.

Специфика формирования геоинформационных ресурсов обострила актуальность создания проблемно-ориентированных программных средств, интегрирующих универсальные сетевые технологии с ГИС-технологиями, поддерживающими организацию и работу с пространственно-распределенными данными, т.е. создающими интерактивную среду взаимодействия клиентских приложений с ГИС-сервером.

На начальном этапе развития картографические web-серверы обеспечивали лишь выбор и просмотр заданного набора картинок в форматах GIF, JPEG или другом графическом формате. Первым среди подобных серверов считается National Atlas Information Service (NAIS) of Canada. Следующим этапом развития систем для Web-просмотра картографической информации было подключение функций СУБД для взаимодействия с базами данных (БД), содержащими атрибутивные данные карт. Такой подход предъявил более высокие требования к программно-аппаратному обеспечению сервера, однако при этом повысилась эффективность его работы за счет структурированного представления картографических данных [3].

В институтах Иркутского научного центра (ИНЦ) СО РАН научные исследования базируются на уникальных проблемно- и предметно-ориентированных базах пространственных данных по ландшафтам и геосистемам, картографированию природы, хозяйства и населения Сибири (Институт географии СО РАН), геологической среде и сейсмическим процессам (Институт земной коры СО РАН), геохимии окружающей среды и осадочных бассейнов (Институт геохимии СО РАН), электроэнергетическим и трубопроводным систем (Институт систем энергетики СО РАН), биоразнообразию фауны и флоры оз. Байкал (Лимнологический институт СО РАН), физиологии растений, молекулярной биологии и экологии растительных организмов (Сибирский институт физиологии и биохимии растений СО РАН), дистанционному зондированию поверхности Земли (Институт солнечно-земной физики СО РАН) и т.д.

В настоящее время в данном направлении наиболее актуальны работы по разработке и созданию:

- интеллектуальных методов и инструментальных средств создания, анализа интегрированных распределенных информационно-аналитических и вычислительных систем с применением ГИС, GRID и web-технологий;

- единой интегрированной инфраструктуры проблемно- и предметно-ориентированных тематических баз пространственных данных институтов ИНЦ СО РАН;

- современных методов и технологий интеграции разноформатных междисциплинарных данных и результатов исследований, базирующихся на пространственных характеристиках и признаках;
- централизованного хранилища цифровой топоосновы и картографической информации с удаленным Web-доступом пользователей;
- системы сервисов геоданных СО РАН;
- новых методов и технологий исследования и обработки пространственных данных, включая разработку логических методов и методов обработки больших массивов данных;
- ГИС-портала институтов ИНЦ СО РАН;
- методов и средств планирования распределенного решения информационно-вычислительных задач;
- специальных баз проблемно-ориентированных и предметно-ориентированных географических данных и знаний для их размещения в Интернет;
- новых моделей и методов, базирующихся на результатах натуральных наблюдений и на эмпирических данных, включая создание методов и технологий обработки данных дистанционного зондирования;
- новых методов и технологий анализа и обработки географических данных и знаний в интегрированных системах геоинформационного картографирования.

В рамках комплексного проекта информатизации науки и образования в ИНЦ СО РАН создана Интегрированная информационно-вычислительная сеть Иркутского научно-образовательного комплекса (ИИВС ИрНОК) с пропускной способностью магистрали до 1Gb/s, а также региональный узел доступа к Сети передачи данных (СПД) СО РАН.

В 2012 году российской компанией «Т-Платформы» на базе ИДСТУ СО РАН реализован проект создания «под ключ» гибридного вычислительного кластера, названного именем известного ученого, директора-организатора института, академика В.М. Матросова. В качестве вычислительных узлов кластера использована универсальная платформа T-Blade V-Class V205S с процессорами AMD Opteron 6276 «Interlagos». Пиковая производительность системы составляет 33,7 Тфлопс. В 16-й редакции (от 27.03.2012) списка Топ-50 вычислительный кластер «Академик В.М. Матросов» занял 26-е место. Суперкомпьютерный центр коллективного пользования, поддерживающий информационно-вычислительное обеспечение фундаментальных и прикладных исследований, проводимых в институтах ИНЦ СО РАН и вузах Байкальского региона.

Таким образом, в ИНЦ СО РАН создана информационно-вычислительная, телекоммуникационная инфраструктура и накоплены уникальные научные проблемно- и предметно-ориентированные геопространственные данные, что служит основой формирования Центра поддержки междисциплинарных научных исследований институтов ИНЦ СО РАН.

В целом отмечается существенный рост потребностей со стороны науки и образования в доступных информационно-вычислительных ресурсах для проведения фундаментальных и прикладных исследований. Это приводит к необходимости интеграции (в том числе с использованием GRID-технологий) пространственно распределенных хранилищ разнородных данных и вычислительных мощностей, организации коллективного доступа к ним.

В связи с этим большой интерес представляют технологии, позволяющие автоматизировать процесс создания комплексных тематических геоинформационных систем.

В рамках формирования основ распределенной информационно-аналитических систем на основе ГИС и веб-технологий реализован ряд проектов для органов государственной власти и местного самоуправления, остановимся более подробно на одном из них:

Программный комплекс ГИС «Инвестор»

С целью повышения инвестиционной привлекательности территорий муниципалитетов и увеличения бюджета городов в России на протяжении ряда лет активно разрабатываются и внедряются инвестиционные карты или геоинформационные системы (ГИС) «Инвестор» [4]. Создание таких систем требует интеграции информации о городской территории, содержащейся в базах данных (БД) и на электронных цифровых картах существующих муниципальных информационных систем (МИС). Геоинформационные системы «Инвестор» являются уникальными для каждого города и не могут тиражироваться. Рассмотрим опыт создания ГИС «Инвестор» г. Иркутска на основе оригинальных технологий и технических решений.

ГИС «Инвестор» г. Иркутска создается для потенциальных инвесторов для обеспечения открытости и доступности информации, необходимой для выбора на территории города объектов, представляющих возможный коммерческий интерес.

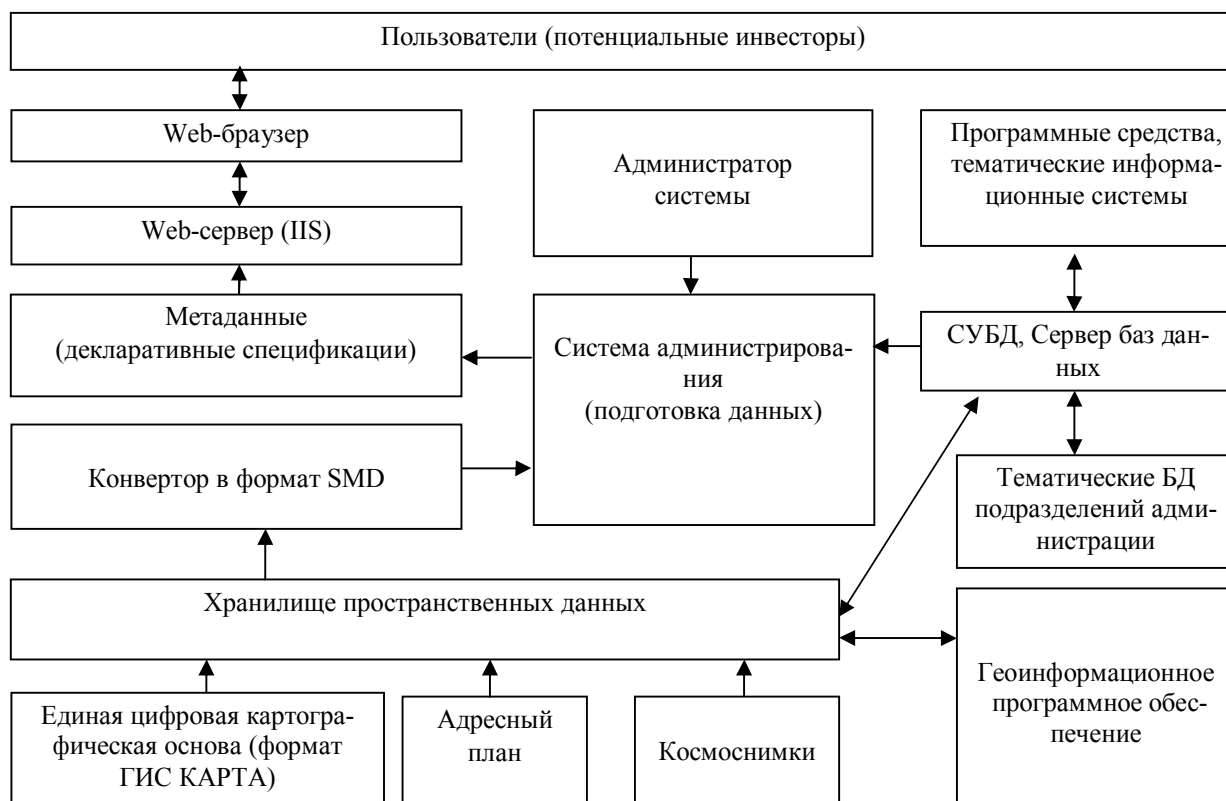


Рис. 1. Архитектура ГИС «Инвестор»

Основным элементом ГИС «Инвестор» является информационный web-ресурс, который разработан на основе оригинальных технологий публикации пространственных и тематических данных с использованием механизмов декларативных спецификаций [1]. Остальные составляющие системы предназначены для администрирования и организации взаимодействия с муниципальными информационными системами, являющимися источниками исходной информации (Рис. 1).

В качестве базовой топоосновы используется цифровой Адресный план г. Иркутска, который актуализируется по дежурному цифровому топографическому плану города. Информация для ГИС «Инвестор» автоматически формируется из тематических слоев муниципальной геоинформационной системы г. Иркутска (МГИС). Кроме того, у системы имеется собственная БД, которая предназначена для хранения служебной информации, а также для быстрого добавления табличных данных, получаемых из внешних источников.

Структурно ГИС «Инвестор» состоит из подсистемы web-публикации (web-сервер) под управлением IIS, подсистемы «Администрирование», специальных конверторов, набора тематических и графических данных. Функционально ГИС «Инвестор» обеспечивает визуализацию всех доступных слоев МГИС, с возможностью их включения/отключения, поиском объектов, выбора объекта или группы объектов, отображение семантической информации, интегрированной по всем включенным в выборку слоям карты. Существует возможность печати и вывода в файл информации в соответствии с пользовательским запросом, что удобно для принятия инвестиционных решений.

Модуль Web-публикации – интернет-ресурс, предоставляющий информацию для анализа и оценки реализации проектов перспективного развития территории. Интерфейс представления максимально прост и доступен для восприятия пользователей, визуально компактно организован. Основным визуальным элементом пользовательского интерфейса является цифровой адресный план города.

В ГИС «Инвестор» для web-публикации картографических данных используется формат SMD (Static Map Data) – это оригинальный формат (разработка ИДСТУ СО РАН) представления векторных

данных. Формат позволяет эффективно (по времени отображения и времени загрузки информации в память) визуализировать пространственные объекты. Перед публикацией данных подсистема «Администрирования» автоматически проводит конвертацию картографических материалов в этот формат.

Наиболее ресурсоемким и информативным инструментом, реализованным в интерфейсе пользователя, является блок построения запросов, который позволяет создавать отчетные выборки. Для вывода информации об объектах из базы данных используется технология декларативных спецификаций [2]. Одной из разновидностей запросной системы является выборка по произвольной (ограничивающий многоугольник) области (Рис. 2). При выполнении такого запроса формируется отчет по объектам карты указанной области из отмеченных в дереве информационных слоев. По каждому из выбранных слоев вычисляются итоговые значения, а также может выводиться список объектов данного слоя, если выборка выполняется по ограниченной области, содержащей не слишком много таких объектов. При выводе информации об объектах слоя в отчет загружаются данные из таблицы, связанной с ним.

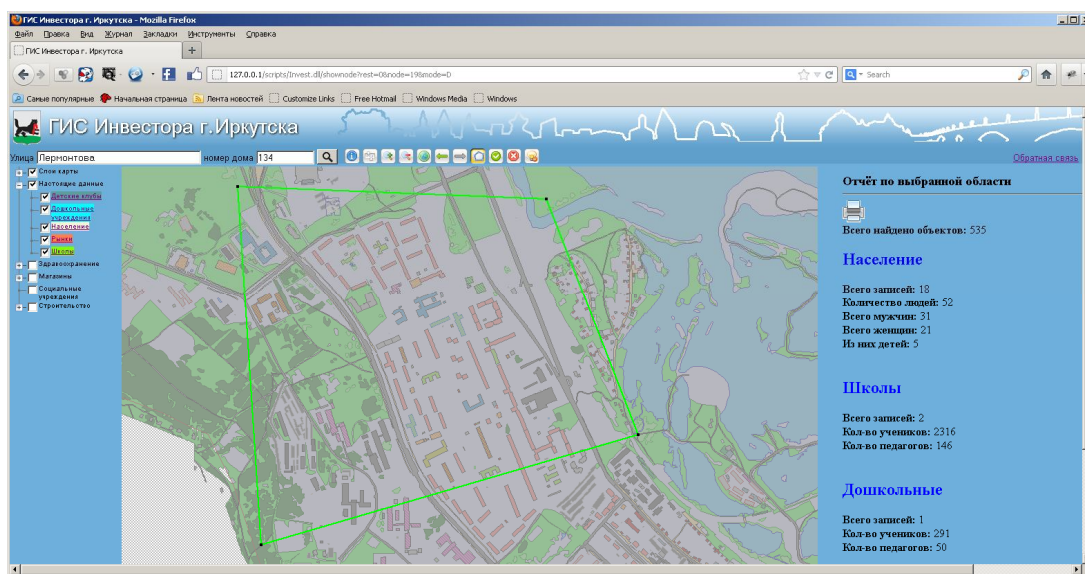


Рис. 2. Возможности запросной системы ГИС «Инвестор»

Пользователи в системе имеют возможность дополнительно просматривать необходимые фрагменты на космоснимках. Разработана технология мониторинга данных на картографических сервисах, которая позволяет просматривать выбранный фрагмент карты на сторонних картографических онлайн-сервисах:

- Карты Google
- Карты Яндекс
- OpenStreetMap Свободная вики-карта мира
- Публичная кадастровая карта

При выборе необходимого участка карты в системе пользователь может сделать выбор в пользу нужного картографического сервиса, и ему будут предоставлены данные со сторонних карт.

Заключение

В статье изложен подход для организации инфраструктуры и создания интегрированных информационно-аналитических систем, а также описаны области применения систем подобного рода. Изложены оригинальные подходы и методы по их созданию.

Литература

1. Бычков И.В., Фереферов Е.С., Хмельнов А.Е. Технология создания автоматизированных рабочих мест с возможностью обработки пространственных данных на основе метаописаний структур баз данных // Вычислительные технологии. 2007. Т.12, № 5. С. 41-51.

2. Гаченко А.С., Хмельнов А.Е. Технология создания информационных систем на основе метаданных // Информационные и вычислительные технологии и системы: материалы II Всероссийской конференции (ИКВТС-06) с международным участием. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. госуниверситета, 2006. Т.1. С. 99-100.
3. Присяжнюк С.П., Железняков А.В. Опыт применения инструментария GIS ToolKit в отечественных разработках // Информационный бюллетень, ГИС Ассоциация. 2001. № 3(30)
4. URL: <http://public.admirk.ru/gisinv/index.html> ГИС Инвестор г. Иркутска.

Гаченко Андрей Сергеевич кандидат технических наук, старший научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, тел. (395-2) 453103, e-mail: gachenko@icc.ru

Маджара Тарас Игоревич, кандидат технических наук, и.о. заведующего лабораторией ИДСТУ СО РАН, тел. (395-2) 453071, e-mail: taras@icc.ru

Ружников Геннадий Михайлович, кандидат технических наук, заместитель директора ИДСТУ СО РАН, тел. (395-2) 453006, e-mail: ruginikov@icc.ru

Хмельнов Алексей Евгеньевич, кандидат технических наук, заведующий лабораторией ИДСТУ СО РАН, тел. (395-2) 453071, e-mail: hmelnov@icc.ru

Gachenko Andrey Sergeevich, candidate of technical sciences, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS.

Madzhara Taras Igorevich, candidate of technical sciences, acting head of laboratory, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS.

Ruzhnikov Gennady Mikhailovich, candidate of technical sciences, deputy director, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS.

Khmelnov Alexey Evgenevich, candidate of technical sciences, head of laboratory, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS.

УДК 681.51

© Л.Н. Федорченко, Л.М. Лукьянова

СИНТЕЗ РАСПОЗНАВАТЕЛЯ ДЛЯ КСР-ЯЗЫКА

В статье представлены метод и алгоритмы, выполняющие построение состояний распознавателя (анализатора) для языка, порождаемого трансляционной КСР-грамматикой. Метод и алгоритмы реализованы в инструментальной системе SynGT (Syntax Graph Transformation).

Ключевые слова: синтаксическая граф-схема, состояние распознавателя, КСР грамматика.

L.N. Fedorchenko, L.M. Lukyanova

SYNTHESIS OF RECOGNIZER FOR A CFR-LANGUAGE

The paper presents a method and algorithms that perform construction of recognizer states (parser) for the language generated by translational CFR-grammar. The method and algorithms are implemented in the special tool system SynGT (Syntax Graph Transformation).

Keywords: syntactic flow-chart, state of recognizer, CFR-grammar.

Введение

В настоящее время языковые технологии активно включаются в различные сферы нашей жизни, что приводит к развитию современных транслирующих систем, ориентированных на разнообразный ассортимент вычислительных устройств, применяемых в производственных системах типа «организационно-технический комплекс» (далее «комплекс») [1, 2]. При этом наиболее остро проявилась проблема *быстрой настройки* синтаксического определения языка на ту форму, которая допускает автоматическую или ручную реализацию, а также проблема учета ограничений выбранного метода синтаксического анализа. Первая проблема обусловлена разнообразием спецификаций реализуемых языков, диапазон которых простирается от обычной формы Бэкуса-Наура (БНФ) и языка разметки HTML, до двухуровневых грамматик, чаще всего используемых при конкретизации применительно к специфике комплекса, которая должна быть отражена в языках описания *целей, подцелей* и логических связей между ними. Вторая проблема ведет либо к языковой неоднозначности, либо к недетерминированности распознающего автомата.

Опыт использования различных инструментальных систем в производственной сфере показывает, что при построении *языка целей* комплекса его удобно задавать в виде двухуровневой КС-грамматики (типа VW-грамматики), которая расширена рядом *контекстных правил*. Такой тип грамматики эквивалентно трансформируется в КС-грамматику в регулярной форме (КСР-грамматику) [4, 5], которая отличается от обычной КС-грамматики тем, что в ней помимо алфавитов нетерминалов и терминалов имеется дополнительный алфавит *контекстных символов (семантик)*, а правые части правил представляют собой регулярные выражения над символами объединенного алфавита грамматики. Эти выражения трактуются как формулы с регулярными операциями над множествами цепочек, составленных из терминальных и контекстных символов. Таким образом, множество правил КСР-грамматики рассматривается как система, определяющая значения всех нетерминалов в качестве ее неизвестных. В такой грамматике классическое понятие вывода заменяется понятием вычислимости значения регулярного выражения.

Далее рассмотрим построение распознавателя (анализатора) для языка, определяемого КСР-грамматикой (КСР-языка).

1. Синтез распознающего автомата

Напомним определения КСР-грамматики и синтаксической граф-схемы графового аналога КСР-грамматики.

Определение 1. КСР-грамматикой называется пятерка множеств $G_R = (N, T, \Sigma, P, S)$, где N – множество нетерминалов, T – множество терминалов, Σ – множество семантик, P – множество КСР-правил, $P = \{A : R_A \mid A \in N, R_A \text{ – регулярное выражение над алфавитом } N \cup T \cup \Sigma\}$, S – начальный нетерминал грамматики.

С практической точки зрения, КСР-правила удобно представлять в виде конечных ориентированных графов с помеченными вершинами и дугами. Такие графы, представляющие КСР-грамматику, преобразуются в детерминированную конечно-автоматную схему, в которой каждая вершина соответствует состоянию автомата, а ее метка специфицирует порождаемый символ. В специальном программном средстве SynGT (Syntax Graph Transformations), разработанном в СПИИРАН, набор графов, представляющих правила КСР-грамматики, снабженных дополнительной информацией на дугах (семантики, предикаты), называется *синтаксической граф-схемой (СГС)* КСР-грамматики [4, 5]. Синтез граф-схемы рекуррентен и описан в [4]. В системе SynGT используется графический интерфейс, примеры которого можно найти в [4, 5].

С каждой КСР-грамматикой G связываем ее такую синтаксическую граф-схему Γ_G , что $L_{\Gamma_G} = L(G)$.

Введение понятия синтаксической граф-схемы в качестве порождающего механизма для языка вызвано следующими соображениями:

- являясь адекватным регулярному выражению, граф нагляднее отражает структуру КСР-грамматики и не вводит лишнюю рекурсивность (структурированность) в КСР-язык;
- из граф-схемы проще выбирать информацию о порождаемом языке;
- в терминах вершин удобней описать автомат, распознающий язык, порождаемый синтаксической граф-схемой;
- с дугами граф-схемы легко связать вызовы семантических процедур;
- синтаксическая граф-схема позволяет использовать более простую структуру, чем вывод в КС-грамматике, а именно маршруты или путь в синтаксической граф-схеме, в терминах которого легче формулировать и проверять ограничения на класс грамматик с эффективным анализом.

Далее определим понятие состояния, играющее основную роль в синтезе распознающих автоматов. Известное из литературы [3] понятие состояния автомата связывается с помеченными вершинами граф-схемы.

2. Состояния распознавателя

Состоянию, в котором находится автомат, приписывается определенное количество информации о языке. Прежде чем определить состояние автомата, рассмотрим состояния в СГС. В данном случае под состоянием распознавателя будем понимать состояние в синтаксической граф-схеме Γ_G , т.е.

множество вершин Γ_G . Переход от одного состояния к другому, которое также является множеством (возможно пустым) вершин в синтаксической граф-схеме (СГС), управляется текущим символом, поступающим из входного текста.

Переходное состояние содержит информацию о том, какие символы допустимы для следующего перехода, а следовательно, о том, какие текущие символы разрешены в данный момент, а следовательно, какие под слова допустимы к моменту перехода в это состояние. Таким образом, состояние позволяет установить принадлежность слова языку, порождаемому данной синтаксической граф-схемой.

2.1. Регулярный случай

Рассмотрим случай, когда КСР-грамматика G порождает регулярный язык, а множество P правил грамматики содержит только одно S -правило для начального нетерминала S , $P = \{S : A\}$, правая часть которого – регулярное выражение A в алфавите T . Синтаксическая граф-схема Γ_G состоит из одного графа для нетерминала S – $\Gamma_G = \{\Gamma_S\}$, и не содержит нетерминальных вершин.

В этом случае состояние в Γ_G определяется состоянием для регулярного выражения A в графе Γ_A .

Пусть Γ_A – граф для регулярного выражения A . Определим понятие состояния для регулярного выражения в графе Γ_A .

Определение 2. Состоянием в графе Γ_A называется:

- 1) либо выходная вершина F_A ;
- 2) либо терминальная вершина в Γ_A ;
- 3) либо объединение состояний в Γ_A .

Для произвольной вершины β в графе Γ_A , ($\beta \neq F_A$) определим состояние вершины β в графе Γ_A как множество вершин, смежных с вершиной β .

Определение 3. Состоянием вершины в графе Γ_A называется множество вершин S_β :

$$S_\beta = \{ \alpha \mid \alpha - \text{терминальная или выходная вершина в } \Gamma_A, \alpha \in \text{succ}(\beta) \}.$$

То есть состояние произвольной неконечной вершины в графе для нетерминала A совпадает с множеством вершин, смежных с данной вершиной, $S_\beta = \text{succ}(\beta)$.

Если β – входная вершина графа Γ_A , $\beta = E_A$, то S_β называется начальным состоянием графа Γ_A .

Из определения 3 видно, что начальное состояние графа Γ_A является множеством вершин, достижимых из входной вершины E_A . Достижимость из E_A означает то, что символы, помечающие вершины в начальном состоянии, соответствуют начальной букве слова, порождаемого графом Γ_A .

Аналогично, состоянием произвольной вершины β в графе Γ_A является множество вершин Γ_A , достижимых из вершины β , а символы, помечающие их, соответствуют букве, которая может стоять за буквой (совпадающей с меткой вершины β) в слове, порождаемом данным графом.

2.2. Переходное состояние

Определенное выше состояние в графе Γ_A по содержанию тождественно понятию состояния конечного автомата [3]. При синтезе автомата каждое его состояние отождествляется с состоянием в графе для регулярного выражения.

Переход из одного состояния в другое управляется символом, поступающим на вход автомата. По определению любое состояние является множеством вершин в граф-схеме, т.е. содержит множество альтернатив о том, как поступившее под слово может быть продолжено.

После того как одна из этих альтернатив выбрана (когда известна следующая буква слова), может составляться следующая альтернатива (следующее состояние). Это можно осуществить с помощью операции «переход по символу».

Пусть S – произвольное состояние в графе Γ_A , и ξ – буква из алфавита T .

Определение 4. Состояние S/ξ называется *переходом по символу ξ* (переходным состоянием для S) в граф-схеме Γ_A , причем:

- 1) если $S = \emptyset$ или $S = \{F\}$, то $S/\xi = \emptyset$;
- 2) если $S = \{\alpha\}$, α – терминальная вершина в Γ_A , то

$$S/x = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } m(\alpha) \neq \xi \\ S_\alpha, & \text{если } m(\alpha) = \xi \end{cases};$$

- 3) если $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$, то $S/x = \bigcup_{i=1}^k (S_i/\xi)$.

Из данного определения следует, что результатом применения операции перехода по символу является объединение состояний тех вершин, которые помечены этим терминальным символом в рассматриваемом состоянии.

Если исходное состояние пусто или отсутствуют терминальные вершины, помеченные данным символом, то переходное состояние также пусто.

Переходное состояние представляет информацию о том, как должно продолжаться слово после появления на входе автомата рассматриваемого символа. Если переходное состояние пусто, значит данный символ (в качестве следующей буквы слова) недопустим.

Операцию «переход по символу» можно естественным образом обобщить до операции «переход по слову».

Пусть S – произвольное состояние в графе Γ_A , и $x = x'\xi$ – слово в алфавите T , $x' \in T^*$.

Определение 5. *Переходом по слову x* для состояния S называется состояние $S/x = (S/x')/\xi$.

Переходом по пустому слову ε называется состояние $S/\varepsilon = S$.

Из вышесказанного следует утверждение.

Утверждение. Язык, порождаемый графом для регулярного выражения, состоит в точности из тех слов, переход по которым для начального состояния данного графа содержит выходную вершину:

$$L_A = \{x \in T^* \mid F_A \in S_{E_A}/x\}.$$

2.3. Общий случай

Рассмотрим общий случай, когда *KCP*-грамматика G порождает *KC*-язык, а регулярные выражения *KCP*-правил из P содержат вхождения нетерминалов. Синтаксическая граф-схема Γ_G состоит из совокупности графов для нетерминалов $\Gamma_G = (\Gamma_S, \Gamma_{A_1}, \Gamma_{A_2}, \dots, \Gamma_{A_k})$ и содержит нетерминальные вершины.

Вхождения нетерминальных вершин в графах нарушают регулярность языка, порождаемого Γ_G , и это находит свое отражение в определении состояния: оно может содержать не только одно множество вершин (как в регулярном случае), а два – состояние перехода и состояние возврата. Каждое из них может содержать другие состояния, и таким образом возникает иерархия все более сложных состояний. В таком сложном состоянии существует множество вершин, которое является «фактическим» состоянием, а все остальные – накопленные (магазинные) состояния.

Таким образом, в общем случае состояние содержит всю информацию об «истории» порождения текущего подслова, то есть о том, как текущее подслово, прерванное вхождением нетерминальной вершины в Γ_G , может быть продолжено или процесс порождения завершен.

Чем меньше нетерминальных вершин в Γ_G (или вхождений нетерминалов в *KCP*-правилах), тем меньше сложных состояний возникает при синтезе магазинного автомата. Поэтому представляется целесообразным максимально снизить число вхождений нетерминалов в грамматике, используя эквивалентные преобразования с применением операции обобщенной итерации ($\#$). Для этой цели необходимо применить процедуру регуляризации *KCP*-грамматики, формальное описание которой дано в [4].

Переход из одного состояния в другое в общем случае также управляется текущим символом и происходит с помощью операции «переход по символу». Но в отличие от регулярного случая в конце

подслова (порожденного некоторой компонентой граф-схемы Γ_A) можно вернуться к накопленному состоянию – состоянию возврата и затем продолжить переход.

Следующим определением введем понятие состояния в СГС Γ_G , обобщающее ранее определенное в разделах 2.1, 2.2.

Определение 6. Состоянием в графе-схеме Γ_G называется:

- 1) либо выходная вершина F_{A_i} графа для некоторого нетерминала A_i из алфавита N ;
- 2) либо терминальная вершина в Γ_G ;
- 3) либо пара множеств (S_1, S_2) , где S_1 и S_2 – состояния в Γ_G ;
- 4) либо объединение состояний в Γ_G .

Для произвольной вершины β (β не является выходной вершиной) в синтаксической граф-схеме Γ_G определим состояние S_β – состояние вершины в Γ_G .

Определение 7. Для произвольной вершины β в синтаксической граф-схеме Γ_G состояние вершины S_β имеет вид:

$$S_\beta = \begin{cases} \alpha & | \alpha \in succ(\beta), \alpha - \text{терминальная или выходная вершина в } \Gamma_G \\ (S_{E_{m(\alpha)}}, S_\alpha) & | \alpha \in succ(\beta), \alpha - \text{нетерминальная вершина в } \Gamma_G \end{cases}$$

Если β – входная вершина графа Γ_{A_i} для некоторого нетерминала A_i из алфавита N , то состояние S_β в Γ_G будет называться начальным состоянием графа Γ_{A_i} ($S_{E_{A_i}}$).

Начальное состояние графа Γ_S для стартового символа КСР-грамматики называется начальным состоянием синтаксической граф-схемы Γ_G (обозначение S_0).

Таким образом, чтобы построить состояние некоторой вершины в Γ_G , необходимо сначала построить состояние этой вершины в некотором Γ_{A_i} . Поскольку в графе Γ_{A_i} встречаются как терминальные, так и нетерминальные вершины, то они должны входить в строящееся состояние. Затем нетерминальные вершины заменяются на сложное состояние (пара) в соответствии с назначением нетерминальных вершин в Γ_G . После подслова, порожденного графом для такого нетерминала, слово продолжается так, как если бы вместо нетерминальной вершины в Γ_G находилась бы терминальная вершина, а вместо подслова поступил бы символ – метка этой нетерминальной вершины.

Таким образом, состояние в Γ_G – это иерархия вложенных пар множеств терминальных или выходных вершин. Самый нижний уровень этой иерархии представляет собой «фактическое» состояние, все остальные состояния в парах – магазинные.

Пример 1. Рассмотрим грамматику G :

$$G = (\{S, C_1, C_2\}, \{a, b\}, P, S). P = \{ S : a, (C_1; C_2), a, C_1 : b, S, C_2 : b \}$$

Показана синтаксическая граф-схема Γ_G для КСР-грамматики G (рис. 1.).

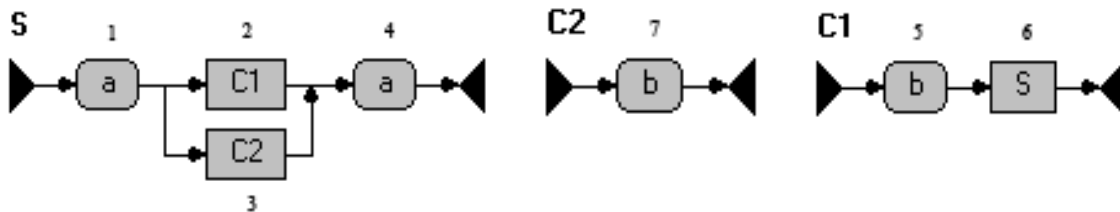


Рис. 1. Пример синтаксической граф-схемы Γ_G

Условимся, все вершины, кроме выходных, в состояниях Γ_G обозначать парой – метка и номер вершины в Γ_G . Тогда для КСР-грамматики G имеем следующее множество состояний вершин:

$$\begin{aligned}
 S_{E_S} &= \{a-1\}; \\
 S_{a-1} &= \{(\{b-5\}, S_{C_1-2}), (\{b-7\}, S_{C_2-3})\}; \\
 S_{b-5} &= (\{a-1\}, S_{S-6}); \\
 S_{a-4} &= \{F_S\}; \\
 S_{S-6} &= \{F_{C_1}\}; \\
 S_{b-7} &= \{F_{C_2}\}; \\
 S_{C_1-2} &= S_{C_2-3} = \{a-4\}.
 \end{aligned}$$

Поскольку состояние в Γ_G – это объединение цепочек вложенных пар множеств терминальных или выходных вершин в Γ_G , которое можно разбить на классы следующим образом.

Обозначим через \mathfrak{S}_k множество состояний в Γ_G k -го уровня, $k \geq 0$.

Определение 8. Состояние S принадлежит множеству \mathfrak{S}_0 , если

а) либо $S = \{\alpha\}$, где α – терминальная или выходная вершина в Γ_G ;

б) либо $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$, где $S_i \in \mathfrak{S}_0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, n > 1$.

Определение 9. Состояние S принадлежит множеству $\mathfrak{S}_k, (k > 0)$, если

а) либо $S = (S_1, S_2)$, где S_1, S_2 из $\bigcup_{i=1}^k S_i$;

б) либо $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$, где $S_i \in \mathfrak{S}_k$ и $n > 1$.

Из определения состояния вершины в Γ_G видно, что иногда процесс построения состояния для некоторой вершины может не закончиться. В этом случае условимся считать, что состояние этой вершины не существует. Множество состояний, которые существуют в Γ_G , обозначим \mathfrak{S}_G и на нем определим операции «переход по символу» и «переход по слову».

Пусть S – состояние в Γ_G и ξ – буква из терминального алфавита T . Дадим определение переходного состояния на множестве состояний \mathfrak{S}_G .

Определение 10. Состояние S/ξ называется *переходным состоянием по символу* ξ для состояния S в Γ_G , причем:

1. Если $S = \emptyset$ или $S = \{F_{A_i}\}$, то $S/\xi = \emptyset$.
2. Если $S = \{\alpha\}$, где α – терминальная вершина в Γ_G , то

$$S/\xi = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } t(\alpha) \neq \xi \\ S_\alpha, & \text{если } t(\alpha) = \xi \end{cases}$$

3. Если $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$, то $S/x = \bigcup_{i=1}^k (S_i/\xi)$.
4. Если $S = (S_1, S_2)$, то

$$S/\xi = \begin{cases} (S_1/\xi, S_2), & \text{если } S_1/\xi \neq \emptyset \\ S_2/\xi, & \text{если } S_1/\xi = \emptyset \text{ и вершина } F_A \in S_1 \text{ для некоторого } \Gamma_A. \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Операция перехода по символу задает отображение множества $\mathfrak{S}_G \times T$ в \mathfrak{S}_G . Расширение области определения этого отображения на $\mathfrak{S}_G \times T^*$ производится обычным образом.

Для состояния $S \in \mathfrak{S}_G$ переходом по пустому слову ε называется состояние $S/\varepsilon = S$.

Определение 11. Для состояния $S \in \mathfrak{S}_G$ и слова x в алфавите T , $x = x'\xi$, $x' \in T^*$ переходом по слову x для $S \in \mathfrak{S}_G$ называется состояние (переходное состояние) $S/x = (S/x')/\xi$.

Конечное множество переходных состояний для всех терминальных символов из \mathfrak{S}_G задают таблицу состояний распознавателя, адекватного КСР-грамматике.

Из вышесказанного следует, что состояние распознавателя КСР-языка – это иерархически упорядоченное множество множеств вершин в Γ_G . Внизу этой иерархии находятся самые простые состояния – одноэлементные множества вершин. Из них с помощью объединения и композиции можно образовать более сложное состояние – так возникает состояние, имеющее много элементов или уровней иерархии. Объединением (как в регулярном случае) определяются альтернативы, а композицией – информация, которая могла бы быть потеряна в результате нарушения регулярности. Выходная вершина указывает не только на конец подслова, порождаемого некоторым графом-компонентой Γ_G , но и на планируемый возврат к накопленному состоянию.

Пример 2. Для КСР-грамматики G из примера 1 и входного слова «aba» переход по слову «aba» для начального состояния S_0 в Γ_G дает состояние S_3 , которое получается следующим образом:

$$\begin{aligned} S_0 &= S_{E_S} = \{a-1\} \\ S_1 &= S_0/a = S_{a-1} = \{(\{b-5\}, S_{C_1-2}), (\{b-7\}, S_{C_2-3})\}. \\ S_2 &= S_1/b = \{(S_{b-5}, S_{C_1-2}), (S_{b-7}, S_{C_2-3})\} = \\ &= \{((\{a-1\}, S_{S-6}), S_{C_1-2}), (F_{C_2}, S_{C_2-3})\}. \\ S_3 &= S_2/a = \{((S_{a-1}, S_{S-6}), S_{C_1-2}), S_{C_2-3}/a\} = \\ &= \{((S_{a-1}, S_{S-6}), S_{C_1-2}), \{a-4\}/a\} = \{((S_{a-1}, S_{S-6}), S_{C_1-2}), S_{a-4}\} = \\ &= \{(\{b-5\}, S_{C_1-2}), (\{b-7\}, S_{C_2-3}), S_{S-6}, S_{C_1-2}, F_S\}. \end{aligned}$$

Заключение

Метод автоматического синтеза распознавателя КСР-языка, предложенный в данной статье, реализован в системе SynGT и может применяться при построении анализаторов достаточно большого класса практических языков. Совместно с новыми алгоритмами регуляризации КСР-грамматик он демонстрирует увеличение в эффективности по сравнению с методами построения трансляторов в известных системах серии GNU [6].

Литература

1. Лукьянова Л. М. Результаты развития методологии формирования решений по организационно-техническим комплексам // Известия КГТУ. 2010. №19. С. 36–44.
2. Лукьянова Л.М., Федорченко Л.Н. Средства формализации целей и проблем сложных систем производственной сферы // Вестник Бурятского госуниверситета. 2012. № 9. С 42–48.
3. G. Rozenberg A. Salomaa (Eds.) Handbook of Formal Languages. Vol. 2. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag, 1997. 527 p.
4. Федорченко Л.Н. Регуляризация контекстно-свободных грамматик. / LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Germany. 2011. С 180.
5. Федорченко Л.Н. Синтаксически управляемая обработка данных для практических задач // Вестник Бурятского госуниверситета. 2013. № 9. С 87–99.
6. Bison – GNU parser generator. URL://www.gnu.org/software/bison/.

Федорченко Людмила Николаевна, кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Тел. +7 (812) 328-1919. E-mail: LNF@iias.spb.su

Лукьянова Людмила Михайловна, доктор технических наук, профессор кафедры систем управления и вычислительной техники Калининградского государственного технического университета, академик Международной академии информатизации (МАИ). Тел. +7 (4012) 995-942. E-mail: llm_llm@mail.ru

Fedorchenko Lyudmila Nikolaevna, candidate of technical sciences, senior researcher, laboratory of applied computer science, St.Petersburg Institute for Informatics and Automation RAS (SPIIRAS). Tel. +7 (812) 328-1919. E-mail: LNF@iias.spb.su

Lukyanova Lyudmila Mikhailovna, doctor of technical sciences, professor, computer science and control systems department, Kaliningrad State Technical University, academician, International Academy of Informatization (IAI). Tel. +7 (4012) 995-942. E-mail: llm_llm@mail.ru

УДК 621.391

© М.В. Харинов

АЛЬТЕРНАТИВА ИЕРАРХИЧЕСКОМУ МЕТОДУ ОЦУ ДЛЯ ЦВЕТОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

В работе предлагается способ кластеризации пикселей и сегментации изображений на основе метода Ворда, названный RW-методом (Repetitive Ward's method), который, в случае серых изображений, трактуется как альтернатива иерархическому методу Оцу.

Ключевые слова: кластеризация пикселей, сегментация цветового изображения, слияние, метод Ворда, разделение, метод Оцу, иерархия, суммарная квадратичная ошибка, минимизация, выпуклая последовательность, инвариантность, изоморфизм, изотонное преобразование.

M.V. Kharinov

AN ALTERNATIVE TO HIERARCHICAL OTSU METHOD FOR COLOR IMAGE

In the paper the technique of pixel clustering and image segmentation basing on Ward's method that is complementary to hierarchical Otsu method in the case of gray images, is proposed and is named as RW-method (Repetitive Ward's method).

Keywords: pixel clustering, color image segmentation, merging, Ward's method, division, Otsu method, hierarchy, total squared error, minimizing, convex sequence, invariance, isomorphism, isotone transform.

Введение

Работа продолжает серию статей [1, 2] и др. по формализации понятия сегментации для автоматического выделения объектов в системах машинного зрения. При этом мы развиваем логику разделения изображения на «объекты», которые «видит» компьютер, избегая догадок по поводу моделирования, скажем, зрения насекомого, животного или человека, которого возможно привлечь для обучения технической системы. Определить «объекты», не ссылаясь на неформализованное зрительное восприятие, позволяют известные методы кластеризации пикселей, в частности, сегментации изображений посредством вычисления оптимальных и квазиоптимальных кусочно-постоянных приближений изображения, которые минимально отличаются от него по среднеквадратичному отклонению σ или суммарной квадратичной ошибке $E = 3N\sigma^2$, где N – число пикселей изображения, а коэффициент 3 учитывает число цветовых R, G, B компонент.

В нашей интерпретации «объекты» описываются кластерами пикселей изображения, состоящими из нескольких связанных сегментов, и содержат единственный сегмент как при традиционной сегментации, но только в частном случае. В отличие от традиционного понимания результатом кластеризации/сегментации является не единственное разбиение изображения на «объекты», а бинарная иерархия кластеров пикселей. В бинарной иерархии любой кластер, отличный от тривиального, разделяется на пару вложенных по заданному алгоритму, а тривиальные кластеры из одинаковых пикселей считаются неделимыми. Из кластеров бинарной иерархии формируются разбиения изображения на любое число кластеров от 1 до g_0 , где g_0 – общее число неделимых кластеров в изображении. Разбиения, в свою очередь, порождают кусочно-постоянные приближения изображения посредством усреднения пикселей внутри кластеров. Характерной особенностью нашего обобщения понятия сегментации является то, что каждому из $2g_0 - 1$ кластеров автоматически присваивается уникальный идентификатор – «обозначение объекта», экземплярами которого в разбиениях помечаются пиксели изображения. При этом в каждой из трех цветовых компонент изображения пиксель помечается неотрицательным целым числом из определенного диапазона. Метками служат значения пикселей целочис-

ленного инвариантного представления, которое в первоначальной версии разработано в [3] для задач стеганографии, в текущей версии описано в [2] для серого изображения и обобщается на случай цветового изображения в настоящей статье.

Замечание 1. При вычислениях на компьютере используются целые значения пикселей исходного изображения. Однако смысл дальнейших рассуждений сохраняется и для вещественных значений пикселей.

1. Постановка задачи

В статье формулируется и решается задача построения преобразования H цветового изображения (u, v, w) из трех однокомпонентных изображений u , v и w в *инвариантное* представление $H(u, v, w)$ со следующими общими свойствами инвариантности и симметрии.

Добавление к пикселям любой цветовой компоненты вещественного числа не влияет на инвариантное представление:

$$H(u, v, w) = H(u + c_R, v + c_G, w + c_B), \quad (1)$$

где c_R, c_G, c_B – *тривиальные* матрицы из одинаковых пикселей.

Умножение пикселей каждой цветовой компоненты на вещественное положительное число $\alpha > 0$ не влияет на инвариантное представление:

$$H(u, v, w) = H(\alpha \cdot u, \alpha \cdot v, \alpha \cdot w). \quad (2)$$

Преобразование H коммутирует с преобразованиями P :

$$HP = PH, \quad (3)$$

где под преобразованием P можно понимать: а) произвольную перестановку цветовых компонент; б) преобразование цветовой компоненты в негатив; с) масштабирование изображения посредством дублирования пикселей.

Перестановочность аргументов означает, что функция преобразования цветовой компоненты зависит только от двух других компонент и не зависит от номера компоненты:

$$H_{u,v}: H(u, v, w) \equiv (H_{v,w}u, H_{u,w}v, H_{u,v}w),$$

причем не меняется при перестановке индексов: $H_{u,v} = H_{v,u}$. При этом преобразование цветовой компоненты *серого* изображения из одинаковых компонент совпадает с преобразованием данной цветовой компоненты при двух других тривиальных:

$$H_{c,c}u = H_{u,u}u, \quad (4)$$

где c — *тривиальная* матрица из одинаковых пикселей, например, из одних 0. Таким образом, программная реализация преобразования H трехмерного изображения поддерживает и преобразование *одномерной* компоненты в составе серого изображения из трех одинаковых цветовых компонент или монохромного изображения при обнулении остальных.

Характерным результатом преобразования H цветового изображения (u, v, w) является получение серого изображения $(H_{v,w}u, H_{u,w}v, H_{u,v}w)$ с совпадающими цветовыми компонентами:

$$H_{v,w}u = H_{u,w}v = H_{u,v}w. \quad (5)$$

Преобразование любой из цветовых компонент в негатив, коммутирующее с преобразованием H , вообще говоря, нарушает (5). Поэтому обсуждаемый результат не является тривиальным и позволяет выделить изображения, отличающиеся от тройки произвольных матриц свойством (5).

2. Инвариантное представление для цветового изображения

Построение инвариантного представления $H(u, v, w)$ цветового изображения (u, v, w) выполняется по компонентам и сводится к последовательному кодированию заданной бинарной иерархии кластеров пикселей цветового изображения по алгоритму итеративного разделения кластеров пикселей квазиоптимальных кусочно-постоянных приближений, который описан в [2]. Согласно алгоритму, в неотрицательных целых значениях пикселей каждой цветовой компоненты запоминается последовательность разделений нетривиальных кластеров на пары вложенных, которая кодируется целым числом в диапазоне $[0, 2^{q+1} - 2]$, где q — максимальное число делений, выполненных при вычислении того или иного кластера пикселей в очередном кусочно-постоянном приближении.

Замечание 2. В [2] величина q интерпретируется как максимальное значение *целочисленной оценки количества информации* в пикселе кусочно-постоянного приближения изображения.

При этом кодированная иерархия кластеров трехмерных пикселей предыдущих приближений воспроизводится посредством итеративного деления четных значений пикселей любой из компонент инвариантного представления нацело на 2 и делением нечетных значений нацело на 4 с последующим удвоением [2, 3].

Одна и та же иерархия кластеров кодируется в цветовых компонентах инвариантного представления неодинаково, так как учитывает средние яркости. Целые значения пикселей цветовой компоненты инвариантного представления формируются при разделении данного кластера надвое по результатам сравнения средних значений яркости вложенных кластеров. В случаях, когда данный нетривиальный кластер разделяется на вложенные кластеры с совпадающей средней яркостью, вложенные кластеры различаются по геометрическому признаку, например, по номеру первого пикселя в порядке построчной развертки. Указанными случаями совпадения кластеров по средней яркости исчерпывается специфика получения инвариантного представления для цветового изображения по сравнению с его построением для монохромного или серого изображения [2].

Трехмерные значения пикселей инвариантного представления $H(u, v, w)$ служат обозначениями кластеров или «объектов». С точностью до отмеченных случаев совпадения средних яркостей в парах кластеров целые значения пикселей инвариантного представления просто перекодируют вещественные значения средней яркости пикселей кусочно-постоянных приближений.

По сравнению со случаем серых изображений эффект получения квазиоптимальных кусочно-постоянных приближений цветового изображения определяется не только снижением, но и выравниванием числа градаций средней яркости пикселей в цветовых компонентах. Покомпонентная перекодировка средних яркостей пикселей приближения в целые значения пикселей инвариантного представления $H(u, v, w)$ усиливает эффект за счет того, что в инвариантном представлении $H(u, v, w)$ при начальном числе кластеров (в пределах первой пятерки–десятка) совпадают сами R, G, B компоненты, и оно получается серым.

3. Кластеризация и сегментация

Для получения бинарной иерархии кластеров применяется агломеративный метод Уорда [4], согласно которому производится итеративное попарное слияние кластеров из условия минимального приращения суммарной квадратичной ошибки $\Delta E_{merge} = \min$, где приращение $\Delta E_{merge} = E(1 \cup 2) - E(1) - E(2)$ суммарной квадратичной ошибки E при слиянии кластеров 1 и 2 с числом пикселей n_1, n_2 выражается через квадрат евклидова расстояния $\|I_1 - I_2\|^2$ между трехмерными средними яркостями I_1, I_2 в виде:

$$\Delta E_{merge} = \frac{\|I_1 - I_2\|^2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \geq 0 . \tag{6}$$

Именно выражение (6) служит критерием слияния сегментов изображения в версиях [1, 5] модели сегментации Мамфорда-Шаха [6], и либо с аддитивной добавкой, либо с дополнительным множителем используется в версиях [7, 8] модели. В отличие от модели Мамфорда-Шаха, в нашей модели сегментации минимизация суммарной квадратичной ошибки E достигается не только за счет слияния смежных сегментов изображения, а выполняется на множестве всевозможных пар кластеров.

Компьютерные вычисления выполняются в терминах структуры динамических деревьев Слейтора-Тарьяна [9]. При этом в оперативной памяти сохраняется вся иерархия кластеров пикселей изображения, рассматриваемая в порядке от больших кластеров к меньшим. Устанавливается, что нетривиальные кластеры разделяются на пары тех вложенных кластеров, слиянием которых они получены. Контролируется условие обработки каждого кластера пикселей как самостоятельного изображения. Бинарная иерархия из $2g_0 - 1$ кластеров задается в виде *компактной* последовательности разбиений пикселей изображения на $1, 2, 4, \dots, g_0$ кластеров. *Компактная* последовательность разбиений содержит минимальное число повторяющихся тривиальных кластеров и формируется посредством деления надвое всех нетривиальных кластеров в очередном разбиении, которое содержит вначале един-

ственное множество пикселей изображения. Если последовательность разбиений формируется посредством разделения в очередном разбиении единственного кластера, который выбирается из условия минимизации результирующего значения суммарной квадратичной ошибки E , то получаемые разбиения содержат последовательное число $1, 2, 3, \dots, g_0$ кластеров, встречающихся с максимальным числом повторений.

Характерно, что по построению тройки значений суммарной квадратичной ошибки, описывающие последовательное разбиение того или иного кластера пикселей на один, два и три вложенных, образуют выпуклую последовательность. При этом свойство выпуклости последовательных значений E_g сохраняется для компактной последовательности разбиений, а также для разбиений пикселей изображения на последовательное число $1, 2, 3, \dots, g_0$ кластеров:

$$E_i \leq \frac{E_{i-1} + E_{i+1}}{2}, \quad i = 2, 3, \dots, g_0 - 1. \quad (7)$$

Для обеспечения традиционной сегментации цифрового изображения на связанные сегменты предусмотрена *коррекция* кластеров пикселей по числу сегментов. *Коррекция* кластеров выполняется в алгоритме итеративного разделения кластеров пикселей на пары вложенных и уменьшения числа сегментов за счет реклассификации пикселей неизолированных сегментов из одного вложенного кластера в другой. Очередность сегментов, пиксели которых исключают из кластера 1 и относят к кластеру 2, определяется условием минимального приращения суммарной квадратичной ошибки $\Delta E_{correct} = \min$. Приращение $\Delta E_{correct}$ суммарной квадратичной ошибки E при реклассификации k пикселей выражается через расстояния $\|I - I_1\|$ и $\|I - I_2\|$ между трехмерной средней яркостью I исходного кластера и средними яркостями I_1, I_2 вложенных кластеров формулой:

$$\Delta E_{correct} = \frac{\|I - I_2\|^2}{\frac{1}{k} + \frac{1}{n_2}} - \frac{\|I - I_1\|^2}{\frac{1}{k} - \frac{1}{n_1}}, \quad (8)$$

где n_1, n_2 — число пикселей в кластерах 1 и 2.

При коррекции вложенных кластеров множества пикселей в них меняются. Поэтому обе иерархии множеств пикселей вложенных кластеров приходится каждый раз обновлять, обрабатывая кластеры как самостоятельные изображения. Свойство (7) выпуклости последовательности значений E_g суммарной квадратичной ошибки при коррекции кластеров, вообще говоря, нарушается, если не поддерживается программно.

Важно, что для реализации предлагаемого способа кластеризации/сегментации цветового изображения достаточно единственной программы, которая выполняет кластеризацию трехмерных пикселей с коррекцией числа сегментов в кластерах за счет учета распределения пикселей по координатам. Благодаря свойству (4), покомпонентное снижение числа градаций в изображении обеспечивается той же самой программой посредством любого из двух представлений изображения из одномерных пикселей как частного случая цветового.

Единая программная реализация обеспечивается тем, что вычисления опираются на формулы (6) и (8), которые явно не учитывают порядок пикселей по яркости. В следующем разделе в качестве альтернативы нашему способу на этапе обработки однокомпонентного или серого изображения исследуется гистограммный метод Оцу [10–12], который является одним из немногих методов, гарантирующих эффективную минимизацию суммарной квадратичной ошибки E . Но метод Оцу существенно использует упорядочение пикселей по яркости, что препятствует его обобщению для цветовых изображений.

4. Частный случай серого изображения

В случае серого изображения иерархические множества кластеров пикселей, вычисляемые программой для предварительного снижения числа кластеров в отсутствие коррекции, очевидно, совпадают с множествами, полученными в результате последующей кластеризации. Более того, результаты кластеризации по методу Уорда на множестве всех пар кластеров совпадают с ее результатами на множестве пар последовательных кластеров, упорядоченных по возрастанию средней яркости пикселей. Поэтому метод Уорда можно заменить простейшим гистограммным методом [13] кластеризации

пикселей посредством слияния последовательных диапазонов яркости, если в методе [13] вместо применяемого критерия слияния кластеров по минимуму произведения внутриклассовой и межклассовой дисперсий использовать критерий $\Delta E_{merge} = \min$, где ΔE_{merge} раскрывается в (6).

В нашей реализации поддерживается запоминание иерархии кластеров пикселей изображения, причем на любые множества, не обязательно отвечающие столбцам гистограммы, что без изменения способа генерации приближений и инвариантных представлений обеспечивает возможность замещения предлагаемой иерархии кластеров другой. В качестве альтернативы мы рассматриваем *иерархический* метод Оцу, который состоит в точной минимизации суммарной квадратичной ошибки посредством разделения надвое рабочего диапазона яркости пикселей [10] и итеративном повторении вычислений для вложенных диапазонов. В отличие от *мультипорогового* метода Оцу [2, 11] для вычисления оптимальных приближений, *иерархический* метод Оцу, подобно предлагаемому RW-методу, обеспечивает аппроксимацию оптимальных кусочно-постоянных приближений иерархическими приближениями.

В сравнении с общим случаем цветового изображения инвариантное представление серого изображения в нашем RW-методе, равно как и в иерархическом методе Оцу, характеризуется дополнительным свойством изоморфизма, согласно которому средние яркости пикселей в кусочно-постоянных приближениях изображения взаимно однозначно преобразуются в целые значения пикселей инвариантных представлений *изотонным* преобразованием с сохранением порядка яркостей. Благодаря изоморфизму по яркости, приближения в исходном и инвариантном представлении воспринимаются как эквивалентные изображения одних и тех же объектов. Для приближений и инвариантных представлений, полученных с использованием коррекции кластеров по числу сегментов, изоморфизм нарушается при достаточно большом числе кластеров. Однако сходство по визуальному восприятию обычно сохраняется.

Сопоставление RW-метода с иерархическим методом Оцу на примере обработки стандартного серого изображения «Лена» из 256×256 пикселей графически иллюстрируется на рис. 1.

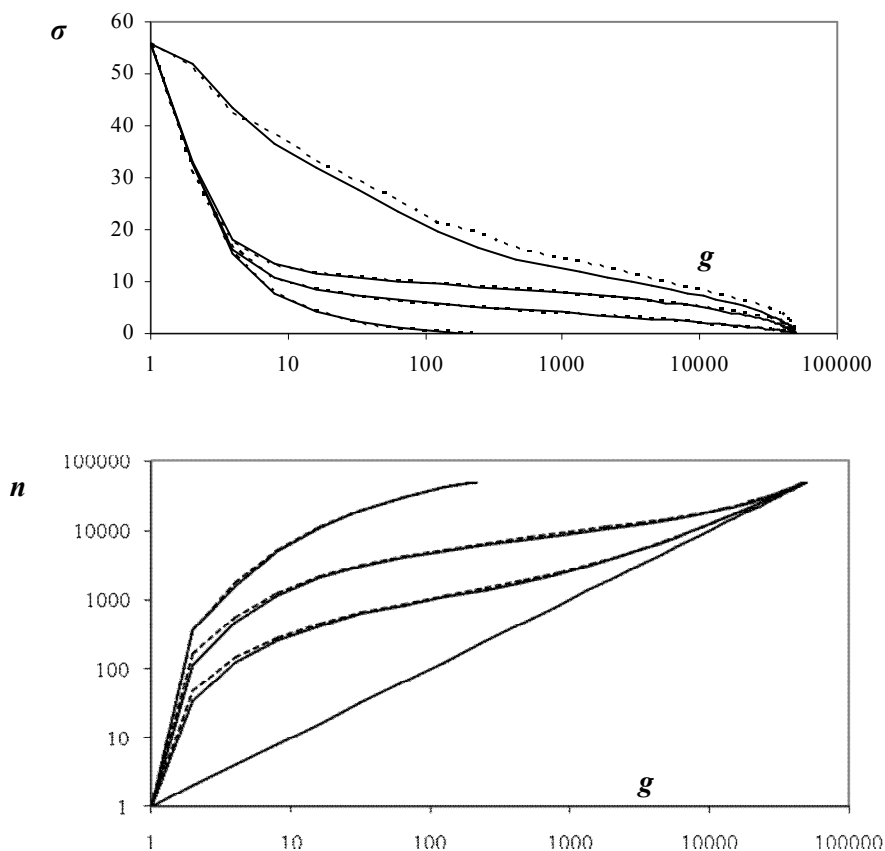


Рис. 1. Сопоставление методов по качеству приближений σ (вверху) и числу сегментов n (внизу) в зависимости от числа кластеров g

На каждом из графиков рис. 1 представлено по четыре пары зависимостей. Сплошными кривыми показаны зависимости, описывающие наш RW-метод. Ближайшие или сливающиеся с ними пунктирные кривые описывают метод Оцу. По горизонтальной оси в логарифмическом масштабе отложено число кластеров g в приближениях изображения. Верхние графики, в зависимости от g , показывают значения среднеквадратичного отклонения приближения от изображения, а нижние графики в логарифмическом масштабе по обеим осям показывают число n сегментов в приближениях изображения.

На рис. 1 нижняя пара кривых описывает последовательность значений среднеквадратичного отклонения σ изображения от кусочно-постоянных приближений, полученных в результате иерархической кластеризации пикселей без коррекции кластеров по числу сегментов. Верхняя пара кривых описывает сегментацию изображения посредством кластеризации пикселей с безусловной online коррекцией, при которой каждое разделение очередного сегмента изображения на пару кластеров пикселей сопровождается снижением числа сегментов в каждом кластере до единственного сегмента. Две промежуточные пары кривых описывают минимизацию значений σ с online коррекцией по числу кластеров, прерываемой по *правилу останова*, при котором реклассификации из кластера в кластер не подлежат пиксели неизолированных сегментов с уникальным в пределах данного кластера значением установленного параметра. Вторая снизу пара кривых отвечает правилу останова по средней яркости, при котором сохраняются сегменты с неповторяющейся средней яркостью. Предпоследняя пара кривых отвечает правилу останова по площади, при котором сохраняется разбиение кластера на сегменты с уникальной площадью, большинство которых обычно отличается от других сегментов данного кластера и по средней яркости.

Графики в нижней части рис. 1, описывающие число сегментов в обсуждаемых кусочно-постоянных приближениях, по сравнению с графиками в верхней части рисунка следуют в обратном порядке. Нижняя прямая описывает число сегментов для случая сегментации изображения посредством безусловной коррекции кластеризации пикселей, в результате которой число сегментов совпадает с числом кластеров. Верхняя пара кривых описывает кластеризацию пикселей RW-методом и иерархическим методом Оцу без коррекции по числу сегментов. Общим эффектом коррекции является подавление лавинообразного возрастания числа сегментов с ростом числа кластеров. В иллюстрируемом рис. 1 примере, в результате коррекции общее число тривиальных кластеров, на которое разделяется множество пикселей, разительно меняется от 216, равного исходному числу градаций яркости, до 49053, достигаемому при безусловной коррекции и равному числу сегментов из одинаковых пикселей в изображении «Лена».

Устойчивая относительно коррекции согласованность результатов кластеризации/сегментации по сравнимым методам минимизации суммарной квадратичной ошибки E или среднеквадратичного отклонения σ , иллюстрируемая графиками рис. 1, позволяет считать их взаимно-дополнительными в случае серого изображения и применять наш RW-метод в качестве альтернативы методу Оцу, причем не только для серых, но и для цветных изображений.

5. Наглядные примеры обработки

Рис. 2 иллюстрирует эффект коррекции на примере обработки стандартного серого изображения «Лена» из 256×256 пикселей.



Рис. 2. Коррекция кластеризации пикселей по числу сегментов на первой итерации инвариантного представления изображения в двух градациях яркости (результаты обработки нормализованы)

Слева на рис. 2 в уменьшенном формате показано изображение. В колонках справа показаны его приближения в инвариантном представлении, полученные нашим RW-методом (в левой колонке) и иерархическим методом Оцу (в правой колонке). Верхние приближения построены без коррекции, нижние – с коррекцией при правиле останова для сегментов уникальной площади.

Характерно, что при близком качестве аппроксимации (судя по графикам рис. 1) двухградационные представления, полученные по Оцу, заметно отличаются от представлений, полученных RW-методом. По визуальному восприятию снижение числа сегментов в нижних представлениях по сравнению с верхними менее заметно. При этом коррекцию можно использовать для подавления шумов.

Рис. 3 демонстрирует эффект получения серого инвариантного представления на примере цветового изображения «Лена» из 512×512 пикселей.



Рис. 3. Эффект получения серого инвариантного представления (крайнего справа) для цветового изображения (крайнего слева)

На рис. 3 в центре показано цветовое приближение изображения в 8 цветах (из 8 кластеров пикселей), полученное посредством первоначального снижения числа тонов в каждой цветовой компоненте до 32 при общем снижении цветов в исходном изображении от 148279 до 4953. Справа показан результат перекодировки 8 цветовых яркостей приближения в яркости инвариантного представления, которое оказывается серым.

Примечательно, что совместный учет цветовых компонент обеспечивает эффект подавления шумов в результирующих приближениях и инвариантных представлениях, что упрощает применение нашего RW-метода как с коррекцией, так и без коррекции (рис. 3) к цветовым, а также мультиспектральным изображениям.

При внимательном рассмотрении рис. 3 можно заметить, что сходные визуальные объекты (глаза) помечаются одинаковыми наборами сгруппированных целых значений пикселей. Более наглядно эффект выделения визуально воспринимаемых объектов демонстрируется на рис. 4.

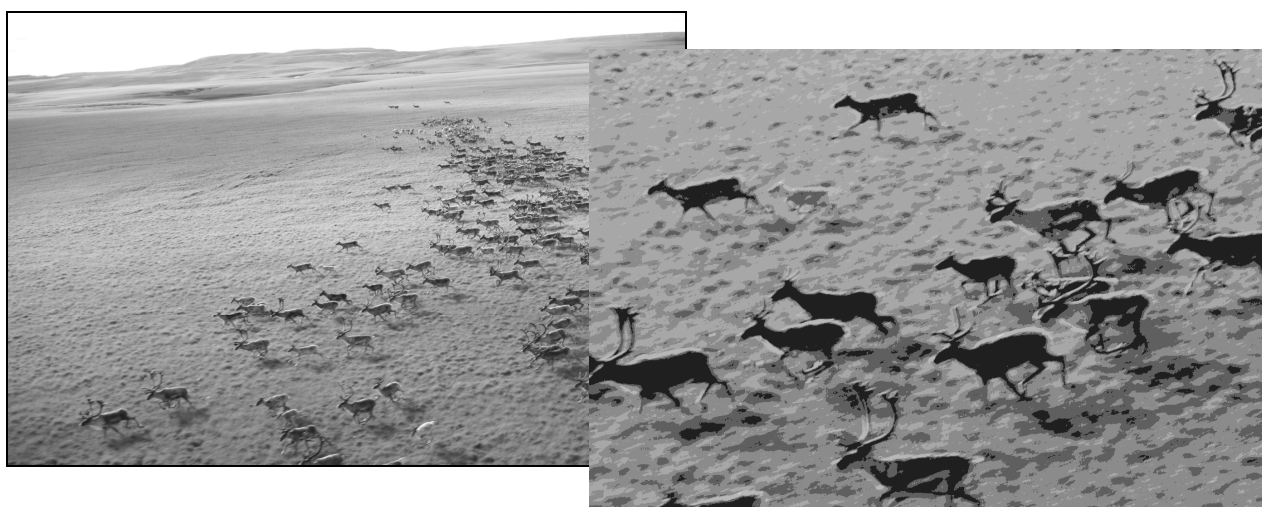


Рис. 4. Выделение визуально воспринимаемых объектов в инвариантном представлении (внизу, фрагмент) цветового изображения (вверху)

На рис. 4 вверху в уменьшенном масштабе показано изображение из 4672×3104 пикселей, обрабатываемое при дистанционном анализе популяций северного оленя [14]. Внизу показан фрагмент его инвариантного представления из 1224×828 пикселей, разделенных на 7 кластеров.

Инвариантное представление, иллюстрируемое фрагментом на рис. 4, имеет 7 цветов, пять из которых серые, а в паре других значение в R -компоненте несколько отличается от совпадающих значений в G и B компонентах. Визуальные объекты составляют сгруппированные сегменты из серых пикселей максимальной и минимальной яркости.

В целом, обрабатывать исходные цветовые изображения предложенным RW-методом оказывается проще, чем серые (п. 4), которые содержат меньший объем доступных для анализа данных.

Заключение

Таким образом, в нашей интерпретации, компьютер «видит» на изображении иерархию вложенных изображений «объектов», пиксели которых автоматически помечаются «формальными именами объектов» в виде целых значений пикселей инвариантного представления. Визуально воспринимаемые объекты описываются характерными сочетаниями сегментов из именованных пикселей изображения. Нахождение подобных сочетаний в инвариантном представлении решает проблему «локализации объектов» [15] и упрощает постановку и решение задачи распознавания цифровых изображений.

Если в [2] мы рассматривали инвариантное представление изображения в контексте проблемы целочисленной оценки количества информации в пикселе изображения, то в настоящей статье обобщили его на случай цветового изображения в контексте проблемы выделения объектов. Для сокращения объема и упрощения изложения мы опустили обсуждение сопутствующего обобщения для цветового изображения целочисленной оценки количества информации и представления количества информации [2], которое планируется выполнить в самостоятельной статье.

Литература

1. Харинов М.В. Модель локализации объектов на цифровом изображении // Вестник Бурятского государственного университета. 2013. №9. С. 182-189.
2. Харинов М.В. Количество информации в пикселе цифрового изображения // Вестник Бурятского государственного университета. 2013. №2. – С. 95-104.
3. Харинов М.В. Запоминание и адаптивная обработка информации цифровых изображений. – СПб.: Изд-во С-Пб. ун-та, 2006. – 138 с.
4. Ward J.H., Jr. Hierarchical grouping to optimize an objective function // J. Am. Stat. Assoc. 1963. – Vol. 58, Issue 301. – P. 236-244.
5. Бугаев А.С., Хельвас А.В. Поисковые исследования и разработка методов и средств анализа и автоматического распознавания потоковой информации в глобальных информационных системах. Шифр «Лацкан» // Отчет по НИР. М.: МФТИ, 2001. Том 1. 140 с.
6. Mumford D., Shah J. Boundary detection by minimizing functionals, I // Proc. IEEE Comput. Vision Patt. Recogn. Conf., San Francisco. 1985. P. 22-26.
7. Koepller G., Lopez C., Morel J. A Multiscale Algorithm for Image Segmentation by Variational Method // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1994. Vol. 31, № 1. P. 282-299.
8. Redding N.J., Crisp D.J., Tang D.H., Newsam G.N. An efficient algorithm for Mumford-Shah segmentation and its application to SAR imagery // Proc. Conf. Digital Image Computing Techniques and Applications (DICTA'99). 1999. P. 35-41.
9. Galiano P., Kharinov M., Vanurin S. Application of Sleator-Tarjan dynamic trees in Monitoring system for Arctic region based on remote sensing data // Information Fusion and Geographic Information Systems (IF&GIS' 2013) / Proc. of the 6th International Workshop on Information Fusion and Geographic Information Systems: Environmental and Urban Challenges, 12-15 May, 2013, St. Petersburg: Springer, LNG&C, 2014. P. 137-147.
10. Otsu N. A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms // IEEE Transactions on systems, MAN, and CYBERNETICS. January 1979. Vol. SMC-9, № 1. P. 62-66.
11. Ping-Sung Liao, Tse-Sheng Chen, Pau-Choo Chung A Fast Algorithm for Multilevel Thresholding // J. Inf. Sci. Eng. 2001. Vol. 17 (5), – P. 713-727.
12. Singh K. C., Satapathy L. M., Dash B., Routray S. K. Comparative Study on Thresholding // International Journal of Instrumentation Control & Automation (IJICA). 2011. Vol. 1. №. 1. – P. 73-77.
13. Arifin A. Z., Asano A. Image segmentation by histogram thresholding using hierarchical cluster analysis // Pattern Recognition Letters. 2006. Vol. 27. №. 13. – P. 1515-1521.

14. Михайлов В.Ю., Харин Я.В. К вопросу о построении системы распознавания и подсчета животных на аэрофотоснимках. Ч. 1: Анализ методов распознавания // Информационно-управляющие системы. 2011. № 2. С. 2-28.

15. Визильтер Ю. В., Желтов С. Ю. Проблемы технического зрения в современных авиационных системах // Механика, управление и информатика. 2011. № 6. С. 11-44.

Харинов Михаил Вячеславович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации, тел. (812) 328-1919, e-mail: khar@ias.spb.su

Kharinov Mikhail Vyacheslavovich, candidate of technical sciences, senior researcher, laboratory of applied informatics, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation RAS, tel. (812) 328-1919, e-mail: khar@ias.spb.su

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.91

© Т. Батзул, Д. Ганхуяг, Б. Очирбат, И.-Х.Д. Хишектыева

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФЛОКЕ–ЛЯПУНОВА

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,
гранты 12-01-00914-а, 12-01-98011-р_сибирь_а, 13-01-92200-Монг_а

В работе приведены некоторое обобщение теоремы Флока в случае диагонально периодических матриц и доказательство сформулированной теоремы.

Ключевые слова: фундаментальное решение, система линейных дифференциальных уравнений, диагонально-периодическая функция.

T. Batzul, D. Gankhuyag, B. Ochirbat, I.-Kh.D. Khishektueva

GENERALIZATION OF THE FLOQUET–LYAPUNOV THEOREM

The paper presents some generalization of the Floquet's theorem in the case of diagonally periodic matrices and the proof of the theorem.

Keywords: fundamental solution, a system of linear differential equations, diagonally periodic function.

Рассмотрим однородную линейную систему из n уравнений

$$\frac{dy}{dx} = A(x) \cdot y, \quad (1)$$

где $y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$, $A(x) = [a_{ij}(x)]_{n \times n}$.

Отметим сначала следующие результаты обыкновенных дифференциальных уравнений ([1], [2],[3]).

Теорема 1. Пусть $\Phi_1(x)$ – некоторая фундаментальная матрица системы (1). Тогда всякое фундаментальное решение $\Phi(x)$ системы (1) имеет вид $\Phi(x) = \Phi_1(x) \cdot C$, где C – постоянная матрица.

Теорема 2. Матрица-функция $A(x)$ непрерывна на интервале I . Тогда существуют фундаментальные матрицы решений системы (1) на I .

Теорема Флоке–Ляпунова. Пусть элементы матрицы-функции $A(x)$ вещественные периодические функции с периодом ω . Тогда всякая фундаментальная матрица $\Phi(x)$ системы (1) имеет вид

$$\Phi(x) = P(x)e^{xB}$$

где B – постоянная матрица, элементы матрицы $P(x)$ периодичны с периодом ω .

Основная теорема (обобщение теоремы Флоке–Ляпунова). Пусть элементы матрицы-функции $A(x)$ вещественные диагонально-периодические функции с диагональным периодом $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$. Тогда всякая фундаментальная матрица $\Phi(x)$ системы (1) имеет вид

$$\Phi(x) = P(x)e^{xB}$$

где B – постоянная матрица, элементы матрицы $P(x)$ диагонально-периодичны с диагональным периодом $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$.

УДК 517.946

© В.В. Кибирев

ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данной работе доказаны 2 теоремы о целых решениях задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: задача Коши, гармонические функции, порядок и тип целой функции двух комплексных переменных.

V.V. Kibirev

INTEGER SOLUTIONS FOR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS

In this article 2 theorems on integer solutions of Cauchy problem for elliptic equations of second order with constant coefficients have been proved.

Keywords: Cauchy problem, harmonic functions, order and type of integer function of two complex variables.

Введение

Классическая теорема Коши–Ковалевской дает существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения о частных производных с аналитическими коэффициентами. Однако существование решения гарантируется только в малом. Здесь будет изучаться задача Коши для одного узкого класса уравнений, но решение будет получено и целом. Решение в целом получается за счет того, что уравнение рассматривается в комплексном пространстве.

Постановка задачи

Рассмотрим целую гармоническую функцию U , удовлетворяющую условию $\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$. Пусть $U|_{z=0} = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$, f – целая функция двух комплексных переменных. Будем изучать рост функции U в зависимости от переменной z . Фиксируем ξ и η , тогда в круге $K(R) : \{ |z| < R, \xi = \xi_0, \eta = \eta_0 \}$ радиуса R функцию U можно представить следующим образом:

$$U(\xi, \eta, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{f(t, \tau)}{(t - \xi)(\tau - \eta)} F\left(1, 1; \frac{1}{2}; -\frac{z^2}{(t - \xi)(\tau - \eta)}\right) d\tau dt, \tag{1}$$

где Γ_1 и Γ_2 – окружности $|t| = R, |\tau| = R$, а $F\left(1, 1; \frac{1}{2}; h\right)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Покажем, что целая гармоническая функция U по переменной z имеет порядок, не превосходящий порядка целой функции $U(\xi, \eta, 0)$, а также, что и тип функции U по z не превосходит типа целой функции двух комплексных переменных $U(\xi, \eta, 0)$.

Доказательства основных теорем

Положим, $M(f, R) = \sup_{|\xi| \leq R, |\eta| \leq R} |f(\xi, \eta)|, \xi = R\xi_1, \eta = R\eta_1, z = Rz_1$.

Тогда из формулы (1) имеем

$$U(\xi_1, \eta_1, z_1) = \frac{M(f, R)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_1(\varphi, \psi)}{(e^{i\varphi} - \xi_1)(e^{i\psi} - \eta_1)} \cdot F\left(1, 1; \frac{1}{2}; -\frac{z_1}{(e^{i\varphi} - \xi_1)(e^{i\psi} - \eta_1)}\right) d\psi d\varphi,$$

где

$$q_1(\varphi, \psi) = \frac{e^{i(\varphi+\psi)}}{M(f, R)} f(\operatorname{Re}^{i\varphi}, \operatorname{Re}^{i\psi}).$$

Очевидно, имеем $\max|q_1(\varphi, \psi)| \leq 1$. Функция

$$v_1(\xi_1, \eta_1, z_1) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_1(\varphi, \psi)}{(e^{i\varphi} - \xi_1)(e^{i\psi} - \eta_1)} \cdot F\left(1, 1; \frac{1}{2}; -\frac{z_1^2}{(e^{i\varphi} - \xi_1)(e^{i\psi} - \eta_1)}\right) d\psi d\varphi$$

является целой гармонической функцией, поэтому для нее можно написать интегральное представление (1), в котором интегрирование ведется по множеству $|t| = R + \varepsilon$, $|\tau| = R + \varepsilon$, где ε – произвольное положительное число.

Положим,

$$W(f) = \max_{\bar{K}(1)} |v(\xi_1, \eta_1, z_1)|,$$

где $\bar{K}(1)$ – круг $|z_1| \leq 1$, а ξ_1 и η_1 фиксированы. Из интегрального представления (1) для функции U следует, что имеет место оценка

$$W(f) \leq V(\varepsilon) \frac{M(f, R + \varepsilon)}{M(f, R)}, \quad (2)$$

где $V(\varepsilon)$ – константа, зависящая только от ε . Из (1) и (2) следует оценка

$$M(U, R) \leq V(\varepsilon) M(f, R + \varepsilon) \quad (3)$$

для

$$M(U, R) = \max_{\bar{K}(R)} |U(\xi, \eta, z)|,$$

Порядком и типом целой функции f называются следующие числа соответственно

$$\rho = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(f, R)}{\ln R}, \quad \sigma = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln M(f, R)}{R^\rho}$$

Ниже мы выразим порядок и тип функции U по переменному z через числа ρ и σ .

Из неравенства (3) имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(U, R)}{\ln R} &\leq \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \{\ln V(\varepsilon) + \ln M(f, R)\}}{\ln R} = \\ &= \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \ln M(f, R + \varepsilon)}{\ln(R + \varepsilon)} \cdot \frac{\ln(R + \varepsilon)}{\ln R} + \frac{\ln \left[1 + \frac{\ln V(\varepsilon)}{\ln M(f, R + \varepsilon)} \right]}{\ln R} \right\} = \\ &= \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(f, R + \varepsilon)}{\ln(R + \varepsilon)} = \rho \end{aligned}$$

Таким образом, целая гармоническая функция U по переменной z имеет порядок, не превосходящий порядка целой функции $U(\xi, \eta, 0)$. Аналогично можно показать, что и тип функции U по z не

превосходит типа целой функции двух комплексных переменных $U(\xi, \eta, 0)$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для всякой целой функции $f(\xi, \eta)$ существует целая гармоническая функция U , удовлетворяющая условиям $U|_{z=0} = f(\xi, \eta), \frac{\partial U}{\partial z}|_{z=0} = 0$.

Порядок и тип функции U по переменной z не превосходят порядка и типа функции $f(\xi, \eta) = U(\xi, \eta, 0)$.

Рассмотрим целое решение W уравнения

$$\Delta w + \lambda w = 0, \lambda = const. \tag{4}$$

Для всякой целой функции $f(\xi, \eta)$ существует целое решение W этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$W|_{z=0} = f(\xi, \eta), \frac{\partial W}{\partial z}|_{z=0} = 0. \tag{5}$$

Причем это решение дается формулой

$$W(\xi, \eta, z) = U(\xi, \eta, z) - \frac{z\sqrt{\lambda}}{2} \int_0^1 \frac{J_1(z\sqrt{\lambda t})}{\sqrt{t(1-t)}} U(\xi, \eta, z\sqrt{1-t}) dt \tag{6}$$

где U – гармоническая функция, а J_1 – функция Бесселя. Из (6) имеем

$$\max_{K(R)} |w(\xi, \eta, z)| \leq \max_{K(R)} |u(\xi, \eta, z)| \left\{ 1 + \max_{K(R)} \frac{|z\sqrt{\lambda}|}{2} \int_0^1 \frac{|j_1(z\sqrt{\lambda t})|}{\sqrt{t(1-t)}} dt \right\}. \tag{7}$$

Так как

$$J_1(z\sqrt{\lambda t}) = \frac{z\sqrt{\lambda t}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{|z|^{2m} \cdot |\lambda|^m \cdot t}{m!(m+1)! \cdot 4^m},$$

то имеем

$$\frac{|z\sqrt{\lambda}|}{2} |J_1(z\sqrt{\lambda t})| \leq \frac{|\lambda| \cdot |z|^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^{2m} \cdot |\lambda|^m \cdot t^m}{m! \cdot (m+1)! \cdot 4^m}.$$

Поскольку

$$\int_0^1 t^{m-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{m!},$$

то из (7) получим

$$M(W, R) \leq M(U, R) \cdot K(|\lambda|, R), \tag{8}$$

полагая

$$M(W, R) = \max_{K(R)} |w(\xi, \eta, z)|,$$

$$K(|\lambda|, R) = 1 + \frac{|\lambda|R^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{(m!)^2 (m+1)!} \left(\frac{|\lambda|}{4} R^2\right)^m.$$

Из (8) следует, что порядок функции W не превосходит наибольшего из порядков функции U и $K(|\lambda|, R)$. Порядок функции $K(|\lambda|, R)$ равен $\frac{1}{2}$, поэтому имеем следующую теорему:

Теорема 2. Пусть W – целое решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$. Если порядок функции $W(\xi, \eta, 0)$ равен ρ , то порядок $W(\xi, \eta, z)$ по z не превосходит числа

$$\rho_1 = \max\left(\rho, \frac{1}{2}\right)$$

Замечание. Более общее уравнение с постоянными коэффициентами $\Delta u + au_x + bu_y + cu_z + \gamma u = 0$ подстановкой

$$u = v \exp\left[-\frac{1}{2}(ax + by + cz)\right]$$

сводится к уравнению

$$\Delta v + \left[\gamma - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)\right]v = 0.$$

В этом случае в теореме число ρ_1 заменяется на число $\rho_2 = \max(\rho, 1)$.

Порядок по z целых решений уравнения с постоянными коэффициентами не зависит от абсолютных величин коэффициентов c и γ и не превосходит ρ_2 , если $c \neq 0$, а если $c = 0$, но $\gamma - \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \neq 0$, то он не превосходит ρ_1 . Величины коэффициентов a, b, c и γ влияют только на тип решения.

Заключение

Итак, в данной работе показано, что для всякой целой функции $f(\xi, \eta)$ существует некоторая гармоническая функция U , порядок и тип которой не превосходит порядка и типа функции двух комплексных переменных.

Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. – 204 с.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
3. Фукс Б.А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1962. 420 с.
4. Янушаускас А. К задаче Коши для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными // Сиб. матем. Журнал. 1975. Т.16, №6. С.1352–1363.
5. Янушаускас А. К теории вырождающихся эллиптических уравнений // Сиб. матем. журнал. 1974. Т. 15, №6. С. 1394-1405.

Кибирев Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел. (8301-2)217573, e-mail: dekanat_imi@bsu.ru

Kibirev Vladimir Vasilevich, candidate of physical and mathematical sciences, professor, applied mathematics department, Buryat State University.

УДК 519.622

© Е.А. Новиков, М.В. Рыбков

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ
УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00047)

Построен алгоритм получения коэффициентов многочленов устойчивости до степени $m=27$, соответствующих явным методам типа Рунге-Кутты первого порядка точности. Показано, что выбором значений многочлена в экстремальных точках можно повлиять на размер и форму области устойчивости. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: жесткие задачи, явные методы, многочлены устойчивости.

E.A. Novikov, M.V. Rybkov

**A NUMERICAL ALGORITHM FOR CONSTRUCTING
POLYNOMIALS STABILITY FOR METHODS OF THE FIRST ORDER**

An algorithm of stable polynomial coefficients obtaining up to degree $m=27$ for Runge-Kutta explicit methods of the first order of accuracy is constructed. The choice of polynomial's values at the points of extremum can influence on the size and shape of stability domain. The numerical results are submitted.

Keywords: stiff problems, explicit methods, stability polynomials.

Введение

В ряде случаев для численного решения жестких задач применяются алгоритмы интегрирования на основе явных методов с расширенными областями устойчивости [1–3]. В [4] описан способ построения многочленов, обеспечивающих максимальную длину интервала устойчивости. С помощью алгоритма [5] получены коэффициенты многочленов устойчивости до степени $m=13$. Здесь разработан алгоритм получения коэффициентов многочленов устойчивости до степени $m=27$ для явных методов типа Рунге–Кутты первого порядка. Показано, что форма, размер и структура области устойчивости зависят от расположения корней многочлена устойчивости в комплексной плоскости.

1. Явные методы типа Рунге-Кутты

Для численного решения жестких задач вида

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k,$$

где y и f – гладкие вещественные N -мерные вектор-функции, t – независимая переменная, в [2] предлагается применять явные методы вида

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad k_i = hf \left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right),$$

где k_i , $1 \leq i \leq m$, – стадии метода; h – шаг интегрирования; p_{mi} , α_i и β_{ij} – коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости численной схемы. Для упрощения выкладок далее рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \tag{1}$$

для решения которой применим методы вида

$$y_{n,i} = y_n + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} k_j, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \tag{2}$$

где $k_i = hf(y_{n,i-1})$, $1 \leq i \leq m$, $y_{n,0} = y_n$. Все полученные ниже результаты можно использовать для неавтономных задач, если положить

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq m.$$

Устойчивость одношаговых методов обычно исследуется на линейном скалярном уравнении $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, $t \geq 0$ с комплексным числом λ , $\text{Re}(\lambda) < 0$. Применяя вторую формулу (2) для решения $y' = \lambda y$, получим

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n, \quad Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad c_{mi} = \sum_{j=i}^m b_{ij} p_{mj}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где $z=h\lambda$. Отсюда следует, что функция устойчивости явного m -стадийного метода типа Рунге–Кутты представляет собой полином $Q_m(z)$ степени m . В [2] приведены условия порядка для методов вида (2). Метод будет иметь первый порядок точности, если $p_{m1}+\dots+p_{mm}=c_{m1}=1$. Далее рассмотрим задачу получения таких коэффициентов многочлена устойчивости, чтобы область устойчивости схемы имела заданную, естественно «разумную», форму и размер.

2. Многочлены устойчивости на интервале $[\gamma_m, 0]$

Пусть заданы два числа k и m , $k \leq m$. Рассмотрим многочлены вида

$$Q_{m,k}(x) = 1 + \sum_{i=1}^k c_i x^i + \sum_{i=k+1}^m c_i x^i, \quad (3)$$

где коэффициенты c_i , $1 \leq i \leq k$ заданы, а c_i , $k+1 \leq i \leq m$, – свободные. Обычно c_i , $1 \leq i \leq k$ определяются из требований аппроксимации. Поэтому для определенности ниже будем предполагать, что $c_i = 1/i!$, $1 \leq i \leq k$.

Обозначим экстремальные точки (3) через x_1, \dots, x_{m-1} , причем $x_1 > x_2 > \dots > x_{m-1}$. Неизвестные коэффициенты c_i , $k+1 \leq i \leq m$ определим из условия, чтобы многочлен (3) в экстремальных точках x_i , $k \leq i \leq m-1$ принимал заданные значения, то есть $Q_{m,k}(x_i) = F_i$, $k \leq i \leq m-1$, где $F(x)$ – некоторая заданная функция $F_i = F(x_i)$. Для этого на x_i , $k \leq i \leq m-1$ и c_j , $k+1 \leq j \leq m$ рассмотрим алгебраическую систему уравнений

$$Q_{m,k}(x_i) = F_i, \quad Q'_{m,k}(x_i) = 0, \quad k \leq i \leq m-1, \quad Q'_{m,k} = \sum_{i=1}^m i c_i x^{i-1}. \quad (4)$$

Перепишем (4) в виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Для этого обозначим через y , z , g и r векторы с координатами

$$y_i = x_{k+i-1}, \quad z_i = c_{k+i}, \quad g_i = F_{k+i-1} - 1 - \sum_{j=1}^k c_j y_i^j, \\ r_i = -\sum_{j=1}^k j c_j y_i^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq m-k,$$

через E_1, \dots, E_5 – диагональные матрицы с элементами на диагонали вида

$$e_1^{ii} = k+i, \quad e_2^{ii} = 1/y_i, \quad e_3^{ii} = \sum_{j=1}^k j c_j y_i^{j-1} + \sum_{j=1}^{m-k} (k+j) z_j y_i^{k+j-1}, \\ e_4^{ii} = \sum_{j=2}^k j(j-1) c_j y_i^{j-2} + \sum_{j=1}^{m-k} (k+j)(k+j-1) z_j y_i^{k+j-2}, \\ e_5^{ii} = (-1)^{k+i-1}, \quad 1 \leq i \leq m-k,$$

а через A – матрицу с элементами $a_{ij} = y_i^{k+j}$, $1 \leq i, j \leq m-k$. С использованием введенных обозначений задачу (4) можно записать в виде

$$Az - g = 0, \quad E_2 A E_1 z - r = 0. \quad (5)$$

Система (5) плохо обусловлена, что приводит к определенным трудностям при использовании для ее решения метода простой итерации. Для сходимости метода Ньютона требуются хорошие начальные условия, что в данном случае является трудновыполнимой задачей. Если в (4) положить $F_i = (-1)^i$, $k \leq i \leq m-1$, то есть поставить задачу нахождения полинома с максимальным размером интервала устойчивости, то вопрос о вычислении начального условия y^0 решается с использованием значений экстремальных точек многочлена Чебышева на отрезке $[-2m^2, 0]$, где m – степень полинома (3). Их можно вычислить по формуле

$$y_i = m^2 [\cos(i\pi/m) - 1], \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (6)$$

Подставляя (6) в первую систему (5), получим коэффициенты полинома Чебышева, для которого $|Q_{m1}(x)| \leq 1$ при $x \in [-2m^2, 0]$. При любом k в качестве начальных условий можно взять (6) и, как показывают расчеты, имеется хорошая сходимость. Если же $F_i \neq (-1)^i$, $k \leq i \leq m-1$, то выбор начальных условий является, вообще говоря, искусством.

Опишем способ решения (5), который не нуждается в хороших начальных условиях. Для численного решения (5) используем метод установления, который заключается в том, что для стационарной задачи строится нестационарный процесс, решение которого устанавливается к решению исходной задачи. Итак, рассмотрим задачу Коши:

$$y' = E_5 (E_2 A E_1 A^{-1} g - r), \quad y(0) = y_0. \quad (7)$$

Ясно, что после определения стационарной точки (7) коэффициенты полинома устойчивости можно вычислить из первой системы (5). Заметим, что при использовании матрицы E_5 все собственные числа матрицы Якоби задачи (7) имеют отрицательные вещественные части, то есть задача (7) устойчивая. Из результатов расчетов следует, что (7) является жесткой задачей. Методы решения таких за-

дач предполагают вычисление матрицы Якоби, что в случае (7) связано с трудностями. Поэтому для ее решения используем метод второго порядка точности с численным вычислением и замораживанием матрицы Якоби [6].

3. Многочлены устойчивости на интервале [-1, 1]

Нетрудно показать, что с ростом m коэффициенты многочлена устойчивости стремятся к нулю. С использованием алгоритма [2] коэффициенты $c_i, k+1 \leq i \leq m$ получены до степени $m=13$. Рассмотрим алгоритм построения многочленов с заданными свойствами на промежутке [-1, 1]. В этом случае коэффициенты c_i растут не так быстро, и можно построить многочлены при значениях $m > 13$. Обозначим через $|\gamma_m|$ длину интервала устойчивости m -стадийной явной формулы типа Рунге-Кутты, то есть на интервале $[\gamma_m, 0]$ выполняется условие $|Q_{m,k}(x)| \leq 1$. Тогда заменой переменных $x = 1 - 2z/\gamma_m$ переведем интервал $[\gamma_m, 0]$ в [-1, 1]. Получим многочлен

$$Q_m(z) = \sum_{i=0}^m d_i z^i. \tag{8}$$

Тогда коэффициенты $d_i, 0 \leq i \leq m$ многочлена (8) связаны с коэффициентами $c_i, 0 \leq i \leq m$ многочлена (3) связаны соотношением

$$c = UVd, \tag{9}$$

где $d = (d_0, \dots, d_m)^T, c = (c_0, \dots, c_m)^T, U$ – диагональная матрица с элементами на главной диагонали вида $u^{ii} = (-2/\gamma_m)^{i-1}, 1 \leq i \leq m+1$, а элементы v^{ij} матрицы V задаются формулами

$$v^{lj} = 1, 1 \leq j \leq m+1; v^{ij} = v^{i,j-1} + v^{i-1,j-1}, 2 \leq i \leq j \leq m+1; v^{ij} = 0, i > j.$$

Нетрудно видеть, что V представляет собой «треугольник Паскаля», элементы которого вычисляются по рекуррентной формуле. После построения многочлена (8) на интервале [-1, 1], с помощью (9) легко вычислить коэффициенты (3).

Теперь перейдем к построению многочлена (8). Обозначим экстремальные точки (8) через z_1, \dots, z_{m-1} , причем $z_1 > z_2 > \dots > z_{m-1}$. Коэффициенты $d_i, 0 \leq i \leq m$ определим из условия, чтобы многочлен (8) в экстремальных точках $z_i, 1 \leq i \leq m-1$ принимал заданные значения, то есть

$$Q_m(z_i) = F_i, 1 \leq i \leq m-1,$$

где $F(z)$ – некоторая заданная функция $F_i = F(z_i)$. Для этого на $z_i, 1 \leq i \leq m-1$ и $d_j, 0 \leq j \leq m$ рассмотрим алгебраическую систему уравнений

$$Q_m(z_i) = F_i, Q'_m(z_i) = 0, 1 \leq i \leq m-1; Q'_m(z) = \sum_{i=1}^m i d_i z^{i-1}, \tag{10}$$

причем выполнены условия нормировки $Q_m(-1) = (-1)^m$ и $Q_m(1) = 1$.

Перепишем (10) в виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Для этого обозначим через y, w, g и r векторы с координатами

$$y_j = z_j, r_j = 0, 1 \leq j \leq m-1; w_i = d_{i-1}, 1 \leq i \leq m+1;$$

$$g_i = F_i, 1 \leq i \leq m-1; g_i = 1, i = m; g_i = (-1)^m, i = m+1;$$

через E_1 и E_2 – соответственно матрицы размерности $(m+1) \times (m+1)$ и $(m-1) \times (m+1)$ с элементами на главной диагонали вида

$$e_1^{jj} = j-1, 1 \leq j \leq m+1; e_2^{ii} = 1/y_i, 1 \leq i \leq m-1,$$

а через A – матрицу размерности $(m+1) \times (m+1)$ с элементами

$$a^{ij} = y_i^{j-1}, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m+1; a^{m,j} = 1, a^{m+1,j} = (-1)^{j+1}, 1 \leq j \leq m+1.$$

Теперь задача (10) имеет вид

$$Aw - g = 0, E_2 A E_1 w - r = 0. \tag{11}$$

Для численного решения (11) используется метод установления [2]. Определив коэффициенты многочлена (8), с помощью соотношения (9) вычисляем коэффициенты многочлена (3). Значение γ_m находим из условия, что искомый многочлен соответствует методу интегрирования первого порядка точности, то есть имеет место $c_1 = 1$. Выписав вторую строку соотношения (11) и сделав необходимые преобразования, получим

$$\gamma_m = \left\{ -2 \sum_{j=1}^{m+1} v_{2j} d_j \right\} / c_1, \gamma_m^0 = -2m^2.$$

4. Результаты расчетов

Из расчетов следует, что коэффициент c_m многочлена (3) убывает с ростом m , и, в частности, при $m=13$ и $k=1$ величина c_m порядка 10^{-26} . Из-за ошибок округления продолжить расчет задачи (7) при $m>13$ проблематично. При расчетах задачи (11) установлено, что коэффициенты d_i , $0 \leq i \leq m$ многочлена (8) по абсолютной величине растут с ростом m и, в частности, при $m=13$ величина $\max_{0 \leq i \leq m} |d_i|$ порядка 10^5 , а при $m=25$ – порядка 10^9 , то есть коэффициенты d_i растут медленнее. Переход от коэффициентов многочлена (8) к коэффициентам (3) по формуле (9) происходит после решения задачи (11), что позволяет вычислить коэффициенты многочленов устойчивости до степени $m=27$.

Опишем влияние выбора значений функции F на размер и форму области устойчивости. Если положить $F_i = (-1)^i$, $k \leq i \leq m-1$, то длина интервала устойчивости известна и определяется как $|\gamma_m| = 2m^2$. В этом случае для заданного m получаем максимальную длину области устойчивости метода вдоль вещественной оси. Область устойчивости таких методов является почти многосвязной, и в результате ошибок округлений, которые приводят к появлению небольших мнимых частей собственных чисел матрицы Якоби, область устойчивости сокращается.

Чтобы ошибки округления не приводили к сужению области устойчивости, ее нужно «растянуть» вдоль мнимой оси в точках соприкосновения эллипсов. Для этого можно положить $F_i = (-1)^i \mu$, $1 \leq i \leq m-1$, $0 < \mu < 1$. Расчеты показывают, что если выбрать $\mu=0,9$, то длина интервала устойчивости метода сокращается на 5–8% по сравнению с максимально возможной длиной, равной $2m^2$. При этом область устойчивости растягивается вдоль мнимой оси на указанных участках. Это обеспечивает лучшие свойства устойчивости метода к ошибкам округления при незначительном сокращении длины интервала устойчивости. Если же положить $\mu=0,95$, то длина интервала устойчивости сократится всего на 3–4%. Область устойчивости пятистадийного метода при $\mu=0,9$ приведена на рис. 1. Длина интервала устойчивости такого метода составляет $|\gamma_m|=46,79$. Для лучшей визуализации корней многочлена (3) на всех рисунках в комплексной плоскости $\{h\lambda\}$ приведены линии уровней $|Q_{m,k}(x)|=1$, $|Q_{m,k}(x)|=0,8$, $|Q_{m,k}(x)|=0,6$, $|Q_{m,k}(x)|=0,4$ и $|Q_{m,k}(x)|=0,2$.

С уменьшением μ от единицы до нуля корни многочлена (3) располагаются все ближе друг другу на вещественной оси, поэтому длина интервала устойчивости соответствующего метода закономерно уменьшается. Эллипсы, которые хорошо выражены при $\mu=1$, сближаются, не обеспечивая при этом достаточно большого растяжения области устойчивости вдоль мнимой оси. Поэтому в зависимости от решаемой задачи целесообразно использовать значение μ в интервале от 0,8 до 0,95.

При решении задач, собственные числа матрицы Якоби которых имеют большие мнимые части и решения которых носят осциллирующий характер, часто не требуется значительное расширение интервала устойчивости. В этом случае шаг из условия точности выбирается достаточно малым, и поэтому расширение области устойчивости требуется в основном по мнимой оси. В случае наличия чисто мнимых собственных чисел нужно, чтобы на некотором участке мнимой оси выполнялось условие $|Q_{m,k}(x)|=1$. При повышении порядка точности, то есть с ростом k , это условие выполняется само собой.

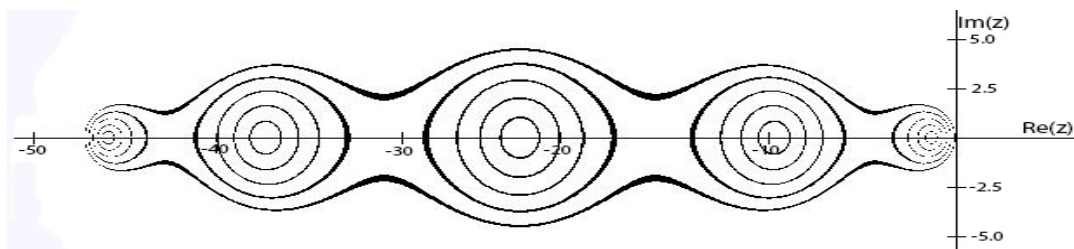


Рис. 1. Область устойчивости при значениях параметров $m=5$, $k=1$, $F=\{-0,9, 0,9, -0,9, 0,9\}$, $|\gamma_m|=46,79$

В случае методов первого порядка точности, то есть при $k=1$, выполнения данного условия можно добиться выбором значений функции F . Например, при $m=4$, $k=1$, $F=\{0,85, 0,95, 0,85\}$ получим многочлен, удовлетворяющий этому условию. Поскольку m четное, и все значения функции F положительные, то график многочлена не пересекает ось абсцисс, а многочлен имеет две пары комплексно сопряженных корней. Поэтому область устойчивости растягивается вдоль мнимой оси, захватывая ее участок. При этом длина области устойчивости метода вдоль вещественной оси невелика и составляет $|\gamma_m|=2,18$. При уменьшении значений функции F длина области устойчивости вдоль действитель-

ной оси возрастает и, в частности, при $F=\{0,55, 0,65, 0,55\}$ становится практически прямоугольной с $|\gamma_m|=5,30$. С дальнейшим уменьшением значений F длина интервала устойчивости $|\gamma_m|$ также растет, но область устойчивости захватывает все меньший участок мнимой оси. Таким образом, при построении методов первого порядка для интегрирования задач, решения которых носят осциллирующий характер, разумно выбирать многочлены устойчивости, которые вблизи начала координат в комплексной плоскости $\{h\lambda\}$ имеют пару комплексно сопряженных корней. При этом значения функции F , которым соответствуют эти корни, необходимо выбирать близкими к единице, чтобы область захватывала участок мнимой оси.

В случае нечетного m хотя бы один корень многочлена (3) будет действительный. Использовать это свойство можно различными способами. Например, если выбором значений функции F расположить действительный корень многочлена пятой степени посередине интервала, а остальные корни оставить комплексными, то можно построить область устойчивости в форме, близкой к прямоугольнику, вытянутому вдоль мнимой оси. Область устойчивости пятистадийного метода, многочлен устойчивости которого в экстремальных точках принимает значения $F=\{0,2, 0,5, -0,5, -0,2\}$, приведена на рис. 2. Отметим, что чем ближе значения F_2 и F_3 к единице, тем больше получается длина интервала устойчивости, но область превращается в почти многосвязную.

Для значений функции F , влияющих на появление комплексно сопряженных корней, ситуация обратная – чем меньше F_1 и F_4 , тем длиннее интервал устойчивости метода. Однако комплексно сопряженные корни располагаются все ближе друг к другу и к действительной оси, что приводит к изменению формы области устойчивости – прямоугольник превращается в эллипс.

В общем случае, в зависимости от требуемых свойств многочлена, варьированием параметров m и k выбором значений функции F можно конструировать области устойчивости различной формы и размера.

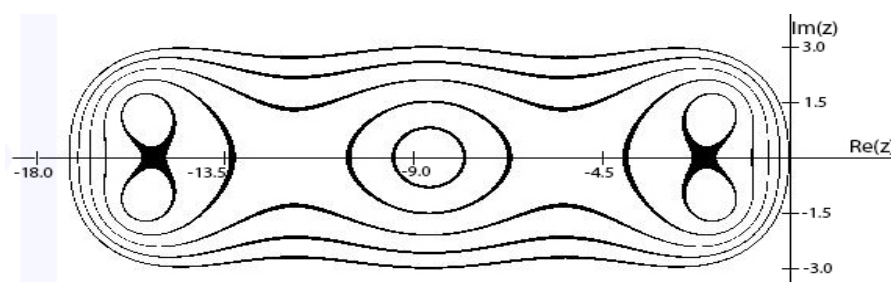


Рис. 2. Область устойчивости при значениях параметров $m=5, k=1, F=\{0,2, 0,5, -0,5, -0,2\}, |\gamma_m|=17,21$

Заключение

С помощью алгоритма построения многочленов с заданными свойствами на промежутке $[-1, 1]$ получены коэффициенты многочленов устойчивости методов первого порядка до степени $m=27$. Показано, что выбором значений функции F можно влиять на размер и форму области устойчивости. Предложенный алгоритм позволяет повышать эффективность явных методов и создавать алгоритмы переменного порядка и шага для решения умеренно жестких задач.

Литература

1. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 451 с.
2. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 195 с.
3. Новиков А.Е., Новиков Е.А. Алгоритм переменного порядка и шага на основе стадий метода Дорманда–Принса восьмого порядка точности // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т.8, №2. С. 317–325.
4. Скворцов Л.М. Простой способ построения многочленов устойчивости для явных стабилизированных методов Рунге–Кутты // Матем. моделирование. 2011. Т.23, №1. С. 81–86.
5. Новиков Е.А., Рыбков М.В. Численный алгоритм конструирования областей устойчивости явных методов // Системы управления и информационные технологии. 2014. №1.1(55). С. 173–177
6. Новиков А.Е., Новиков Е.А. L-устойчивый (2,1)-метод решения жестких неавтономных задач // Вычислительные технологии. 2008. №13. С. 477–482.

Новиков Евгений Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ИВМ СО РАН, заведующий кафедрой СФУ, тел. (391)2494724, e-mail novikov@icm.krasn.ru.

Рыбков Михаил Викторович, ассистент кафедры СФУ, тел. (905)0860115, E-mail: mixailrybkov@yandex.ru

Novikov Evgeny Alexandrovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, senior researcher, Institute of Computational Modeling SB RAS, head of the department, Siberian Federal University.

Rybkov Mikhail Viktorovich, teaching assistant, Siberian Federal University.

УДК 517.948

© Г.А. Шишкин

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Используя новую модификацию функции гибкой структуры, в статье исследуется возможность решения краевых задач для линейных уравнений запаздывающего типа.

Ключевые слова: краевая задача, интегродифференциальные уравнения Вольтерра, разрешающее уравнение, функция гибкой структуры, запаздывающий тип уравнений.

G.A. Shishkin

THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF VOLTERRA INTEGER-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF RETARDING TYPE

In the article a possibility of solution the boundary value problems for linear equations of retarding type is studied using new updating of flexible structure function.

Keywords: boundary value problem, the Volterra integer-differential equations, resolving equation, function of flexible structure, retarding type of equations.

Введение

В работе [2] доказано, что задача Коши для всех интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры [1] преобразуется к разрешающему интегральному уравнению типа Вольтерра с обыкновенным аргументом, решение которого существует и притом единственное при выполнении условий ограниченности функций, входящих в уравнение. В данной работе исследуем вопрос о возможности аналогичных преобразований линейной краевой задачи для интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа.

Постановка задачи и ее решение

Выпишем общий вид уравнений запаздывающего типа

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^{n-1} \left[f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda \int_a^x K_{ij}(x, \eta) y^{(i)}(u_j(\eta)) d\eta \right] + \lambda \int_a^x K_{n0}(x, \eta) y^{(n)}(\eta) d\eta = f(x), \quad (1)$$

где $u_0(x) \equiv x$, $u_j(x) \leq x \quad \forall j = \overline{1, l}$ и $u_j(x) \neq x$, функции $f_{ij}(x)$, $u_j(x)$ и $f(x)$ – непрерывны, ядра $K_{ij}(x, \eta)$ – регулярны в квадрате $a \leq x, \eta \leq b$, с начальными функциями

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0) \varphi^{(i)}(u_j(x)), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \quad (2)$$

где $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^l E_{x_0}^j$, $E_{x_0}^j$ – множество точек, для которых соответствующие $u_j(x) \leq x$ при $x \geq x_0$

$\forall j = \overline{1, l}$, а $E_{x_0}^0 = [a, x_0]$ и с линейными билакальными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{i\tau} y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau} y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau, \quad \tau = \overline{0, n-1}, \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b. \quad (3)$$

Предполагая, что решение задачи (1), (2), (3) существует и единственно, будем искать ее решение на отрезке $x \in [x_0, b]$, применив для преобразований одну из модификаций функции гибкой структуры

$$y^{(i)}(u_j(x)) = D^{-1} \left[\sum_{s=1}^n y^{(s-1)}(x_0) \frac{d^i \Delta_s(u_j(x) - x_0)}{dx^i} + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x) - t)}{\partial x^i} \mu(t) dt \right] + \gamma_i u_j^n(x) \mu(u_j(x)), \quad (4)$$

где $i = \overline{0, n}$, $D = D(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров r_1, r_2, \dots, r_n , которые определяются в ходе решения задачи исходя из оптимальности ее решения, определители $\Delta_s(x - t), s = \overline{1, n}$ получаются из определителя D заменой s-ой строки строкой $\exp r_1(x - t), \exp r_2(x - t), \dots, \exp r_n(x - t)$, $\mu(x)$ – новая неизвестная функция и $\gamma_n = 1, \gamma_i = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$.

Обозначим через c_j наименьшие из корней $u_j(x) = x_0$ на отрезке $x \in [x_0, b]$, если же таковых нет, то полагаем соответствующие $c_j = b$. Далее разобьем интегралы в уравнении (1) на суммы от известных и неизвестных частей в выражениях от запаздываний, в соответствии с (2), считая при этом $y^{(n)}(u_j(x)) = y^{(n-1)}(x_0) \varphi^{(n)}(u_j(x))$.

Используя начальные функции (2), краевые условия (3) и функцию гибкой структуры и ее производные (4) определим $y^{(i)}(x_0)$ через новую неизвестную функцию $\mu(x)$, при этом могут возникнуть три возможных ситуации: 1. $x_0 < x_1 \leq c_j \quad \forall j = \overline{0, l}$; 2. $x_0 < c_j \leq x_1 \quad \forall j = \overline{0, l}$; 3. x_1 таково, что $\exists j = \overline{0, l}$, что для некоторых выполняется $x_0 < x_1 \leq c_j$ и для других $x_0 < c_j \leq x_1$.

Первый случай наиболее простой он напрямую сводится к решению задачи Коши. Во втором и третьем случаях, применив функцию гибкой структуры и ее производные (4), выразим значения $y^{(i)}(x_1) \quad i = \overline{0, n-1}$ через новую неизвестную функцию $\mu(x)$ и начальные значения искомой функции и ее производных $y^{(i)}(x_0) \quad i = \overline{0, n-1}$

$$y^{(i)}(x_1) = D^{-1} \left[\sum_{s=1}^n y^{(s-1)}(x_0) \Delta_s^{(i)}(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^i \Delta_n(x_1 - t)}{\partial x^i} \mu(t) dt \right], \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Подставив полученные выражения $y^{(i)}(x_1)$ в краевые условия (3),

$$\sum_{i=0}^{n-1} \{ \alpha_{i\tau} y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau} D^{-1} \left[\sum_{s=1}^n y^{(s-1)}(x_0) \Delta_s^{(i)}(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^i \Delta_n(x_1 - t)}{\partial x^i} \mu(t) dt \right] \} = \gamma_\tau, \quad \tau = \overline{0, n-1},$$

перегруппировав слагаемые, придем к системе алгебраических уравнений относительно $y^{(i)}(x_0)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau} D^{-1} \Delta_{i+1}^{(i)}(x_1 - x_0)] y^{(i)}(x_0) = \gamma_\tau - D^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{i\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^i \Delta_n(x_1 - t)}{\partial x^i} \mu(t) dt, \quad \tau = \overline{0, n-1}. \quad (5)$$

Обозначив главный определитель системы (5) через ω

$$\omega = \det [\alpha_{i\tau} + \beta_{i\tau} \varphi_i(x_1)], \quad i, \tau = \overline{0, n-1}, \quad (6)$$

а алгебраические дополнения к элементам главного определителя через $\omega_{i\tau}$ по формулам Крамера найдем

$$y^{(i)}(x_0) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{i\tau}}{\omega} [\gamma_\tau - D^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1 - t)}{\partial x^k} \mu(t) dt], \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (7)$$

В соответствии с (7) функции гибкой структуры (4) для краевой задачи примут вид

$$y^{(i)}(x) = D^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{d^s \Delta_s(x-x_0)}{[dx]^s} \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} [\gamma_\tau - D^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k} \mu(t) dt] + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^j \Delta_n(x-t)}{[dx]^j} \mu(t) dt \right\} + q_i \mu(x),$$

где $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, l}$, $q_n = 1$, $q_i = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$, $x \in [c_j, b]$. (8)

Разбиваем интегралы в уравнении (1) на сумму в соответствии с определенными начальными множествами $E_{x_0}^j$ и подставляем функцию гибкой структуры и ее производные (8), полученные для краевой задачи, в уравнение (1), выделяя при этом известные и неизвестные выражения под знаком интеграла. Затем, проведя преобразования выражений под знаками интегралов, содержащих неизвестную функцию $\mu(x)$, заменив переменную η на t и сменив порядок интегрирования в двойных интегралах, получим разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра–Фредгольма с обыкновенным аргументом

$$\mu(x) + \int_{x_0}^{x_1} G_j(x, t) \mu(t) dt + \lambda \int_{x_0}^{u_j(x)} H_j(x, t) \mu(t) dt = F(x), \quad (9)$$

где для ядер $G_j(x, t)$, $H_j(x, t)$ и свободной функции $F(x)$ получены формулы.

Пример. Найдем решение следующей краевой задачи:

$$y'(x) + xy\left(\frac{x}{2}\right) - \int_0^x y(\eta) d\eta = 1, \quad y(x) = \frac{x}{2}, \quad y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{4}, \quad x_0 = 0, \quad 3y(0) + y(1) = 1.$$

Решение. В данной краевой задаче $u_0(x) = x$, $u_1(x) = \frac{x}{2}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $E_{x_0} = [0]$. Так как начальное множество состоит из одной точки, совпадающей со значением нижнего предела интегрирования, то начальные функции на значения интеграла влиять не будут. Выпишем функцию гибкой структуры по формулам (3) и ее значение для $y(x_1)$, учитывая условия краевой задачи

$$y(x) = y(0)e^{rx} + \int_0^x e^{r(x-t)} \mu(t) dt, \quad y(1) = y(0)e^r + \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt,$$

и, подставив полученное выражение для $y(x_1)$ в краевые условия задачи, найдем

$$y(0) = \frac{1}{3+e^r} - \frac{1}{3+e^r} \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt.$$

Затем, подставив полученное выражение для $y(0)$ в функцию гибкой структуры, найдем ее выражение в соответствии с условиями краевой задачи:

$$y(x) = \frac{e^{rx}}{3+e^r} - \frac{e^{rx}}{3+e^r} \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt + \int_0^x e^{r(x-t)} \mu(t) dt \quad \text{и} \quad y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r} - \frac{e^{\frac{rx}{2}}}{3+e^r} \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt + \int_0^{\frac{x}{2}} e^{r\left(\frac{x}{2}-t\right)} \mu(t) dt.$$

С целью сокращения объема выкладок положим $r = 0$, тогда выражения функции гибкой структуры упростятся:

$$y(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 \mu(t) dt + \int_0^x \mu(t) dt \quad \text{и} \quad y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 \mu(t) dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \mu(t) dt.$$

Подставив эти выражения функции гибкой структуры в уравнение краевой задачи после необходимых преобразований получим разрешающее интегральное уравнение:

$$\mu(x) + \int_0^{\frac{x}{2}} \mu(t) dt - \int_0^x (x-t) \mu(t) dt = 1,$$

решение которого будет $\mu(x) = 1$. Подставив это значение $\mu(x)$ в функцию гибкой структуры для краевой задачи найдем ее решение $y = x$. Нетрудно проверить, что все условия краевой задачи выполняются.

Заключение

В журнальной литературе имеются работы, которые затрагивают многие вопросы решения интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом, но мало работ, которые бы поднимали и решали проблему преобразования начальных и краевых задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом.

В данной статье исследованы возможности построения модели с обыкновенным аргументом для краевой задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра запаздывающего типа. Для всех уравнений запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры этот вопрос решен положительно. Для уравнений нейтрального и опережающего типов скорее всего такое преобразование возможно только для некоторых видов уравнений. Полученные аналитические выражения модели начальной задачи дают возможность оптимизировать нахождение ее точного или приближенного решений за счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры и разработать программу решения поставленных задач на ЭВМ. Этому и будут посвящены дальнейшие исследования и разработки программ.

Литература

1. Куликов Н.К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. М., 1974. С.47–57.
2. Шишкин Г.А. Линейные интегродифференциальные уравнения Вольтерра с функциональным запаздыванием. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2009. 64 с.
3. Шишкин Г.А. Функция гибкой структуры и ее модификация при решении краевых задач для уравнений с функциональным запаздыванием // Вестник Бурятского государственного университета. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2013. – Вып. 9. С. 144-147.

Шишкин Геннадий Александрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, e-mail: gnshishkin@mail.ru

Shishkin Gennady Alexandrovich, candidate of physical and mathematical sciences, professor, applied mathematics department, Buryat State University.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Управляемые системы и методы оптимизации

<i>Булдаев А.С., Анхбаяр Г.</i> Условия улучшения и оптимальности в задачах оптимизации нелинейных управляемых систем.....	3
<i>Бурлаков И.Д.</i> Анализ эффективности метода нелокального улучшения в задачах оптимального управления	10
<i>Козлова О.Р.</i> Применение метода вектор-функций Ляпунова к задаче нормирования воздействий.....	19
<i>Мижидон А.Д., Мижидон К.А., Лобанов А.В.</i> Аналитико-численное обоснование построения алгоритма решения задачи управления, обеспечивающего выполнение заданных ограничений при полигармонических возмущениях.....	25
<i>Трунин Д.О., Ганхуяг Д.</i> Метод нелокального улучшения управляемых систем с функциональными ограничениями.....	33
<i>Трушкова Е.А.</i> Приближенный синтез управления на основе алгоритма глобального улучшения.....	38

2. Информационные системы и технологии

<i>Абасов Н.В., Чернышов М.Ю., Осипчук Е.Н.</i> Применение технологии метамоделирования в управлении технологическими режимами ГЭС.....	42
<i>Гаченко А.С., Маджара Т.И., Ружников Г.М., Хмельнов А.Е.</i> Применение ГИС и веб-технологий для создания интегрированных информационно-аналитических систем..	53
<i>Федорченко Л.Н., Лукьянова Л.М.</i> Синтез распознавателя для КСР-языка.....	57
<i>Харинов М.В.</i> Альтернатива иерархическому методу Оцу для цветового изображения.....	64

3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

<i>Батзул Т., Ганхуяг Д., Очирбат Б., Хишектуева И.-Х.Д.</i> Обобщение теоремы Флоке–Ляпунова.....	73
<i>Кибирев В.В.</i> Целые решения эллиптических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.....	76
<i>Новиков Е.А., Рыбков М.В.</i> Численный алгоритм построения многочленов устойчивости методов первого порядка.....	80
<i>Шишкин Г.А.</i> Краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра запаздывающего типа.....	85

CONTENTS

1. Controlled systems and methods of optimization

<i>Buldaev A.S., Ankhbayar G.</i> Conditions for improvement and optimality in optimization problems of nonlinear control systems.....	3
<i>Burlakov I. D.</i> Effectiveness analysis of method for nonlocal improvement in optimal control problems	10
<i>Kozlova O.R.</i> Application of the Lyapunov's vector functions method to a problem of effects normalization	19
<i>Mizhidon A.D., Mizhidon K.A., Lobanov A.V.</i> Analytical and numerical basis for constructing an algorithm for solution a problem of control providing fulfillment of defined constraints under polyharmonic perturbations.....	25
<i>Trunin D.O., Gankhuyag D.</i> Method of nonlocal improvement of controlled systems with functional constraints.....	33
<i>Trushkova E.A.</i> Approximate feedback control based on a global improvement algorithm.....	38

2. Information systems and technologies

<i>Abasov N.V., Chernyshov M.Yu., Osipchuk E.N.</i> Use of metamodeling technology in the control of technological regimes of hydroelectric power plants.....	42
<i>Gachenko A.S., Madzhara T.I., Ruzhnikov G.M., Khmel'nov A.E.</i> GIS and WEB technologies application for creation of integrated information-analytical systems.....	53
<i>Fedorchenko L.N., Lukyanova L.M.</i> Synthesis of recognizer for a CFR-language.....	57
<i>Kharinov M.V.</i> An alternative to hierarchical Otsu method for color image.....	64

3. Functional analysis and differential equations

<i>Batzul T., Gankhuyag D., Ochirbat B., Khishektueva I.-Kh.D.</i> Generalization of the Floquet-Lyapunov theorem.....	73
<i>Kibirev V.V.</i> Integer solutions for elliptic equations of the second order with constant coefficients.....	76
<i>Novikov E.A., Rybkov M.V.</i> A numerical algorithm for constructing polynomials stability for methods of the first order.....	80
<i>Shishkin G.A.</i> The boundary value problems of Volterra integer-differential equations of retarding type.....	85

ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА

Вестник БГУ включен в подписной каталог Роспечати за № 18534 и Перечень изданий Российской Федерации, где должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

На основании постановления заседания Ученого совета БГУ за № 10 от 28 мая 2009 г. в «Вестнике БГУ» в 2014 г. публикуются статьи по следующим направлениям:

1. Педагогика (январь)

гл. ред. Дагбаева Нина Жамсуевна – тел. 21-04-11; 44-23-95

эл. адрес: vestnik_pedagog@bsu.ru

2. Экономика. Право (февраль)

гл. ред. Атанов Николай Иванович – тел. 21-37-44

эл. адрес: feu-bsu@mail.ru

3. Химия, физика (март)

гл. ред. Хахинов Вячеслав Викторович – тел. 43-42-58

эл. адрес: khakhinov@mail.ru

4. Биология, география (март)

гл. ред. Доржиев Цыдып Заятуевич – тел. 21-03-48

эл. адрес: vestnik_biolog@bsu.ru

5. Психология, социальная работа (апрель)

гл. ред. Базарова Татьяна Содномовна – тел. 21-26-49

эл. адрес: decspf@mail.ru

6. Философия, социология, политология, культурология (апрель)

гл. ред. Осинский Иван Иосифович – тел. 21-05-62

эл. адрес: intellige2007@rambler.ru

7. История (май)

гл. ред. Митупов Константин Батомункич – тел. 21-64-47

эл. адрес: vestnik_history@bsu.ru

8. Востоковедение (май)

гл. ред. Бураев Дмитрий Игнатьевич – тел. 44-25-22

эл. адрес: gailia@mail.ru

9. Математика, информатика (июнь)

гл. ред. Булдаев Александр Сергеевич – тел. 21-97-57

эл. адрес: vestnik_bsu_math@rambler.ru

10. Филология (сентябрь)

гл. ред. Имихелова Светлана Степановна – тел. 21-05-91

эл. адрес: 223015@mail.ru; map1955@mail.ru

11. Романо-германская филология (сентябрь)

гл. ред. Ковалева Лариса Петровна – тел. 21-17-98

эл. адрес: klp@bsu.ru, khida@mail.ru

12. Медицина, фармация (октябрь)

гл. ред. Хитрихеев Владимир Евгеньевич – тел. 44-82-55

эл. адрес: vestnik_medicine@bsu.ru

13. Физкультура и спорт (октябрь)

гл. ред. Гаськов Алексей Владимирович – тел. 21-69-89

эл. адрес: gaskov@bsu.ru

14. Философия, социология, политология, культурология (ноябрь)

гл. ред. Осинский Иван Иосифович – тел. 21-05-62

эл. адрес: intellige2007@rambler.ru

15. Теория и методика обучения (декабрь)

гл. ред. Очиров Михаил Надмитович – тел. 21-97-57

эл. адрес: vestnik_method@bsu.ru

Требования к оформлению статей, представляемых в «Вестник БГУ»

Отбор и редактирование публикуемых статей производятся редакционной коллегией из ведущих ученых и приглашенных специалистов.

В «Вестник БГУ» следует направлять статьи, отличающиеся высокой степенью научной новизны и значимостью. Каждая статья имеет УДК, а также письменный развернутый отзыв (рецензию) научного руководителя или научного консультанта, заверенный печатью.

Автор статьи обязан заключить лицензионный договор о предоставлении неисключительных прав на использование созданного им произведения (статьи) ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет». Образец лицензионного договора представлен на сайте БГУ.

Общие требования	Тексты представляются в электронном и печатном виде. Файл со статьей может быть на дискете или отправлен электронным письмом. На последней странице – подпись автора(ов) статьи. Название статьи и аннотация даются и на английском языке. После аннотации дать ключевые слова на русском и английском языках.
Электронная копия	Текстовый редактор Microsoft Word (версии 6.0, 7.0, 97). В имени файла указывается фамилия автора.
Параметры страницы	Формат А4. Поля: правое – 15 мм, левое – 25 мм, верхнее, нижнее – 20 мм.
Форматирование основного текста	С нумерацией страниц. Абзацный отступ – 5 мм. Интервал – полуторный.
Гарнитура шрифта	Times New Roman. Обычный размер кегля – 14 пт. Список литературы и аннотация – 12 пт.
Объем статьи (ориентировочно)	Кратких сообщений – до 3 с., статей на соискание ученой степени кандидата наук – 7–12 с., на соискание ученой степени доктора наук – 8–16 с.
Сведения об авторах	Указываются фамилия, имя, отчество (полностью), ученая степень, звание, должность и место работы, адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail (на русском и английском языках)

- Список литературы – все работы необходимо пронумеровать, в тексте ссылки на литературу оформлять в квадратных скобках.

- Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются. Все статьи проходят проверку в системе «Антиплагиат. ВУЗ».

- Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ». Корректурa авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются.

- Статьи принимаются в течение учебного года.

- Допустима публикация статей на английском языке, сведения об авторах, название и аннотацию которых необходимо перевести на русский язык.

- Формат журнала 60x84 1/8.

- Статья должна содержать минимум таблиц, формул, рисунков и графиков. Их присутствие допускается только в тех случаях, если описать процесс в текстовой форме невозможно или нецелесообразно. Желательно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Все объекты должны быть черно-белыми без оттенков. Все формулы должны быть созданы с использованием компонента Microsoft Equation или в виде четких картинок. Символы можно вставлять с помощью операции в Word (Вставка – Символ). Диаграммы располагаются в тексте с использованием программы Microsoft Excel (Вставка – Объект – Создание – Диаграмма Microsoft Excel). Рисунки и графики должны иметь четкое изображение и быть выдержаны в черно-белой гамме, лучше применять штриховку (Формат автофигуры – Цвета и линии – Цвет – Способы заливки – Узор). Схемы создаются с помощью панели инструментов Рисование. Фотографии и рисунки в формате *.tif или *.jpg должны иметь разрешение не менее 300 dpi. Диаграммы, формулы, рисунки, графики должны прилагаться отдельными файлами, чтобы издательство имело возможность ввести в них правки.

Стоимость обработки 1 с. (формата А4) для преподавателей БГУ составляет 200 р., для остальных – 400 р. Для аспирантов – бесплатно.

Адрес: 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а, Издательство БГУ.

Факс (301-2)-21-05-88

Оплата производится при получении счета от бухгалтерии БГУ.